











# HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES.

Année MDCCVI.

Avec les Memoires de Mathématique & de Physique ,  
pour la même Année.

*Tirés des Registres de cette Academie.*



A PARIS,

Chez { GABRIEL MARTIN.  
JEAN-BAPTISTE COIGNARD fils. } rue S. Jacques.  
H. LOUIS GUERIN.



M DCCXXXI.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.

ROYAUME  
DES SCIENCES

Avec les Mémoires de M. de la Harpe  
sur l'histoire de la France



PARIS  
M. DE LA HARPE



# TABLE

## POUR

# L'HISTOIRE.

---

### PHYSIQUE GENERALE.

<i>Sur une irregularité de quelques Barometres.</i>	Page 1
<i>Sur la déclinaison de l'Aiman.</i>	3
<i>Diverses Observations de Physique generale.</i>	7

---

### ANATOMIE.

<i>Sur les Cataractes des yeux.</i>	12
<i>Sur la formation de la Voix.</i>	15
<i>Diverses Observations Anatomiques.</i>	22

---

### CHIMIE.

<i>Sur une dissolution d'Argent.</i>	30
<i>Sur la nature du Fer.</i>	32
<i>Sur la nature du Miel.</i>	36
<i>Sur le fer des Plantes.</i>	38
<i>Sur l'Analyse de deux Plantes Marines.</i>	40
<i>Observation Chimique.</i>	la-même.

---

### BOTANIQUE.

42

# T A B L E.

## ALGEBRE.

<i>Sur une Methode générale pour la résolution des Equations.</i>	43
---	----

## GEOMETRIE.

<i>Sur les Grandeurs qu'on nomme plus qu'infinites.</i>	47
<i>Sur la Methode des Infiniment petits pour les Maxima &amp; Minima.</i>	51
<i>Sur le rapport des Forces centrales à la pesanteur des corps.</i>	56
<i>Sur les Isoperimetres.</i>	68
<i>Sur les Roulettes en général.</i>	74
<i>Sur une Proposition de Geometrie élémentaire.</i>	83
<i>Sur les Rayons des Développées des Courbes conçues comme formées d'Élémens courbes.</i>	90

## ASTRONOMIE.

<i>Sur les mouvemens de Jupiter &amp; de Mars.</i>	95
<i>Sur les Refractions.</i>	101
<i>Sur l'apparition d'une Comete.</i>	104
<i>Sur la Planete de Mercure.</i>	106
<i>Sur les apparences du corps de la Lune.</i>	109
<i>Sur une nouvelle Etoile qui paroît &amp; disparoît.</i>	111
<i>Sur les trois Eclipses de cette année.</i>	113
<i>Sur une conjonction de Jupiter avec le Cœur du Lion.</i>	120
<i>Sur les Taches du Soleil.</i>	121

## ACOUSTIQUE. 124

## MECHANIQUE.

<i>Sur les loix du Choc des corps.</i>	124
<i>Machines ou Inventions approuvées par l'Academie pendant l'année 1706.</i>	141
<i>Eloge de M. du Hamel.</i>	142

# T A B L E

## P O U R

# L E S M E M O I R E S

<b>O</b> bservations de la quantité d'eau de pluie qui est tombée à l'Observatoire pendant l'année, dernière 1705, & de la hauteur du Thermometre & du Barometre. Par M. DE LA HIRE.	1
Observations de la Pluie & du Vent, faites en l'année 1705 au Château de Pontbriand situé à deux lieues de saint Malo.	6
Autres Observations de la Pluie tombée pendant l'année 1705 à Lyon, & communiquées par le P. Fulchiron Jésuite.	11
Observations du Barometre & du Thermometre faites en différentes Villes pendant l'année 1705. Par M. MARALDI.	12
Reflexions sur les Espaces plus qu'infinis de M. Wallis. Par M. VARI-GNON.	13
Remarques & Reflexions sur la nature des Cataractes qui se forment dans l'œil. Par M. DE LA HIRE.	20
Observations sur les Methodes de Maximis & Minimis, où l'on fait voir l'identité & la difference de celle de l'Analyse des Infiniment petits avec celles de Messieurs Hermet & Hude. Par M. GUISENE.	24
Remarques sur les Coquillages à deux coquilles, & premierement sur les Moules. Par M. POUPART.	51
Les hypotheses des mouvemens de Jupiter, & de Mars. Par M. MARALDI.	61 & 66
Reflexions sur les Observations envoyées à Monsieur le Comte de Pontchartrain par le Pere Laval Professeur d'Hydrographie. Par M. CAS-SINI.	78
Suite de l'établissement de quelques nouveaux genres de Plantes. Par M. TOURNEFORT.	83
Orobis Sylvaticus nostras raii sinops. 191. Par M. CHOMEL.	87
Observations d'une Comete qui a commencé de paroître au mois de Mars. Par M. CASINI & MARALDI.	91
Observations d'une Comete qui a commencé de paroître au mois de Mars. Par M. DE LA HIRE le fils.	95
Observations sur une dissolution de l'Argent. Par M. HOMBERG.	102
Reflexions sur les apparences du corps de la Lune. Par M. DE LA HIRE.	107

# T A B L E.

<i>Démonstration de l'apparence d'un objet aussi grand que la ville de Paris sur le corps de la Lune avec une Lunete de vingt-cinq pieds de foyer.</i>	
Par M. DE LA HIRE.	114
<i>Découverte d'une nouvelle Etoile qui paroît &amp; disparoit en divers temps.</i>	
Par M. MARALDI.	115
<i>Diverses Experiences &amp; Observations Chimiques &amp; Physiques sur le Fer &amp; sur l'Aimant.</i>	
Par M. LEMERY le fils.	119
<i>Supplément au Memoire sur la Voix &amp; sur les Tons.</i>	
Par M. DODART.	136
<i>Observations de la Comete faites depuis le 18 Mars qu'on a commencé de la voir, jusqu'au 16 d'Avril qu'elle a cessé de paroître.</i>	
Par Mrs CASSINI & MARALDI.	148
<i>Observation de l'Eclipse de Lune du 28 Avril 1706 faite à l'Observatoire Royal.</i>	
Par Mrs CASSINI & MARALDI.	155
<i>Observation de l'Eclipse de Lune du 28 Avril 1706 faite à l'Observatoire.</i>	
Par Mrs DE LA HIRE.	157
<i>Observations sur le Fer au Verre ardent.</i>	
Par M. HOMBERG.	158
<i>Observation de l'Eclipse du Soleil faite à Marly le 12 May 1706, en presence du ROY, de MONSEIGNEUR, &amp; de MONSEIGNEUR LE DUC DE BOURGOGNE.</i>	
	165
<i>Observation de l'Eclipse de Soleil faite le 12 May 1706 dans l'Appartement inferieur de l'Observatoire.</i>	
Par Mrs CASSINI & MARALDI	169
<i>Observation de l'Eclipse de Soleil du 12 May 1706 au matin à l'Observatoire Royal dans la Tour orientale à la hauteur de la grande Salle.</i>	
Par M. DE LA HIRE.	172
<i>Comparaison des Forces centrales avec les pesanteurs absolues des corps mus de vitesses variées à discrétion le long de telles Courbes qu'on voudra.</i>	
Par M. VARIGNON.	178
<i>Solution du Problème proposé par M. Jacques Bernoulli dans les Actes de Leipzig du mois de May de l'année 1697. trouvée en deux manieres par M. Jean Bernoulli son frere, &amp; communiquée à M. Leibnitz au mois de Juin 1698. sur les Isoperimetres</i>	235
<i>Description d'une Exostose monstrueuse.</i>	
Par M. MERY.	245
<i>Reflexions sur l'Eclipse du Soleil du 12 May 1706.</i>	
Par M. CASSINI.	249
<i>Suite de l'article trois des Essais de Chimie.</i>	
Par M. HOMBERG.	260
<i>Du Miel &amp; de son Analyse Chimique.</i>	
Par M. LEMERY.	272
<i>Methode pour trouver les foyers des Lignes Geometriques de tous les genres.</i>	
Par M. ROLLE.	284
<i>Principes generaux pour la résolution des Equations numeriques.</i>	
Par M. DE LAGNY.	296
<i>Sur une proposition de Geometrie Elementaire.</i>	
Par M. DE LAGNY.	319



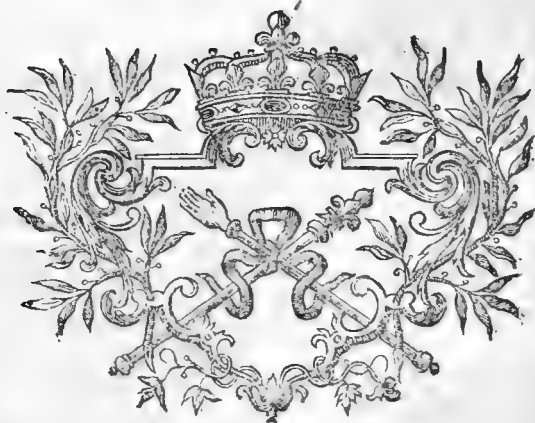
# T A B L E.

<i>Expériences sur les vertus de la racine de la grande Valeriane sauvage.</i>	
Par M. MARCHANT.	333
<i>Extrait des Observations faites au mois de Decembre 1706 par M. Bianchini, sur des feux qui se voient sur une des Montagnes de l'Apennin.</i>	
Par M. CASSINI le fils.	336
<i>Traité des Roulettes, où l'on démontre la maniere universelle de trouver leurs touchantes, leurs points de recourbement ou d'inflexion, &amp; de reflexion ou de rebroussement, leurs superficies &amp; leurs longueurs, par la Geometrie ordinaire. Avec une methode generale de réduire toutes les Lignes courbes aux Roulettes, en déterminant leur generatrice ou leur base, l'une des deux étant donnée à volonté.</i>	340
Par M. DE LA HIRE.	
<i>Methode generale pour reduire toutes les Lignes courbes à des Roulettes, leur generatrice ou leur base étant donnée telle qu'on voudra. Et premierement la base étant donnée de position, il faut trouver la generatrice de la Courbe comme étant une Roulette.</i>	379
Par M. DE LA HIRE.	
<i>Suite de la premiere Partie du Supplément au Memoire sur la Voix &amp; sur les Tons.</i>	388
Par M. DODART.	
<i>Que les Plantes contiennent réellement du fer, &amp; que ce métal entre necessairement dans la composition naturelle.</i>	411
Par M. LEMERY le fils.	
<i>Observations de deux Enfans joints ensemble.</i>	418
Par M. DU VERNEY l'ainé.	
<i>Dissertation sur les Barometres &amp; Thermometres.</i>	432
Par M. DE LA HIRE le fils.	
<i>Des Loix du Mouvement.</i>	442
Par M. CARRE.	
<i>Comparaison de diverses Observations de l'Eclipse du Soleil du 12 May 1706, faites en diverses Villes de l'Europe.</i>	462
Par M. CASSINI le fils.	
<i>De l'Eclipse de Lune du 21 Octobre 1706 à l'Observatoire.</i>	471
Par Mrs DE LA HIRE.	
<i>Observations faites sur le Squelet d'une jeune femme âgée de seize ans, morte à l'Hôtel-Dieu de Paris le 22 Fevrier 1706.</i>	472
Par M. MERY.	
<i>Comparaison de l'Observation de l'Eclipse de Lune arrivée en Avril 1706, &amp; faite dans l'Isle de S. Domingue en Amerique, avec celle qui a été faite à l'Observatoire Royal.</i>	481
Par M. DE LA HIRE.	
<i>Observation de la conjonction de Jupiter avec le cœur du Lion arrivée au mois d'Octobre 1701.</i>	482
Par M. DE LA HIRE.	
<i>Differentes manieres infiniment generales de trouver les Rayons osculateurs de toutes sortes de Courbes, soit qu'en regarde ces Courbes sous la forme de Polygones, ou non.</i>	490
Par M. VARIGNON.	

# T A B L E.

<i>Analyse Chimique de l'Eponge de la moïenne espece.</i> Par M. GEOFFROY.	507
<i>Observation Anatomique.</i> Par M. GEOFFROY.	509
<i>Observations de l'Eclipse de Lune du 21 Octobre 1706 faites à Marseille &amp; à Bologne.</i> Par M. MARALDI.	511
<i>Explication des Figures des Enfans joints ensemble.</i>	516

Fin des Tables.







# HISTOIRE

DE

L'ACADEMIE ROYALE

DES SCIENCES.

Année M. DCCVI.

---

PHYSIQUE GENERALE.

---

SUR UNE IRREGULARITÉ<sup>1</sup>

DE QUELQUES BAROMETRES.



L'HISTOIRE de 1705 \* a parlé assés au long de l'irregularité d'un Barometre de M. le Chancelier, qui se tenoit 18 ou 19 lignes plus bas que les autres. Diverses opinions furent proposées dans l'Academie, & la conclusion fut que l'on feroit des Experiences. M. Maraldi en a fait, & elles confirment toute la pensée de M. Homberg, qui croyoit

\* p. 16 & suiv.

1506.

A

que le Barometre de M. le Chancelier se tenoit plus bas que les autres, parce qu'avant que d'être chargé de Mercure, il avoit été lavé avec de l'esprit de vin. Il prétendoit qu'il y en étoit resté quelques gouttelettes, qui lorsque le vuide s'étoit fait, s'étant extrêmement rarefiées, avoient abaissé le Mercure, soit qu'elles l'abaissassent par elles-mêmes, soit que l'air qu'elles renfermoient, dégagé par leur rarefaction, l'abaissât.

Voici quel est le resultat des experiences de M. Maraldi.

Après qu'on a lavé un Tuyau par dedans avec l'Esprit de vin, & qu'on l'a essuyé plusieurs fois avec differens linges, le Mercure s'y tient pour l'ordinaire moins haut qu'auparavant, & en différentes experiences, la difference des hauteurs varie depuis 6 lignes jusqu'à 18.

Quand on charge le Tuyau immédiatement après l'avoir lavé, le Mercure s'y tient plus bas, que si le Tuyau avoit été chargé quelques heures plus tard.

Si un Tuyau a été lavé avec de l'Esprit de vin, le Mercure s'y tient plus bas, que si ce même tuyau avoit été lavé avec de l'Eau de vie; & s'il a été lavé avec de l'Eau de vie, le Mercure s'y tient plus bas que dans un tuyau lavé avec de l'eau.

Si des Tuyaux lavés avec ces différentes liqueurs ont été ensuite bien essuiez & bien sechez, le Mercure s'y tient à la hauteur où il étoit avant qu'ils eussent été lavés.

Pour secher parfaitement des Tuyaux qui ont été lavés avec de l'Esprit de vin, il suffit de les laisser exposés plusieurs jours à l'air, pourvu qu'il ne soit pas humide.

On a beau laver & frotter un Tuyau par dehors avec de l'Esprit de vin, le Mercure ne baisse point.

Dans un Barometre qui avoit deux Feslures à son extrémité supérieure, le Mercure n'a point baissé pendant deux mois, c'est-à-dire qu'il n'a baissé que comme dans les autres Barometres.

En construisant des Barometres avec plusieurs Tuyaux differens, qui ne paroissent point humides, le Mercure

s'est mis à différentes hauteurs , & la plus grande différence a été de 2 lignes. On a bien séché les Tuyaux où il étoit le plus bas, & ensuite il s'y est mis à la même hauteur que dans les autres.

De tout cela, il est aisé de conclure quelles sont les précautions & les soins qu'il faut apporter à la construction d'un bon Barometre. Et quant à la Theorie, on ne peut imaginer autre chose, sinon que les petites gouttes de liqueur, qui ont humecté le dedans du Tuyau, étant rarefiées dans le vuide, où l'air renfermé dans ces liqueurs en étant dégagé, font baisser le Mercure. La premiere idée est la moins vraisemblable, parce que si l'Esprit de vin abaissoit par lui-même le Mercure, il l'abaisseroit moins que l'Eau de vie, puisqu'il est moins pesant, & l'Eau de vie moins pesante que l'Eau, l'abaisseroit moins aussi, & c'est tout le contraire. Il faut donc que conformément à la seconde idée, il y ait plus d'air renfermé dans l'Esprit de vin que dans l'Eau de vie, ou qu'il s'en dégage plus aisément, & ce sera la même chose de l'Eau de vie comparée à l'Eau. Or ces hypotheses ont assez d'apparence.

Il est vrai qu'il reste toujours la difficulté objectée par feu M. Amontons \*, jusqu'à ce qu'elle soit levée on n'est pas en droit de traiter de système ce qu'on imagine sur cette matiere. Si l'on ne donnoit ce nom qu'à ce qui le merite parfaitement, les Systèmes ne seroient pas fort communs en Physique.

\* V. l'Hist.  
de 1705. p.  
20 & 21.

## SUR LA DÉCLINAISON

### D E L' A I M A N.

**L**A belle idée de M. Halley sur la Déclinaison de l'Aiman, exposée dans l'Hist. de 1701 \*, & que l'on a déjà commencé à verifiser dans l'Academie \*, s'y verifie encore. M. Delisle ayant entre les mains un Journal

\* P. 9. &  
suiv.  
\* V. l'Hist.  
de 1705. p.  
9.

exact fait par M. de Marchais dans un voyage de Guinée & d'Amerique en 1704, 1705, & 1706, a pris soin de comparer à la Carte de M. Halley les Observations qui regardoient la Declinaison de l'Aiguille. Cette Carte a été faite par son Auteur pour l'Année 1700, ainsi dans les années suivantes on ne doit plus trouver les Declinaisons qu'il a marquées, mais des Declinaisons peu différentes, & plus ou moins différentes à proportion du temps, & ce peu de difference, pourvu qu'il suive le Systéme de M. Halley, en est une pleine confirmation. C'est aussi ce que M. Delisle a trouvé. La ligne Courbe exempte de Declinaison tracée par M. Halley autour du Globe de la Terre, ne differe de celle que donne le Journal de M. de Marchais, qu'en ce qu'elle est peut-être d'un demi-degré plus à l'Oüest; mais, & nous l'avions annoncé dans l'Hist. de 1701\*, on s'est toujours bien attendu à voir quelque mouvement dans cette ligne. De ce terme, les Declinaisons observées par M. de Marchais augmentent toutes vers l'Orient, & diminuent vers l'Occident par rapport à celles de la Carte de M. Halley, & la plus grande difference, qui même ne se trouve qu'une fois ou deux si forte, ne va qu'à 2 degrés à peu près en 4 ou 5 ans. On voit par là ce que l'on sçavoit déjà d'ailleurs, que la Declinaison ne varie pas également & uniformément par toute la Terre. Il y a de l'apparence que nous aurons le plaisir de voir le Systéme de M. Halley se conformer de jour en jour; c'est un des misteres de la Physique, absolument inconnu jusqu'à present, & qui peut-être commence à se développer.

\* P. II.

# DIVERSES OBSERVATIONS DE PHYSIQUE GENERALE.

## I.

**M**ONSIEUR Homberg a dit qu'un Vaisseau de verre mis en Hiver devant le feu, casse s'il est plein d'eau, & encore plus aisément s'il l'est de Mercure, mais non pas s'il est plein d'Esprit de vin. La raison qu'il en imagine, est que la matiere de la lumiere ayant de la peine à passer au travers de l'eau ou du Mercure, & par consequent arrêtée en partie par cet obstacle, s'amasse en trop grande quantité dans les pores du verre, où elle est continuellement poussée par le feu, qu'elle dilate trop ces pores, force le ressort du verre, & par là le casse, au lieu que si dans le même Vaisseau elle eût rencontré de l'Esprit de vin, qui lui est plus homogène, & qu'elle pénétre facilement, elle n'eût pas eu occasion d'exercer cette violence. L'expérience se doit faire en Hiver, parce que les vaisseaux qui passent alors d'un air froid à une grande chaleur, sont plus disposez à casser; mais il ne faut pas que le feu soit assez grand, ou qu'ils en soient assez près pour casser par cette seule raison. M. Homberg explique à peu près de la même maniere, pourquoi un vaisseau de verre vuide, & non bouché, étant chauffé brusquement devant le feu, casse ordinairement, s'il est épais, & non pas, s'il est mince. L'épaisseur fait que la matiere de la lumiere dilate beaucoup plus les pores de la surface tournée du côté du feu, que ceux de la surface interieure; & de cette inégalité de dilatation s'ensuit évidemment tout le reste.

## II.

Une Chienne Danoise pleine, & prête à mettre bas, ayant été oubliée & enfermée dans une chambre d'une maison de Campagne, d'où l'on s'en retournoit à Paris,

fut retrouvée au bout de 41 jours couchée sur un lit , vivante , mais ne pouvant se soutenir , & sans aucun signe de rage. On ne vit aucun reste de ses petits , ni de ses excréments , elle devoit s'en être nourrie , & apparemment aussi de son lait , & même d'une partie de la futaine d'un Matelas qu'elle avoit toute rompuë , & de la laine du dedans qu'elle avoit toute bouleversée. On lui donna de la nourriture , & elle commençoit à revenir de son extrême langueur , lorsque M. l'Abbé Galois rapporta cette histoire.

A cette occasion , M. du Hamel parla d'une autre Chienne qui avoit été 6 semaines sans rien manger, hormis la paille d'une chaise, qui étoit dans le lieu où on l'avoit enfermée. Elle avoit aussi bû de l'eau. Elle vécut fort bien après cela.

## III.

M. Maraldi rapporta aussi à ce sujet , que dans un Tremblement de terre arrivé à Naples , un jeune homme avoit été 15 jours entiers sous des ruines, & n'étoit pas mort de faim.

## IV.

M. Geoffroy a fait voir une Pierre venue d'Allemagne, il ne sçait pas de quel endroit. Elle est marbrée, fort douce au toucher , & quasi grasse & savonneuse. C'est comme un marbre tendre , ou du Savon pétrifié. On a crû que c'étoit une Glaise desséchée , & endurcie. M. Hombert a dit , que sa nature consistoit en ce qu'elle a un grain plus fin que le marbre, quoiqu'elle pese moins, parce qu'elle a de plus grands pores. Il a ajouté , pour prouver la finesse de son grain , que broyée & dissoute dans de l'eau , elle la trouble , ce que ne fait pas le marbre. Ses effets sont à peu près les mêmes que ceux du Savon. M. de la Hire a dit , qu'à Montmartre il y a une semblable Pierre entre des bancs de sable.

## V.

M. Lémery ayant acheté chez un Droguisse demi-livre de Galbanum , autant de Sagapenum , autant de Bi-

tume de Judée, & 4 onces d'Opopanax, & ayant mis dans ses poches toutes ces Drogues, chacune envelopée dans un petit sac, hormis le Sagapenum & l'Opopanax qui étoient ensemble, fut fort étonné, quand il rentra chez lui, de ce que tout le monde trouvoit qu'il sentoit horriblement le musc, car chacune de ces Drogues en particulier a une odeur très puante, & très penetrante, à la réserve du Bitume de Judée, qui cependant ne sent rien d'approchant du Musc, & ces mêmes Drogues là sont employées dans la Medecine contre les Vapeurs que le musc & d'autres odeurs semblables peuvent avoir causées. Il examina tous les sacs l'un après l'autre, ils étoient tous neufs, aucun n'avoit servi à enveloper du musc, ni ne le sentoit, & ils n'avoient que l'odeur de la Drogue qu'on y avoit mise. Il les rapprocha tous, & ils produisirent une odeur de musc. Celle dont les habits de M. Lermery étoient parfümez lui dura jusqu'au lendemain, & assez forte. On ne se seroit pas avisé de ces ingrédients pour former une bonne odeur, car celle du musc doit passer pour telle, quoique peu à la mode aujourd'hui, & assez décriée.

#### V. Insectes qui font des trous

M. Poupard a donné l'Histoire du Formica-Leo dans les Memoires de 1704 \*, & nous la supposons pour l'intelligence de ce qui suit. Un ami de M. Carré cherchant de ces Insectes à la Campagne, trouva un grand nombre de ces trous qu'ils savent faire avec tant d'adresse, mais la plupart étoient sans Formica-Leo, ce qui lui fit croire qu'ils avoient été la proie de quelques animaux, plus Lions qu'eux-mêmes. Il fut bien-tôt détrompé, en remarquant au fond de ces trous de petits vers longs d'environ 6 lignes sur une demi-ligne de large. Il en prit quelques-uns qu'il mit dans du sable, où il leur vit faire leurs trous à la maniere du Formica-Leo. Il leur jeta des Fourmis, que les Formica-Leo aiment tant, & ils s'en saisirent avec ardeur en les envelopant avec la moitié de leur corps, car l'autre demeure enfoncée dans le sable. Comme ils n'ont

\* p. 235.

pas autant de force que les Formica-Leo, leur proie leur échape souvent, & pour la rattraper ils se servent de la même ruse, ils construisent leur fosse plus en talut, ce qui fait retomber l'animal. Les Formica-Leo s'en accommodent fort bien, quand on leur en donne, mais il ne faut pas s'en étonner, puisqu'ils s'accoutument bien de leur propre espèce. Ces Vers se metamorphosent en un Insecte fort semblable au Cousin, sinon qu'il est plus long, & plus gros. L'observateur les nomment *Formica-vulpes*, pour les distinguer des Formico-Leo, & marquer leur finesse.

## V I I.

Le même ami de M. Carré examinant le Cristallin d'un Serpent, qui avoit une ligne de diametre, le trouva d'une sphericité parfaite, même avec la Loupe. Comme il ressembloit à une Lentille faite à la Lampe, il voulut s'en servir pour voir les objets à travers, & il trouva qu'il les grossissoit extrêmement, & autant qu'une semblable Lentille de verre, mais que la transparence du verre y manquoit, apparemment à cause de la membrane qui enveloppe le Cristallin. Il est certain par là que ces animaux doivent voir les Objets incomparablement plus grands que nous ne les voyons.

## V I I I.

Le même Observateur de la Nature a rencontré par hazard un Ver long de 2 pouces sur 1 ligne de large, &  $\frac{1}{2}$  d'épaisseur, d'un jaune assez foncé, comme les Perce-oreilles, & qui a 80 jambes de chaque côté. La tête & la queue different si peu par leur figure, qu'on ne peut conjecturer laquelle des deux extremités est la tête. On ne le distingue point non plus au marcher de l'Animal, car quand on le contraire dans sa marche, il ne se détourne pas à côté comme les autres, mais retourne tout court sur ses pas en allant à rebours, de sorte que la partie qui dans le premier mouvement étoit la postérieure, devient l'antérieure dans le second, & ces deux mouvemens sont d'une égale facilité. Peut-être cet Insecte



seûte a-t-il deux têtes & deux cervaux, comme d'autres ont plusieurs poulmons. Quoiqu'il en soit, ses deux extrémités se terminent en pointe avec deux petites Cornes semblables à ses jambes, & longues environ d'une ligne. Il est fort vif, & fort agile, & l'ordre avec lequel il remuë successivement ses 160 jambes est admirable.

Le Philosophe qui l'observoit le coupa en deux parties égales ; & dont par conséquent chacune avoit 80 jambes, elles marcherent toutes deux avec la même agilité que l'Animal entier ; elles cherchoient à se cacher dans quelque trou, & l'Observateur ayant mis de l'eau à leur passage, chacune s'y engagea un peu, mais elles sçurent bien en sortir. Il coupa de nouveau chaque partie en deux, & toutes les quatre marcherent encore, mais plus lentement ; elles faisoient souvent des contorsions semblables à celles des Queûes de Serpents que l'on a coupées. Les parties séparées ne cherchoient point à se rejoindre ; quand on les remettoit l'une contre l'autre, elles se recoloient un peu par le moïen d'un suc visqueux qui sortoit des plaïes, mais elles ne s'accordoient pas dans leurs mouvemens.

#### IX.

Ce Philosophe a encore trouvé un Insecte Poisson qui se transforme en Demoiselle. Quand il est dans l'eau, il a près de 2 poudes de longueur, une queûe qui en tient les deux tiers, & qui a 4 lignes de large au milieu, & se termine en pointe. Elle est platte en dessous, & ronde en dessus. Dans l'autre tiers de la longueur de l'Animal, on voit sa tête, & 6 jambes. La Demoiselle qui en sort est de celles qui voltigent sur les eaux dormantes, où elles déposent leurs œufs. Voilà un Animal qui de Poisson devient oiseau, différent apparemment des deux especes dont M. Poupert a parlé dans les Mémoires de 1704<sup>\*</sup> ; peut-être trouvera-t-on à force d'observer que ce changement d'habitation & d'Ele-  
ment est assés commun.

<sup>\*</sup> p. 246.  
& suiv.

#### X.

Ce que nous avons rapporté dans l'Histoire de 1703<sup>\*</sup> ;  
1706.

B.

<sup>\*</sup> p. 22. &  
suiv.

de ces Pierres tirées dans le Veronois qui renferment des Plantes & des Poissons deséchés , a été confirmé par M. Leibnits. Il dit que dans le Pais de Brunsvic aux environs d'Osteroda , dans la Comté de Mansfeld aux environs d'Eislebe, & en beaucoup d'autres endroits d'Allemagne , on trouve des veines d'Ardoise horisontales à peu près , où il y a des representations, mais très-exactes & très-fines , de diverses sortes de Poissons ou de Plantes , qui paroissent dans leur longueur & dans leur largeur naturelles, mais sans aucune épaisseur. Ces traces sont souvent marquées sur un mélange de Cuivre , qui contient même de l'Argent. Il y a quelques-unes de ces Plantes que l'on ne connoît plus en ces Pais-là , mais on les retrouve dans les figures des Plantes des Indes.

M. Leibnits conçoit qu'une espece de terre a couvert des Lacs & des Prés , & y a enseveli des Poissons & des Plantes , ou que quelque eau bourbeuse chargée de terre les a enveloppez ou emportez. Cette terre s'est depuis durcie en Ardoise , & la longueur du temps , ou quelque autre cause a détruit la matiere délicate du Poisson ou de la Plante , à peu près de la même maniere dont les corps des mouches ou des Fourmis que l'on trouve enfermez dans l'Ambre jaune , ont été dissipez , & ne sont plus rien de palpable , mais de simples délinéations. La matiere du Poisson ou de la Plante étant consumée , a laissé sa forme empreinte dans l'Ardoise par le moyen du creux qui en est resté , & ce creux a été enfin rempli d'une maniere metallique , soit qu'un feu souterrain cuisant la terre en Ardoise en ait fait sortir le metal qui y étoit mêlé , soit qu'une vapeur metallique penetrant l'Ardoise se soit fixée dans ces creux. M. Leibnits ajoute qu'on peut imiter cet effet par une operation assez curieuse. On prend une Araignée , ou quelqu'autre Animal convenable , & on l'ensevelit sous de l'argile , en gardant une ouverture qui entre du dehors dans le creux. On met la masse au feu pour la durcir ; la matiere de l'Animal s'en va en cendres , qu'on fait sortir par le moyen

de quelque liqueur. Après quoi on verse par l'ouverture de l'argent fondu, qui étant refroidi, on trouve au dedans de la masse la figure de l'Animal assés bien représentée en argent.

Plusieurs Auteurs ont appelé ces sortes de représentations de Poissons ou de Plantes dans des Pierres, *Jeux de la Nature*; mais c'est là une pure idée Poétique, dont un Philosophe tel que M. Leibnits ne s'accommode pas. Si la Nature se jouoit, elle joueroit avec plus de liberté, elle ne s'assujettiroit pas à exprimer si exactement les plus petits traits des Originaux, & ce qui est encore plus remarquable, à conserver si juste leurs dimensions, Quand cette exactitude ne se trouve pas, ce peuvent être des Jeux, c'est à dire, des arrangemens en quelque sorte fortuits. Il est vrai qu'une représentation d'une Plante des Indes dans une Pierre d'Allemagne semble d'abord contraire au Système de M. Leibnits. Mais que la Plante représentée se retrouve aux Indes, c'est déjà un grand préjugé qu'il n'y a pas là de Jeu; il est aisé d'imaginer plusieurs accidents par lesquels une Plante aura été apportée des Indes en Allemagne, même dans les temps où il n'y avoit pas de commerce entre ces pays-là par la navigation; & enfin il paroît à plusieurs marques, qu'il doit s'être fait de grands changemens physiques sur la surface de la terre. M. Leibnits croit que la mer a presque tout couvert autrefois, & qu'ensuite une grande partie de ses eaux se sont fait un passage pour entrer dans des abîmes creux, qui sont au dedans de notre Globe. De-là viennent les Coquillages des Montagnes. Mais toute cette matiere meritoit une plus ample discussion.

Nous renvoyons aux Memoires :

Le Journal des Observations de M. de la Hire pendant l'année 1705, sur la Quantité d'Eau de pluye, sur les Vents, &c. Celles de M. le Baron de Pontbriand,

v. les M.  
p. 1. 6. &  
12.

& celles du Pere Fulchiron Jesuite , faites à Lyon.

V. les M. Les Observations que M. Maraldi a faites du Barometre  
P. 12. & du Thermometre pendant la même année , & celles  
qu'il a recueillies de differens endroits.

V. les M. Les Observations de M. Bianchini sur les Flammes qui pa-  
P. 336. roissent dans un petit canton de l'Apennin.

V. les M. Une Histoire des Barometres & Thermometres par M.  
P. 432. de la Hire le Fils , qui n'y comprend peut-être que trop  
exactement tous les Thermometres qui ont été trouvés  
jusqu'ici.

## A N A T O M I E.

### S U R L E S C A T A R A C T E S.

#### D E S Y E U X.

V. les M. **I**L pourroit sembler étonnant qu'une Operation Chirur-  
P. 20. gique fût incertaine , non pas quant au succès , mais en  
elle-même , c'est à dire , que les uns soutinssent qu'on fait  
une chose , les autres qu'on en fait une autre ; mais l'Opé-  
ration dont nous allons parler est si delicate , & si peu sensi-  
ble à la main même qui l'exécute , que toute la surprise doit  
être qu'on ait osé la tenter.

Les *Cataractes* des yeux ont esté ainsi appellées d'un  
mot Grec qui signifie une Porte qu'on laisse tomber de  
haut en bas comme une Sarrafine , & en effet ce sont des  
especes de Portes qui ferment l'œil aux rayons de la lu-  
miere. A la vûë il paroît que ce sont de petites pellicu-  
les assés épaisses étenduës sur l'ouverture de la prunelle ,  
& formées dans l'humeur Aqueuse , & ç'a été dans cette  
pensée que l'on a imaginé une operation qui a réussi. On

pique l'œil par le côté, on vient à la pellicule, on la tourne autour de l'aiguille, & après l'avoir ainsi roulée & reduite en moins d'espace, on l'enfonce dans le bas de l'œil, & on l'y laisse, après quoi la lumiere peut entrer dans l'œil sans obstacle. Il faut que la pellicule ou cataracte soit *mûre*, c'est à dire, de telle consistance, qu'elle se roule aisément, qu'elle se brise en même temps qu'elle se roule, qu'elle ne remonte pas par son ressort après avoir été abaissée, ce qui arrive quelquefois, & que peut-être aussi elle se fonde & se dissolve dans le bas de l'œil.

Voilà qu'elles sont les idées communes sur les Cataractes, mais d'habiles gens, & fort versés dans ces matieres, n'en tombent pas d'accord. Ils prétendent que quand on croit abaisser une petite membrane, c'est le Cristallin même que l'on abaisse, & qu'on range dans le bas de l'humeur Vitrée. Il s'est épaissi, & a perdu sa transparence, & par conséquent, au lieu qu'il étoit un des principaux instrumens de la vision, il ne fait plus qu'y apporter un obstacle, en fermant le passage aux rayons qui vont à la Retine, & il faut l'ôter de leur chemin. L'alteration de sa transparence, ou son opacité est accompagnée d'un changement de couleur, il devient verdâtre, & par cette raison les Grecs ont appelé cette maladie *Glaucoma*. Le Glaucoma & la Cataracte sont la même chose dans l'opinion de ceux qui croient que la Cataracte est le Cristallin épaissi, mais selon le sentiment ordinaire, ce sont deux maladies très-differentes. On croit la premiere absolument incurable, & non pas la seconde.

La nouvelle Hypothese fut proposée dans l'Academie; une des plus fortes raisons de ceux qui la soutiennent, c'est qu'après l'operation de la Cataracte, on ne voit point sans loupe. Or si l'on n'a fait qu'ôter un rideau de devant le Cristallin, il se retrouve tel qu'il étoit, il fait les mêmes refractions, & la loupe n'est pas plus necessaire qu'auparavant. Si au contraire on a abatu le Cri-

stallin , il est évident qu'il faut une loupe à sa place.

Mais d'un autre côté , l'Academie a lieu de tenir pour certain , qu'il y a des gens qui après l'operation de la Cataracte ont vû sans loupe. Un seul exemple de cette espeece suffit , & il ôte à tous les exemples contraires le pouvoir de rien conclure. C'est même une chose fort établie que plusieurs personnes aussitôt après l'operation ont vû très-distinctement , & quoiqu'ensuite elles ayent cessé de voir , les unes parce que la Cataracte étoit remontée , les autres sans avoir eu cet accident , le premier moment où elles ont vû , eût-il été unique , prouve assés qu'on ne leur avoit pas abatu le Cristallin.

Pourquoi donc après l'operation a-t-on ordinairement besoin d'une loupe ? M. de la Hire en rend cette raison. Quoique la Cataracte soit abatuë , le vice qui l'a produite est encore dans l'Humeur Aqueuse , elle est toujours trop épaisse , trop trouble , & par conséquent laisse passer trop peu de rayons , & la loupe qui en fait tomber une plus grande quantité sur la Retine , repare ce défaut.

Quoique ce que nous avons dit jusqu'ici paroisse assés décisif pour l'ancienne hipothese , M. de la Hire a voulu encore la confirmer par les circonstances & les détails de l'operation , qu'il a faite lui-même sur des yeux de Beuf. Ce qui en résulte de plus considerable , c'est que le Cristallin ne se laisse jamais enfoncer entierement dans le bas de l'œil , & qu'il boucheroit toujours en partie le passage des rayons , tant parce qu'il est trop gros , que parce qu'il est soutenu par l'Humeur Aqueuse , & par la Vitree , sur tout par cette dernière , qui est épaisse comme de la gelée. On abat une Cataracte entierement , ce n'est donc pas le Cristallin que l'on abat ; on rétablit parfaitement la vision , du moins pour quelque temps , & on ne la rétablroit qu'imparfaitement , puisque le Cristallin intercepteroit une partie de la lumiere.

M. de la Hire remarque qu'il est fort aisé que dans l'operation la pointe de l'aiguille entame la surface an-

terieur du Cristallin , & ouvre par conséquent la membrane dont il est envelopé. Or telle est la nature du Cristallin que quand cette membrane a été ouverte , il se plisse & se ride. S'il a donc été blessé dans l'operation de la Cataracte , ces plis & ces rides doivent rendre les réfractions si irrégulieres , & changer si fort les directions des rayons qui devoient frapper au même point , que la peinture des objets en sera entierement détruite. Mais cela ne doit pas arriver dans l'instant d'après la blessure , parce que le Cristallin humecté & rafraîchi par l'humeur Aqueuse dans sa partie blessée , doit être quelque tems sans perdre sensiblement sa configuration. De-là vient , selon M. de la Hire , que quelquefois un Homme qui a vû immédiatement après l'operation , est entierement privé de la vûe au bout de quelque tems , sans que l'on voye la Cataracte remontée.

Quelques-uns croient que la Cataracte est , non pas le Cristallin , mais sa membrane extérieure , ou son enveloppe épaissie par le vice de son suc nourricier , & devenue trop opaque pour laisser pénétrer la lumière jusqu'à la substance du Cristallin. C'est , selon eux , cette membrane que l'on détache du Cristallin qu'elle enferme. Mais M. de la Hire ne croit pas cette operation possible , & si elle l'étoit , il faudroit nécessairement , qu'en enlevant cette membrane , on rompît le Ligament *Ciliaire* qui y est attaché , & qui tient le Cristallin suspendu au milieu de l'œil , & les inconveniens du Cristallin abatu reviendroient.

## S U R L A F O R M A T I O N

### D E L A V O I X.

**T**Out Sujet exactement considéré devient infini , & l'attention est une espece de microscope , qui le grossit & le multiplie toujours , à proportion qu'elle est

V. l. M.  
p. 136. &  
338.

\* V. l'Hist.  
de 1700. p.  
17 & suiv.

plus parfaite. Le Système de M. Dodart sur la Formation de la Voix \*, quoique déjà traité avec assez d'étendue , n'étoit pas épuisé , & l'on verra combien il y manquoit de choses ou curieuses ou même nécessaires , à quoi peut-être on ne pensoit pas. La plupart des Lecteurs s'aperçoivent moins de ce qui manque à un sujet que l'Auteur , mais en recompense ils s'aperçoivent mieux de ce qu'il y a de trop.

M. Dodart confirme & explique plus particulièrement l'usage qu'il avoit donné à la Glotte de former le Son de la Voix par son ouverture , & les différens Tons par les différens degrés de cette ouverture.

Le *Larinx* est un Canal cylindrique fort court qui fait le haut de la Trachée , auquel sont attachées en dedans deux membranes demi-circulaires tendues horizontalement , qui peuvent se joindre exactement par leurs diamètres , mais laissent presque toujours entre elles un intervalle qu'on appelle la Glotte. Le Larinx est tout composé de Cartilages , aussi-bien que la Trachée , & il a des Muscles tant internes qu'externes. Les Anatomistes ont attribué la formation des Tons , ou les différentes ouvertures de la Glotte à l'action de ces muscles ; mais M. Dodart fait voir par leur grandeur , par leur position , & par leur direction , que ni aucun d'eux en particulier , ni tous ensemble , ne peuvent fermer entièrement la Glotte , ni empêcher totalement le passage de l'air , comme on le fait pour quelques instans , quand on retient sa respiration. Or il est plus que vraisemblable que la même cause qui peut fermer entièrement la Glotte est celle qui la resserre par degrés jusqu'à cette entière clôture ; & par conséquent cette dernière action n'appartient pas aux muscles du Larinx non plus que la première. Ils ont d'autres fonctions ; il y en a qui ne servent qu'à tenir ferme la caisse entière du Larinx , ce qui est nécessaire , afin que la Glotte qui y est contenuë ait des appuis fixes pour ses mouvemens ; il y en a qui la dilatent extraordinairement lorsqu'il faut qu'elle donne un plus grand passage.



passage à des matieres épaisses qui sortent du Poumon , d'autres, antagonistes de ceux-ci, la remettent dans son état ordinaire, mais ils ne le modifient ni les uns ni les autres de la maniere qui seroit necessaire pour la production des differens Tons.

Il ne reste plus pour principes du mouvement , qui en ouvrant ou reserrant la Glotte forme les Tons, que deux Cordons tendineux enfermés dans les deux lèvres de cette ouverture. Car chacune des deux membranes demicirculaires, dont l'intervalle fait la Glotte, est repliée sur elle-même & doublée, & toute l'étendue où chacune se replie & se double fait les lèvres de la Glotte. Au dedans de la *duplicature* de chaque membrane est un cordon tendineux qui la renste un peu, attaché par un bout à la partie anterieure du Larinx , & par l'autre à la posterieure. C'est à ces deux cordons que M. Dodard attribue tout le jeu des differentes ouvertures de la Glotte par rapport aux Tons.

Il est vrai qu'ils paroissent *tendineux* & nullement *musculeux*, ligamens & non muscles, c'est-à-dire, propres à lier, à affermir, à soutenir, mais non pas à s'accourcir en se gonflant, car ils ne sont composés que de fibres blanches ou membraneuses, & non de fibres rouges ou charnuës, seules capables de gonflement & de contraction, du moins autant qu'on le peut sçavoir par l'exemple de tous les Muscles connus. Mais est-il bien certain que l'on connoisse toute la Mechanique que le Créateur peut avoir employée à cet égard ? on a de grands sujets d'en douter, & M. Dodart les fait bien valoir. Un Muscle d'une structure singuliere ne servira même qu'à relever encore à nos yeux l'intelligence infinie qui brille dans les Machines de tous les Animaux. Mais on peut ajouter à tout cela que les cordons des deux lèvres de la Glotte ne sont peut-être pas des Muscles extraordinaires. Il faut se souvenir qu'il est necessaire pour le Chant que le petit diametre de cette ouverture ovale puisse être divisé en plus de 9632 parties, quoiqu'il ait moins d'une ligne. Ces divisions si fines ne s'exécutent que par l'approche mutuelle des

deux lèvres, & si les deux cordons qu'elles enferment en font le principe, & qu'ils agissent à la maniere des Muscles connus, il faut que leur gonflement ou leur contraction soit d'une petitesse, non seulement imperceptible aux yeux & aux meilleurs Microscopes, mais presque incomprehensible à l'Esprit. Des fibres rouges & charnuës, où le sang est plus abondant au temps de la contraction, auroient été infiniment trop grossieres pour de semblables mouvemens, & la Nature n'a dû y employer que des fibres blanches & membraneuses, qui se gonflent suffisamment par la plus legere augmentation de la quantité des Esprits qui y coulent. On voit assés que ces deux cordons qui dans leurs relâchement font chacun un petit arc d'Ellipse, deviennent roujours en se contractant de plus en plus des arcs d'une Ellipse plus serrée, plus allongée & moins courbe, & enfin par la dernière contraction dont ils soient capables, degenerent en deux lignes droites appliquées l'une contre l'autre, plus courtes que tous les arcs precedens.

M. Dodart fait ici après Galien une réflexion assés importante, & explique ce que cet Auteur n'avoit fait qu'admirer. Quand la Glotte est absolument fermée, l'air qu'on a pris par la dernière *aspiration* ne pouvant sortir de la poitrine, elle demeure dilatée comme elle étoit, & le Diaphragme demeure baissé, & dans l'action de comprimer tous les visceres contenus dans le ventre. Toutes les forces opposées tant à la dilatation de la poitrine, qu'à l'abaissement du Diaphragme, c'est-à-dire, tous les Muscles qui resserrent la poitrine, & tous ceux qui pareillement compriment le ventre, & repoussent le Diaphragme enenhaut, font un effort commun contre l'état de ce moment là, & sont tous soutenus & vaincus par la force qui ferme la Glotte, puisque pour peu qu'elle s'ouvrît, l'air s'échaperoit, & le combat finiroit, pour ainsi dire, à leur avantage. On sçait combien leur action est puissante, sur tout celle des Muscles du bas ventre, qui quelquefois en le comprimant violemment chassent hors

du corps ou les Boyaux , ou même la Matrice , & on pourroit croire d'abord qu'il est contre la vraisemblance de supposer une force égale & supérieure dans ces deux petits cordons qui ferment la Glotte , & qui , s'ils sont Muscles , ne le sont que d'une maniere insensible. Mais M. Dodart fait voir que ces petits Muscles n'agissent pas seuls , que l'air contenu dans la poitrine , & qui en s'échauffant & se rarefiant toujours de plus en plus , tend à la dilater davantage par son ressort , conspire avec eux à cet égard , qu'ils sont principalement aidés par l'action du Diaphragme qui est alors bandé , & soutient l'effort contraire des Muscles du ventre , qu'enfin tout ce qu'il y a d'effort employé contre la Glotte ne tend qu'à la soulever de bas en haut , ce qui est impossible , & non à l'ouvrir , ce qui seroit nécessaire , qu'à cause du contract immédiat de ses deux lèvres la petite lame d'air , qui tendroit à faire cette ouverture , doit être imaginée sans largeur , & par conséquent sans force , & que c'est-là un Exemple singulier , où par une Mécanique très-simple , la seule position de deux parties l'un contre l'autre leur donne une force infinie.

A ces Recherches curieuses sur l'Organe de la Voix , M. Dodart en joint d'autres sur les circonstances de la Voix.

1<sup>o</sup>. Il demande ce qui cause la difference de la Voix , pleine & de la Voix de *fausset* , qui commence au plus haut ton de la Voix pleine , qui ne lui ajoute que trois Tons au plus , hormis dans quelques Exemples rares , & qui a presque toujours quelque chose de forcé. Il a observé que dans tous ceux qui chantent en fausset le Larinx s'éleve très-sensiblement , & par conséquent le canal de la Trachée s'allonge & s'étrecit , ce qui donne une plus grande vitesse à l'air qui y coule , même avant qu'il soit arrivé à l'ouverture de la Glotte. Cela seul suffiroit pour hausser le Ton , mais de plus il est très-vraisemblable que la Glotte se resserre encore , & plus que pour les Tons naturels. On peut même imaginer dans

quelque cas extraordinaire un troisième principe , qui sera une plus grande force , dont le Musicien poussera l'air dans la voix de fausset ; le Ton deviendra plus aigu comme il le devient dans une flûte sur un même trou , lorsque le souffle est plus fort. Le Larinx étant toujours plus élevé dans la Voix de fausset , il arrive par la disposition des parties entre elles que le *jet* d'air poussé n'enfile presque que la route du nés , & non celle de la bouche , d'où il s'ensuit par ce qui a déjà été établi dans l'Hist. de 1700 , que le resonnement qui s'unit au son , est agréable , mais plus foible que s'il se faisoit & dans la bouche & dans le nés , comme celui de la Voix pleine , & qu'enfin la Voix de fausset ne doit être qu'une espece de demi-voix.

2°. La Voix *fausse* est differente de celle de fausset ; c'est celle qui ne peut entonner juste le Ton qu'elle voudroit. M. Dodart en rapporte la cause à l'inégale constitution des deux lèvres de la Glotte , soit en grandeur , soit en épaisseur , soit en tension ; car cette inégalité supposée , elles ne peuvent jamais concourir ensemble à produire le même Ton par leurs tremblemens , l'une fait , pour ainsi dire , la moitié d'un Ton , l'autre la moitié d'un autre , & l'effet total n'est ni l'un ni l'autre Ton , mais quelque chose de moyen , & d'incommensurable en quelque sorte à ce que la volonté demandoit. C'est par le même principe que des cordes d'instrument sont fausses ; elles ont quelques parties qui ne sont pas assez semblables aux autres.

3°. Pourquoi des personnes qui ont le Son de la voix agréable en parlant , l'ont-elles désagréables en chantant , ou au contraire ? Voici ce que M. Dodart répond. L'action de chanter demande plus de force que celle de parler ; non-seulement les petits cordons tendineux & musculieux de la Glotte agiront pour lui donner l'ouverture convenable à un certain Ton qu'on veut entonner en chant , mais comme il faut le porter & le soutenir autant qu'il est possible , les muscles du Larinx agiront aussi

de la maniere necessaire pour aider à ceux de la Glotte, au lieu qu'ils n'eussent point pris de part à ce même ton, formé negligemment pour la simple Parole. En un mot, le Chant est un mouvement général de toute la Region vocale, & la Parole est le seul mouvement particulier de la Glotte, & puisque ces deux mouvemens sont differens, l'agrément ou le desagrément qui résulte de l'un par rapport à l'Oreille, ne tire point à conséquence pour l'autre.

M. Dodart ajoute une raison particuliere pour ceux en qui la voix de la parole est agréable, & non pas celle du chant. Il conjecture que le chant est une ondulation, un balancement, un tremblement continuel, non pas ce tremblement continuel des cadences, qui se fait quelquefois dans l'étendue d'un ton, mais un tremblement qui paroît égal, & uniforme, & ne change point le ton, du moins sensiblement, semblable en quelque sorte au vol des Oiseaux qui planent, dont les ailes ne laissent pas de faire incessamment des vibrations, mais si courtes & si promptes qu'elles en sont imperceptibles. Le tremblement des cadences se fait par des changemens très-prestes & très-déliçats de l'ouverture de la Glotte, mais le tremblement qui regne dans tout le chant est, selon M. Dodart, celui du Larinx même. Le Larinx est le canal de la voix, mais un canal mobile dont les balancemens contribuent à la voix de chant. Cela posé, on voit assez que si ses treblemens qui ne doivent pas être sensibles, le sont, ils choqueront l'oreille, tandis que dans la même personne les simples mouvemens de la Glotte pourront faire un effet qui plaise.

# DIVERSES OBSERVATIONS ANATOMIQUES.

## I.

**M**ONSIEUR Littre a fait voir le Pericarde d'un Homme de 30 à 35 ans , fortement adhérent au Cœur en toute son étendue. Cet Homme avoit été tué d'un coup d'épée, & étoit mort un quart d'heure après le coup ; circonstance qui marque assés qu'aux approches de la mort le Pericarde n'avoit pas eu le loisir de se vuider de la liqueur que l'on prétend qu'il contient toujours.

## II.

M. Mery a fait les Observations suivantes sur la Matrice d'une femme morte 4 heures après être accouchée : 1°. Que le Corps de cette Matrice étoit musculueux. 2°, Qu'elle avoit 8 lignes d'épaisseur. 3°, Que sa surface intérieure n'étoit point revêtue de Membrane. 4°, Qu'elle n'avoit point de glandes. 5°, Que les embouchures des vaisseaux sanguins y étoient visiblement ouvertes. La troisième observation est fort remarquable.

## III.

Un jour que l'on parloit de la difficulté de concevoir que les Esprits , qui gonfloient un Muscle pour produire un certain mouvement , en sortissent dans l'instant même que l'on vouloit faire un mouvement contraire , M. Varignon dit qu'il imaginoit qu'un Muscle ne continuoit un mouvement que parce que de nouveaux Esprits y couloient toujours , & succedoient à ceux qui se dissipoient à chaque instant , que par là il surmontoit son Antagoniste , mais qu'aussi-tôt que l'on vouloit faire un mouvement contraire , il cessoit de couler de nouveaux Esprits dans ce Muscle , & qu'il en couloit dans l'Antagoniste , ce qui causoit le changement subit & instantané de mouvement.

Pour le prouver, il rapporta qu'un Chat à qui on avoit ouvert le cou, & lié les nerfs de la 8<sup>e</sup> Paire, qui vont au Cœur & au Poumon, étoit mort dans l'instant sans aucun mouvement d'aucune partie de son corps, & étoit demeuré tout d'un coup aussi roide que s'il eut été mort depuis plusieurs jours. Le mouvement du cœur ayant été arrêté subitement & totalement, la filtration des Esprits dans le Cerveau, qui ne se peut faire que par l'impulsion continuelle du sang que le cœur y envoie, s'étoit arrêtée de la même manière, & de là tout le reste s'ensuit selon la pensée de M. Varignon. On en peut conclure aussi que dans les autres corps morts, qui ne demeurent pas tout d'un coup aussi roides que celui du Chat, il doit rester encore, même après ce qu'on appelle la mort, un petit mouvement insensible du Cœur, du Sang, & des Esprits.

## IV.

M. Mery a fait voir un Oeuf de Poule cuit, dont le blanc renfermoit un autre petit Oeuf, revêtu de sa coque & de sa membrane intérieure, & rempli de la matière blanche, sans jaune. Comme ce petit œuf avoit été donné cuit à M. Mery, il n'a pu remarquer s'il avoit un germe.

## V.

Une Femme assez pauvre, accoutumée depuis longtemps à boire beaucoup d'eau de vie, & de vin du plus commun, & qui, quoiqu'elle n'eût que 45 ans, étoit devenue par là fort foible & presque hebetée, s'enyvra si fort, qu'elle en mourut après 12 heures d'ivresse. Pendant ce temps, elle fut sans connoissance, & sans parole, le visage pâle, les extrémités froides, la poitrine oppressée, des mouvemens convulsifs, tantôt dans une partie, tantôt dans une autre, mais légers, & de peu de durée. Elle eut aussi une petite fièvre, qui cessoit & recommençoit de temps en temps, sans garder aucune règle.

M. Littre l'ouvrit. Il trouva tout le sang noir, grossier, & en partie caillé, la Rate, le Pancréas, le Foye,

les Reins, les Poumons, desséchés, squirreux, ou même pétrifiés en partie, une infinité de Glandes pétrifiées, & beaucoup plus grosses que dans l'état naturel, les Jugulaires, les Salivaires, celles de la Rate, & des Vaisseaux Spléniques, celles du Mesentere & des Lombes, celles des parties extérieures de la Tête, & quantité d'autres.

Le genre extraordinaire de vie, que menoit cette Femme, a paru à M. Littre la cause de tous ces accidens, & des circonstances de sa mort. Le mauvais vin, dont elle prenoit excessivement, est fort chargé de Tartre, & d'un Tartre grossier, qui par sa quantité & sa nature avoit produit trois mauvais effets. Il avoit fort épaissi le sang, diminué la capacité des tuyaux en s'attachant à leur surface intérieure, comme à celle d'un Tonneau, & empêché la transpiration & la nourriture en bouchant leurs pores. Delà s'ensuit nécessairement le dessèchement des parties. Les Glandes grossissoient par des liqueurs amassées qu'elles ne filtroient plus, & se pétrifioient par l'endurcissement de ces liqueurs dont les plus subtiles parties s'échapoient. Les filtrations étant arrêtées pour la plus grande partie, & du reste fort diminuées, l'affoiblissement de toutes les fonctions tant spirituelles que corporelles n'est pas étonnant.

De cette même cause vinrent aussi la plupart des circonstances de la mort, & il est aisé de les reconnoître. Ce qui produisit en différentes parties des mouvemens convulsifs, mais légers, & de peu de durée, c'est que comme le sang circuloit lentement, il s'en détachoit par intervalles des parties aqueuses, & avec elles des sels, mais grossiers & en petite quantité, qui picotoient des parties nerveuses, tantôt dans un endroit, tantôt dans un autre. Lorsque ces mêmes sels séparés du sang avec la serosité, se rencontroient, & qu'ils étoient de nature à exciter une fermentation, il survenoit une petite fièvre.

M. Littre a remarqué qu'Hippocrate dit dans l'Aphorisme 5<sup>e</sup> de la 3<sup>e</sup> Section, que *si un Homme yvre perd sous*



à coup la parole, il meurt en convulsion, à moins que la fièvre ne le prenne, ou qu'il ne recouvre la parole dans le temps que l'ivresse devoit cesser. Apparemment Hippocrate a entendu que le sujet fût sain d'ailleurs, ou que la fièvre fût forte & continuë, autrement l'Aphorisme ne s'appliqueroit pas à notre exemple.

## VI.

L'ouverture de l'extrémité du Prépuce, qui doit être telle qu'elle puisse laisser le Gland découvert, étoit si extraordinairement petite dans un Enfant de 3 ans, qu'à peine y pouvoit-on introduire le bout d'un stilet extrêmement délié. Cette mauvaise disposition s'appelle *Phimosis*, c'est-à-dire, resserrement, pareil à celui d'un sac lié avec une corde. L'Enfant faisoit jour & nuit de violents efforts pour uriner, & n'urinoit que peu, rarement, & par petites gouttes. Il avoit le bout de la verge extrêmement gros, & la gangrene paroissoit prête à s'y mettre, quand M. Littre fut appelé. Il fit faire une incision au prépuce par le côté, & ensuite en fit retrancher la partie qui excédoit l'extrémité du gland. D'une grande cavité que ce prépuce formoit, il en sortit un peu d'urine, & un nombre presque incroyable de pierres, les plus petites grosses comme des têtes d'épingles, & les plus grosses comme des pois, unies, grisâtres, friables, & quise réduisoient aisément en petites parties à peu près rondes. Il n'y a presque pas de doute qu'elles ne fussent formées des parties les plus grossières de l'urine qui étoient retenues, tandis que la petite ouverture du prépuce ne permettoit qu'aux plus subtiles de sortir, & ce qui le confirme encore, c'est qu'après l'opération l'Enfant ne rendit plus de pierres. La playe qu'on lui avoit faite fut traitée selon les regles ordinaires, & il fut parfaitement guéri en trois semaines. C'étoit-là une espece de Circoncision que la nature rendoit nécessaire.

## VII.

Un Homme qui avoit vécu en parfaite santé jusqu'à l'âge de 80 ans, étant mort d'une chute au bout d'une demi-

heure, M. Litre l'ouvrit, & fit les observations suivantes.

1°. La Membrane de la Rate étoit presque toute ossifiée, quoique la Rate, qui étoit petite, fût d'une bonne constitution. Les Tuniques de l'Artere Splénique, & celles des autres Arteres du ventre & des extrémités inférieures, étoient pareillement ossifiées en beaucoup d'endroits.

2. Les Cartilages du Larinx, & les anneaux cartilagineux de la Trachée, & d'une partie de ses Bronches, l'étoient tout-à-fait.

3°. Dans les Vaisseaux sanguins des parties supérieures, il n'y avoit nulle ossification, hormis dans les Coronaires Cardiaques. Le Cœur étoit fort grand, & les deux Arteres qui en sortent, étant applaties, avoient chacune 2 pouces 5 lignes de diametre, le tout fort sain.

4°. Le Pericarde contenoit dans sa cavité environ une cuillerée d'une liqueur claire, & un peu blanche.

5°. La partie extérieure des deux Reins dans l'épaisseur d'une ligne & demie étoit composée de grains de figure ronde ou ovale, & d'une demi-ligne de diametre. Il y avoit à la superficie extérieure du Rein droit une tumeur noirâtre, grosse comme une noix, composée de grains de la même figure que les autres, mais deux ou trois fois plus gros, & remplis d'une liqueur urineuse.

#### VIII.

Dans le corps d'une femme de 25 ans, morte 4 mois après être accouchée de son second Enfant, M. Litre avû le Pavillon de la Trompe droite de la Matrice attaché par toute sa circonference à l'Ovaire du même côté, & embrassant un Oeuf de 3 lignes de diametre, dont une partie étoit hors de l'Ovaire. Celle qui n'en étoit pas encore sortie, étoit contenuë dans une espee de Calice, dont le fond étoit continu au corps de l'Ovaire. Ce Calice étoit parsemé en dehors de Vaisseaux sanguins, & composé de deux substances différentes, dont l'intérieure étoit glanduleuse, & l'extérieure musculeuse. Ce que M. Litre

a vû en cette occasion est la partie la plus secrète du mystere de la génération de l'Homme , & celle où l'on a le plus de peine à surprendre la Nature dans son operation.

## IX.

Un Homme , qui étoit hidropique , & avoit la jaunisse, étant mort 3 jours après la ponction , M. Mery fit voir à l'Academie un morceau de son Foye, dans lequel les Glandes paroissent très-distinctes , & revêtues de leurs membranes propres. Quoiqu'elles fussent beaucoup plus grosses qu'à l'ordinaire , le Foye étoit plus petit qu'il ne l'est communément dans un âge parfait. La Vesicule du fiel étoit vuide , & ses membranes plus blanches que jaunes.

## X.

M. Littre dissequant un Chien fut fort étonné de lui trouver l'Estomac dans la Poitrine, & placé au-dessus du Diaphragme. Au lieu du trou par où l'Oesophage traverse le Diaphragme pour se rendre dans l'Estomac, il y avoit une grande fente, dont les bords étoient cicatrisés, & paroissoient l'être depuis long-temps, & au lieu de l'Oesophage, c'étoit l'Intestin Duodenum qui passoit par ce trou. Comme il est toujours attaché à l'orifice inférieur de l'Estomac, il alloit le trouver dans la cavité de la poitrine, ce qu'il ne pouvoit faire qu'en s'allongeant & en s'applatissant. M. Littre voulut voir si l'Estomac pourroit passer par la fente du Diaphragme, mais elle se trouva trop petite ; & après une incision qu'il y fit, l'Estomac descendit à sa place naturelle, & l'Oesophage fut assés long pour ne s'y point opposer ce qui marque que l'Estomac avoit été d'abord dans sa situation, & que quelque accident violent l'avoit fait passer par une déchirure ou fente du Diaphragme, qui ensuite s'étoit retrecie en se cicatrisant.

Mais quel avoit pu être cet accident ? M. Littre en imagine deux, ou une convulsion extraordinaire de l'Oesophage, qui en se contractant avoit tiré l'Estomac à lui, ou une extrême contraction du Diaphragme & des Muscles

du ventre en même temps , car ces forces étant opposées, l'Estomac poussé en embas par le Diaphragme, & en enhaut par les Muscles du ventre, a dû aller en enhaut, même en déchirant le Diaphragme, dont la résistance est naturellement moindre que la force des muscles qui agissoient contre lui. On peut même supposer qu'alors cet Estomac étoit plein d'alimens solides, ce qui a dû fortifier son action contre le Diaphragme.

Quoiqu'il en soit, cet Estomac n'étant plus placé entre le Diaphragme & les Muscles du ventre, ces Muscles ne pouvoient plus, comme à l'ordinaire, concourir avec lui par leur contraction à broyer les aliments, & à les chasser dans les Intestins. Ils devoient donc séjourner trop longtemps dans l'Estomac, & par-là contracter quelque vice. D'ailleurs le Duodenum allongé & applati ne donnoit plus un passage assés libre aux aliments digérés. Enfin le Cœur & les Poumons étoient fort incommodés dans leurs mouvemens par cet Estomac, qui s'étoit venu loger dans la poitrine. De tout cela ensemble il auroit été facile de conclure, quand on ne l'auroit pas sçu d'ailleurs, que l'Animal devoit avoir la respiration difficile, & des palpitations de cœur, que plus il avoit mangé, plus ces incommodités devoient être grandes, qu'il devoit avoir de fréquentes envies de vomir sans effet, & être toujours fort maigre.

## XI.

Une Demoiselle qui étoit à une Dame de Chartres alloit à la campagne dans une Charette, qui versa si malheureusement pour elle, qu'une des ridelles lui entra dans la tête du côté droit, cassa en plusieurs pièces l'os appelé *Bregma*, déchira la Dure-mere, & la Pie-mere, & causa un épanchement de la substance propre du Cerveau. La Demoiselle relevée de dessous la Charette marcha 15 à 20 pas, après quoi elle tomba en foiblesse, & perdit connoissance pendant 4 heures. L'épanchement de la substance du Cerveau continua les 6 premiers jours, & il se fit un très-grand écoulement de serosités. Tout cela cessa le se-

ptième jour, & il parut un *fungus* ou champignon qui se formoit dans les déchirures des deux Membranes. Il fut traité selon les regles ordinaires. Pendant les 15 premiers jours, la Malade tomboit dans des assoupissemens profonds, & dans des rêveries, & elle eut un flux de ventre peu violent. La fièvre lui dura 50 jours, & enfin elle a été parfaitement guérie par les sieurs Piat & Cusmont Chirurgiens de Chartres. Il paroît par-là qu'il n'y a guere de blessures dont on doive desespérer.

## XII.

M. l'Abbé de Louvois envoya à l'Academie la description & la figure d'un Enfant monstrueux né dans le Village des Masures, environ 3 lieues de Charleville. C'est une fille parfaitement bien formée & bien proportionnée, qui en porte une autre beaucoup plus petit, sans tête, & du reste assés bien formée, jointe à elle poitrine contre poitrine, depuis la partie supérieure du Sternum où les Clavicules sont articulées jusqu'au Cartilage Xiphoïde, de sorte que tout le reste est séparé, & que les deux pieds de la petite reposent sur le haut des cuisses de l'autre. La petite a ses conduits particuliers pour ses déjections aussi-bien que la grande, mais elle en rend beaucoup moins. Les deux n'avoient dans la Matrice de leur Mere qu'un seul Cordon ombilical, qui appartenoit à la grande, l'autre n'ayant point de nombril. Il y avoit 24 jours que ces deux Sœurs étoient nées, & elles vivoient encore lorsqu'on reçut cette Relation. Les deux bras, & les deux jambes de la petite étoient immobiles. La Mere n'avoit été frappée d'aucun objet ni d'aucune imagination extraordinaire. La jonction de deux Oeufs \* ou Embrions est assés visible dans ce fait, & ce qui la prouve encore, c'est que la plus grande de ces deux Sœurs paroissoit avoir une oreille double, seul reste de la tête de la plus petite.

\* V. l'Hist.  
d' 1702. P.  
28.

**N**ous renvoyons aux Memoires :  
Les Remarques de M. Poupart sur les Moules.

D ii)

V. les M.  
P. 51.

- V. les M. La Description d'une Exostose monstrueuse, par M.  
P. 215. Mery.  
V. les M. Celle deux Enfans monstrueux unis ensemble, par  
P. 413. M. du Verney.  
V. les M. Et celle d'un Squelette contourné, par M. Mery,  
P. 472.

# C H I M I E

## SUR UNE DISSOLUTION

### D'ARGENT.

V. les M. **S**Ion pouvoit réduire la Chimie, & en général la Phi-  
P. 102. sique à des especes de formules universelles, qui con-  
tinissent tous les cas possibles, comme on y réduit les plus  
sublimes Questions de la Geometrie moderne, on seroit  
en état de prévoir les changemens qui répondroient aux  
differentes suppositions qu'on voudroit faire, & souvent  
on verroit de très-legers changemens dans les supposi-  
tions produire de très-grandes variations dans les effets.  
Mais la Phisique est trop vaste, & trop peu connue, du  
moins jusqu'à present, & l'experience seule nous enseigne  
quel est le pouvoir des circonstances pour varier les Phe-  
nomenes. M. Homberg en donne un exemple remarqua-  
ble dans une Dissolution d'Argent faite par le Dissolvant  
de l'Or. Nous laissons à son Memoire toute l'histoire du  
fait, & de la découverte, & nous n'en exposerons ici que  
les principes.

L'Esprit de Sel marin est le dissolvant propre de l'Or,  
& l'Esprit de Nitre le dissolvant propre de l'Argent.  
L'Esprit de Sel mêlé avec l'Esprit de Nitre n'en dissout  
que mieux l'Or, c'est-là ce qui domine dans l'Eau Regale.

l'Esprit de Nitre mêlé avec l'Esprit de Sel ne dissout plus l'Argent. C'est l'Esprit de Nitre qui domine dans l'Eau forte.

Sur ces faits, M. Homberg a conçu avec assez de vraisemblance que les pores de l'Or, qui pèse beaucoup plus que l'Argent, sont plus étroits, & les pointes de l'Esprit de Sel plus fines que celles de l'Esprit de Nitre; qu'elles le sont plus qu'il ne seroit absolument nécessaire pour la petitesse des pores de l'Or; que l'Esprit de Sel uni avec l'Esprit de Nitre forme un corps de grosseur moyenne, encore capable d'entrer dans les pores de l'Or, d'y faire l'effet d'un Coin, & d'en écarter les parties solides; que l'Esprit de Sel étant uni avec l'Esprit de Nitre, son action est plus forte que s'il étoit seul, parce que selon les principes établis par M. Homberg dans ses Essais de Chimie \*, l'Esprit de Nitre est accompagné & revêtu d'un soufre vegetal ou animal plus rarefié, plus volatil, plus actif que le soufre metallique attaché à l'Esprit de Sel; qu'enfin le composé de ces deux Esprits ne dissout point l'Argent, parce que le corps moien qu'ils forment est encore trop délié pour les pores de ce metal, qu'il y est trop au large, & par conséquent n'y fait pas une impression suffisante.

V. les M.  
de 17. 2. p.  
36. & suiv.

Ces principes étant admis, quels effets doit produire une Eau Regale composée d'Esprit de Sel, & d'Esprit de Nitre, mais en si petite quantité l'un & l'autre, qu'ils flotteront séparément dans la liqueur, & ne se rencontreront pas assés souvent pour s'unir, du moins en un grand nombre de parties?

Cette Eau pourra être si foible qu'elle paroitra ne point dissoudre l'Or, & qu'elle prendra seulement une teinture jaune, qui ne diminuera point sensiblement le poids du metal. Elle ne dissoudra point non plus l'Argent, à cause de sa foiblesse, & en général, elle ne dissoudra ni l'un ni l'autre de ces metaux, parce que le quel des deux qui soit mis dans cette liqueur, il y aura toujours l'un des deux Esprits acides, qui fera, pour ainsi dire, des efforts inutiles contre lui, & qui tiendra la place des parties de l'autre

Esprit , qui auroient pû agir plus utilement. Mais si cette Eau Regale a dissous l'Or autant qu'elle le peut dissoudre , si elle en a tiré une teinture jaune, elle pourra ensuite dissoudre l'Argent ; car l'Esprit de Sel , soit seul , soit uni avec l'Esprit de Nitre , étant occupé à tenir dissoutes ce peu de parties d'Or , il n'attaquera plus l'Argent , qui par conséquent recevant l'impression d'une plus grande quantité de parties de l'Esprit de Nitre seul , se laissera dissoudre. Cette experience ne peut pas se renverser , c'est à dire , que cette Eau Regale ne peut pas commencer par dissoudre légèrement l'Argent , & ensuite dissoudre l'Or ; la raison en est , que l'Esprit de Nitre n'empêche pas l'Esprit de Sel d'agir sur l'Or , comme l'Esprit de Sel empêche l'Esprit de Nitre d'agir sur l'Argent.

Il suit de tout cela que si l'Esprit de Sel & l'Esprit de Nitre que nous avons supposé qui flotoient séparément, viennent avec le tems à s'unir dans toutes leurs parties, la liqueur ne fera plus la fonction que l'Eau Regale , & ne dissoudra plus que l'Or , au lieu qu'auparavant après avoir dissous l'Or , elle dissolvoit aussi l'Argent.

On verra dans le Memoire de M. Homberg toute cette Experience , telle qu'elle lui a été présentée par le hazard , & accompagnée du Merveilleux qui venoit de ce que les principes n'en étoient pas encore démêlés. Nous l'avons exposée ici de la maniere qu'elle auroit pû être prévue selon ces principes, mais on ne sçait que trop que ce n'est pas ainsi que nos connoissances ont coutume de proceder.

## SUR LA NATURE DU FER.

**L**E Fer est de tous les Metaux celui qui a les plus grands usages dans la pratique de la Medecine , & en même tems celui qui dans la Physique speculative attire le plus la curiosité des Philosophes , parce qu'il a sa part aux Phenomenes de l'Aiman. M. Lemery le fils, &  
M.



M. Homberg l'ont étudié tous deux, l'un par la Chimie ordinaire, l'autre par sa nouvelle Chimie, dont le seul fourneau est le Miroir ardent du Palais Royal.

Il résulte des operations de M. Lemery le fils que le fer est une matiere huileuse intimement unie à une terre. V. les M.  
P. 119. Selon lui, il n'entre point de sel acide dans cette composition, non que l'on ne puisse en trouver dans le fer, mais comme ce metal est assés indigeste, &, pour ainsi dire, grossierement travaillé par la Nature, il peut avoir des parties étrangères, & qui n'appartiennent pas à la véritable substance. Ainsi des Acides pourront être reçus dans ses pores, sans être en aucune maniere principes de ce Mixte; & loin d'en être principes, M. Lemery fait remarquer qu'ils en sont les Dissolvants, c'est-à-dire les Destrueteurs & les Ennemis. L'Esprit de Sel, l'Esprit de Nitre, & les autres Acides dissolvent le fer, & lorsqu'il se rouille, il est dissous ou par les Acides de l'Air, ou par ceux qu'il contenoit dans ses pores, & que l'eau ou quelqu'autre liqueur a mis en action. S'il se verifie, dans la suite que les Acides soient exclus de la composition intime du fer, il faudra apporter une restriction à la formation du fer artificiel, dont on a parlé dans l'Hist. de 1704 \*, & recon- \* P. 119. noître que les Acides qui y sont entrés n'y étoient pas nécessaires.

Le Vitriol est du fer intimement mêlé avec un Esprit acide, & l'on fait avec ce mélange un Vitriol artificiel tout semblable au naturel. M. Lemery le fils ayant poussé l'une & l'autre espece de Vitriol à un grand feu, il en tira l'Esprit acide, accompagné d'une odeur de souffre commun très-forte, & qui a duré plusieurs mois après la distillation. Le Vitriol calciné & devenu *Colcozar* ayant encore été mis à un feu de fonte très-violent, qui lui fit jetter une nouvelle odeur de souffre, il resta enfin dans le Creuset une poudre noire, rarefiée, & que l'Aiman attiroit aussi fortement que le fer ou que l'Acier.

On sçait que le souffre commun est composé non-seulement d'une matiere huileuse, mais encere d'un Esprit aci-

de , sans lequel la matiere huileuse ne seroit pas inflammable. Il y a donc toute apparence que dans les Vitriols il se forme un souffre commun par l'union de l'Esprit acide avec les parties huileuses du fer , & que ce souffre se rend sensible à l'odorat par l'action du feu. La matiere noire qui restoit après toute l'operation étoit encore du fer , puisqu'elle étoit attirée par l'Aiman , mais un fer ou entierement ou presque entierement dépouillé de sa partie huileuse. Aussi il n'étoit plus malleable , car c'est sa partie huileuse qui lui donne la facilité de s'étendre sous le marteau , mais il étoit devenu friable à peu près comme une pierre , il n'étoit plus ou presque plus dissous par aucun acide , puisque les acides qui fermentent violemment avec les huiles n'avoient plus de prise sur lui , & par la même raison il ne se rouilloit plus.

Les mêmes operations qui ont été faites sur le Vitriol naturel & artificiel , l'ont été aussi sur de la rouille de fer, la plus parfaite que l'on ait pû trouver , & ont réussi de même à peu près. Comme le Vitriol a plus d'Acide que la rouille , & que les parties huileuses ne se détachent de ces Mixtes qu'à proportion de la quantité de l'Acide qui les enleve, il se détache plus de parties huileuses du Vitriol que de la rouille , & par consequent la matiere qui reste de la rouille après les operations est plus en état d'être encore dissoute imparfaitement par quelques Acides. Il paroît donc que le fer se décompose , & même assés facilement , eu égard à la difficulté de décomposer d'autres Metaux. C'est par-là qu'il devient utile dans la Medecine, & apparemment les bons effets que l'on en retire sont dûs à sa partie huileuse séparée de la terre par les operations Chimiques qui se font dans le corps humain.

M. Lemery ayant donné aux usages medicinaux la partie huileuse du fer , il donne la partie terreuse aux phenomenes magnetiques; non pas que toute sorte de terre y doive être propre, il faut pour cela une disposition très-particuliere des pores , & peut-être est-ce la matiere huileuse qui les moule ainsi qu'il est nécessaire. Delà

M. Lemery conjecture que l'Aiman pourroit avoir été originaiement du fer, dont la chaleur de la terre auroit enlevé la partie huileuse. En effet, il n'en faudroit pas davantage pour faire toute la difference d'un Metal tel que le fer à une Pierre telle que l'Aiman, & l'on sçait combien le fer & l'Aiman se ressemblent d'ailleurs.

Pourquoi donc le fer dépouillé de son huile, & mis dans l'état où M. Lemery l'a eu par ses experiences, n'attire-t-il pas ainsi que l'Aiman ? Ce fer est en poudre, & le meilleur Aiman réduit en poudre n'attire pas non plus, La cause en est aisée à imaginer ; il ne se forme pas de Tourbillon autour de chaque petit grain, ou il ne s'en forme pas qui soit assés fort. Il ne s'en forme pas non plus autour de tous les grains ensemble, qui n'ont entre eux aucune suite de pores reguliere. La poudre d'Aiman qui a perdu la vertu d'attirer, est toujours attirée précisément comme la terre du fer.

Si du fer dépouillé de sa partie huileuse n'étoit pas en poudre, & que d'ailleurs il fût assés long-tems exposé au courant de la matiere magnetique pour en amasser & en retenir un Tourbillon autour de soi, il deviendroit selon ce système un veritable Aiman. C'est aussi ce que M. Lemery prétend être arrivé à quelques morceaux rouillés d'une barre de fer qui étoit au Clocher de Chartres. Les acides de l'air, ou les acides étrangers logés dans les pores du metal en avoient dissous la partie huileuse de la superficie, la chaleur du Soleil avoit avec le tems enlevé & les dissolvants & ce qu'ils tenoient dissous, & la matiere magnetique qui circule autour du globe terrestre, avoit assés long-tems passé dans ce fer privé de son huile. Dans la pensée de M. Lemery le fils, le fer n'est pas changé en Aiman par la rouille, il est seulement disposé à ce changement, & il faut qu'ensuite il se déroille, c'est à dire que l'huile dissoute par l'acide se détache du fer. Quoique M. de la Hire, ainsi que nous l'avons rapporté dans l'Hist. de 1705 \* ait attribué le changement à la rouille, les deux opinions ne seront peut-être pas difficiles à concilier.

\* p. 7.

V. les M.  
158

D'un autre côté , M. Homberg a examiné le fer par le Verre ardent. Nous laissons entierement à son Memoire le détail des Experiences , qui ne peut ni ne doit être abrégé : à cause d'un trop grand nombre de petites circonstances délicates , & toutes importantes. Les principales conséquences qui naissent des observations de M. Homberg , sont :

1<sup>o</sup>. Que le fer a une certaine quantité de matiere huileuse superflue , qui se separe de la partie veritablement metallique , & cela confirme ce que nous avons dit ci-dessus , que ce Metal étoit mal digéré , & mal travaillé.

2<sup>o</sup>. Que cette matiere huileuse ou le souffre du fer , se joignant au Charbon , ou à quelque matiere de cette nature , est inflammable. Peut-être est-ce là un effet de l'union de ce souffre avec les acides du Charbon.

3<sup>o</sup>. Que le souffre du Cuivre est inflammable comme celui du fer , mais non-pas le souffre de l'Or ou de l'Etain , quoique l'Or , le Cuivre & l'Etain soient trois Metaux fort sulphureux. Il y a beaucoup d'apparence que sans le Miroir ardent on ne parviendroit pas à reconnoître les differences si fines entre les principes intimes de la composition des Metaux.

## SUR LA NATURE DU MIEL.

V. les M.  
P. 158.

ON ne croit plus , comme les Anciens , que le Miel soit formé de la Rosée qui est tombée sur les fleurs , & on ne le prend plus pour une production de l'air , & pour un present du Ciel. Les Abeilles ne le ramassent qu'après le lever du Soleil , & lorsqu'il n'y a plus de rosée , & il faut que ce qu'elles vont prendre sur les fleurs soit ou une liqueur qui s'y est preparée , & qui en sort par des vaisseaux particuliers , ainsi que la Manne sort du Frene de Calabre , ou plutôt la poussiere fine & déliée des *Etamines* des fleurs ; car , selon les observations que M. du Verney

en a faites autrefois , on ne voit les Abeilles s'attacher qu'à ces Etamines , & non aux endroits d'où il peut sortir quelque liqueur.

M. Lemery a examiné la nature du Miel par les analises Chimiques. Il en a pris de differents païs , de Narbonne , de Champagne , & de Normandie ; le Miel diminué en bonté selon l'ordre où ces lieux viennent d'être nommés , mais les analises sont peu differentes.

Les trois quarts de la substance du Miel s'en vont en liqueur par la distillation. De cette liqueur , qui change selon les degrés du feu , & la durée de l'operation , il y en a plus d'un quart qui n'est qu'une eau insipide au goût , & cependant acide en elle-même , puisqu'elle rougit le Tournesol , presque tout le reste est une eau sensiblement acide qu'on appelle Esprit de Miel ; il ne vient que fort peu d'Huile. Le quart de la substance du Miel qui demeure solide , est un charbon noir & léger , qui lorsqu'on le met tremper dans l'eau , y bouillonne comme de la Chaud. On en tire par la lixivation un peu de sel Alkali.

De tout ce qui sort du Miel , rien n'en conserve le goût , ni même un goût approchant , & il n'y a pas lieu d'en être surpris ; la saveur , ainsi que toutes les autres propriétés des Mixtes , dépend d'une certaine liaison des principes. M. Lemery croit que le *doux* vient d'un mélange intime d'un Acide avec un soufre ou une huile qui le tempere & le corrige. Il prouve cette pensée par l'exemple du sucre de Saturne , ainsi nommé pour sa douceur. C'est du Plomb , metal insipide de lui-même ; mais très-sultureux , dissous par un Acide. Il n'est pas toujours aisé à l'Art , ni de faire un mélange assez intimes des deux matieres qui composent le doux , ni d'en rencontrer precisément la dose.

M. Lemery a voulu éprouver si l'Esprit de miel rectifié dissout l'Or & d'autres Metaux , comme l'ont écrit plusieurs Chimistes. Il a trouvé que cet Esprit tiroit de l'Or une teinture jaunâtre , & du Cuiyre un peu d'odeur sans teinture , qu'il penetroit le fer , le Plomb & le Mercure , mais non pas l'Argent ni l'Etain.

## SUR LE FER DES PLANTES.

v les M.  
p. 412.

• p. 64. &  
65.

Les operations de M. Lemery sur le Miel rapportées dans l'Article precedent, lui ont fourni une Reponse à la Question que M. Geoffroy proposa dans l'Hist. de 1705 \*, *s'il peut y avoir des Cendres de Plantes sans fer ?* Nulle matiere tirée des Plantes ne paroît devoir être plus exempte de fer, que le Miel, qui n'est qu'un Extrait fort délicat des fleurs, travaillé encore dans les Visceres du petit corps de l'Abeille; cependant M. Lemery après avoir pris toutes les précautions possibles contre le fer, qui auroit pû survenir par accident, & se mêler dans ses operations, a trouvé dans le charbon noir qui est resté des distillations du miel, de petits grains que l'Aiman attiroit.

Il y a plus, M. Lemery le fils en a trouvé aussi dans le Castoreum, qui est une matiere animale.

Il faut donc, ou que quelqu'autre matiere que le fer puisse être attirée par l'Aiman, ou qu'il se forme du fer par la calcination qui fait les Cendres, ou qu'enfin il soit réellement contenu dans les Plantes, & même dans quelques parties d'Animaux. M. Lemery le fils tient pour le dernier parti.

Ces grains tirés des Plantes, & sur lesquels l'Aiman agit, se fondent au Miroir ardent précisément de la même maniere, & avec les mêmes circonstances que de la limaille de fer. Pourquoi donc ne seroient-ils pas de veritable fer ?

On doit présumer qu'ils en sont, si rien n'empêche de le croire, & c'est en suivant ce raisonnement que M. Lemery le fils répond à toutes les difficultés qu'on pourroit opposer. Quelques étroits que soient les tuyaux des Plantes, il prouve que le fer se peut diviser en assés petites parties pour y passer aisément. Quelque pesant qu'il soit, il peut s'y élever, étant dissous dans une liqueur. Il est incontestable que des parties de terre s'y élèvent.

Une recherche plus particulière sur la facilité du fer à s'élever, a produit à M. Lemery le fils une expérience curieuse. Sur une dissolution de limaille de fer par l'Esprit de Nitre, contenuë dans un Verre, il a versé de l'Huile de Tartre par défaillance; la liqueur s'est fort gonflée, quoiqu'avec une mediocre fermentation. & peu de temps après qu'elle a été reposée, il s'en est élevé des especes de branchages, attachés à la superficie du Verre, qui continuant toujours à s'étendre & à croître l'ont enfin entierement couverte, & se sont même répandus ensuite sur la superficie extérieure. La figure de branchages est si parfaite, qu'on y apperçoit jusqu'à des especes de feuilles & de fleurs, & cette vegetation de fer peut aussi legitime-ment être appelée *Arbre de Mars* qu'une vegetation de Mercure, quoique différente, a été appelée *Arbre de Diane*. Si la liqueur qui en montant se répand hors du verre sans se mettre en branchages, y est reversée, elle recommence bien-tôt à monter, & se durcit en rameaux, soit en tout ou en partie; de sorte qu'il n'y a qu'à reverser dans le Verre ce qui est demeuré liquide, & à la fin le tout se consume à la formation de l'Arbre. Il y a quelque tegere variété d'effet qui dépend de la dose de la dissolution du fer, & de l'Huile de Tartre.

L'extrême volatilité de cette liqueur ne peut être attribuée qu'au fer, puisque certainement l'Esprit de Nitre, & l'Huile de Tartre mêlés ensemble ne produiroient pas une semblable vegetation. Par-là, M. Lemery le fils n'a pas de peine à comprendre que du fer dissous dans la Terre par des Acides s'éleve jusqu'au haut des Plantes, & que peut-être il aide à l'élevation de la seve; il comprendroit même que la figure que le fer prend naturellement en s'élevant dans le Verre, peut contribuer à celle des Plantes où il est enfermé: & que c'est lui en partie qui leur fait jetter des branches; mais cette pensée est encore trop nouvelle, & même trop contraire à plusieurs apparences assez fortes, pour être proposée sans beaucoup de défiance. Il est bon qu'on en hazarde quelquefois de cette

espece , comme les Medecins hazardent des Remedes ; mais il faut à leur exemple y apporter les précautions nécessaires.

## SUR L'ANALISE DE DEUX PLANTES MARINES.

V. les M.  
P. 507.

**V**Oici un des premiers fruits de l'union de l'Academie des Sciences avec la Société Royale de Montpellier établie en 1706. par le Roi. M. Matte, l'un des membres de cette Société, ayant envoyé à M. Geoffroy, le détail de l'Analise qu'il avoit faite d'une espece de *Lithophyton*, ou Plante pierreuse née dans la Mer, M. Geoffroy fut surpris de ce qu'elle avoit donné autant de sel volatil urineux qu'auroit pû faire une matiere *animale*, quoiqu'il soit constant jusqu'ici par toutes les experiences des Chimistes, que les matieres vegetales, en donnent beaucoup moins. La curiosité de M. Geoffroy ayant été excitée par cette nouveauté, il fit l'Analise d'une Eponge de la moyenne espece, autre Plante marine, & il en tira autant de sel volatil que l'on en tire de la soye, celle de toutes les matieres animales qui en donne le plus. Les Chimistes sont persuadés que les Poissons en rendent ordinairement moins que les Animaux terrestres, mais en récompense voilà des Plantes de Mer, qui en ont plus que celles des la Terre.

## O B S E R V A T I O N

### C H I M I Q U E.

**M**onsieur Lemery ayant examiné par les épreuves Chimiques une Eau minerale qui est dans le Jardin de M. Billet au Fauxbourg S. Antoine, & qui commence



à avoir de la réputation, a trouvé qu'elle contenoit un sel nitreux, mêlé avec une terre entierement argilleuse, ou sulphureuse. Il ne croit pas cette terre entierement inutile pour la vertu de l'eau; car étant intimement unie avec le sel, comme elle l'est, elle fait une espece de savon doux, qui rend l'eau plus capable de fondre & de dissoudre les humeurs, que si elle ne contenoit que le sel.

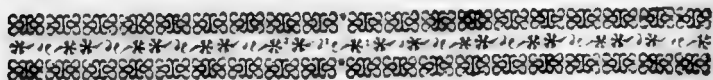
---

**N**ous renvoyons entierement aux Memoires la suite des Essais de Chimie de M. Homberg.

V. les M.  
p. 269.

---

**C**ette année M. Lemery publia son *Traité de l'Antimoine*, annoncé dans le premier Volume de nos Histoires, & depuis dans tous les autres jusqu'à celui-ci. Comme l'Antimoine est un des principaux objets de la curiosité des Chimistes, & ce qui est encore plus important, l'un des plus grands Remedes de la Medecine moderne, M. Lemery a jugé à propos de l'examiner à fond, & d'y épuiser tout l'art de la Chimie. Les Dissolutions, les Sublimations, les Distillations, & les Calcinations de ce Mineral, combiné avec toutes les matieres dont on a pû esperer quelque effet, divisent tout l'Ouvrage en quatre parties. M. Lemery n'a pas négligé même de rapporter les operations qui n'ont pas réussi, pour en épargner la peine à d'autres Chimistes, & prévenir des desseins inutiles, ou du moins, pour faire voir en quelles circonstances elles ne réussissent pas. L'exactitude & la sincerité, si rares jusqu'à present en Chimie, doivent relever le prix de cet Ouvrage.



## BOTANIQUE.

**M**onsieur Marchand continuant des Descriptions de Plantes qui doivent composer un ouvrage particulier, à lû celles de la *Persicaria maculosa*, & non *maculosa*, du *Hyoscyamus Syriacus*, du *Buphtalmum Dioscoridis*, & de l'*Iris Persica variegata praeox*.

**M**onsieur Tournefort a lû aussi les Descriptions de la *Vitis Idæa*, & de la *Thymelæa Pontica*, qui sont réservées pour la Relation de son voyage de Levant.

V. les M.  
P. 83.

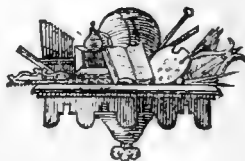
**N**ous renvoyons aux Memoires De nouveaux Genres de Plantes, que M. Tournefort joint à ceux qu'il a déjà donnés l'année précédente.

V. les M.  
P. 87

La suite de la Description des Plantes d'Auvergne, commencée en 1705, par M. Chomel.

V. les M.  
P. 333.

Les Experiences que M. Marchand a faites sur la vertu de la Racine de la Grande Valeriane sauvage pour l'Epileptic.



# A L G E B R E.

## S U R U N E M E T H O D E

### G E N E R A L E P O U R L A

### R E S O L U T I O N D E S E Q U A T I O N S.

**I**L est aisé des'appercevoir que l'Algebre est encore assés imparfaite. Nous avons déjà dit dans l'Hist. de 1705 \* qu'il n'y a de formule absolument générale que pour les Equations du second degré, que la formule de celles du troisiéme tombe souvent dans le cas irreductible, & par consequent, quoique générale en apparence, cesse de l'être, que le quatriéme degré, qu'il faut abaisser au troisiéme, en a les inconveniens, & qu'enfin hors du quatriéme il n'y a plus de formule. Mais on peut encore faire d'autres réflexions sur les défauts de l'Algebre.

V. les M  
P. 296.  
P. 32. &  
83.

Dans une Equation du second degré, dès que les nombres qui y entrent avec la lettre inconnue sont un peu grands, la formule engage à un long & ennuyeux calcul.

C'est encore beaucoup pis dans le troisiéme degré. Il faut former des quarrés & des cubes, tirer ensuite plusieurs racines quarrées & cubiques, &c. Il y a telle Equation, & du nombre de celles qu'on peut fort naturellement rencontrer dans des recherches geometriques, qui demanderoit des journées entières de calcul.

Dans ce même degré, l'application de la formule générale à des cas particuliers ne donnent souvent pour valeurs de l'inconnue que des grandeurs irrationnelles, quoique ces mêmes valeurs soient effectivement rationnelles. La raison en est que des grandeurs irrationnelles combi-

nées ensemble de différentes manieres peuvent être égales à quelque grandeur rationnelle, & par conséquent la même grandeur peut paroître sous deux formes, ou sous sa forme rationnelle, qui est la plus naturelle, & la seule que l'esprit puisse saisir nettement, ou sous la forme irrationnelle, qui la rend très-difficile à reconnoître, & presque intelligible, jusqu'à ce qu'elle soit reconnuë. Or telle est la formule du troisieme degré qu'elle donne le plus souvent une valeur rationnelle sous une forme irrationnelle, & après que la résolution de l'Equation n'a produit que cette valeur rationnelle ainsi déguisée, c'est un nouveau travail que de la démêler de dessous les envelopes qui la couvroient.

Il y a encore plus. La même raison qui fait qu'une grandeur rationnelle peut paroître sous une forme irrationnelle, fait aussi qu'une grandeur *réelle* peut paroître sous une forme *imaginaire*, c'est à dire, être exprimée par certaines combinaisons de grandeurs imaginaires. Or toute grandeur imaginaire renfermant essentiellement une contradiction, elle est absolument intelligible à l'esprit, ce que ne sont pas les grandeurs irrationnelles, dont on a du moins une idée confuse & obscure; toute grandeur de cette espece est purement chimerique, & même quand le réel est combiné & mêlé avec l'imaginaire, de quelque maniere qu'il le soit, il en est, pour ainsi dire, souillé à tel point qu'il devient pareillement imaginaire. La formule du troisieme degré donne souvent sous une forme imaginaire une grandeur qui ne laisse pas d'être véritablement réelle, & alors c'est le cas qu'on appelle *irréductible*, parceque le calcul est entierement arrêté, & que l'on n'a jusqu'ici ni aucune autre formule, ni aucun moyen de démêler le réel que cette formule couvre d'une apparence imaginaire. On peut observer ici en passant que Tartalea, Auteur Italien du seizieme Siècle, & l'un des premiers qui ait travaillé à l'Algebre, a inventé la formule du troisieme degré, & que le noeud qui l'arrêta dans le cas irréductible n'a point encore été dénoué depuis lui.

On ſçait affés qu'en fait de Methodes il y a un certain fil ou une certaine veine à prendre, qu'il faut avoir l'addreſſe ou le bonheur de la rencontrer, & qu'autrement une matiere qui auroit pû être facile eſt toute heriſſée de difficultés ou d'inconveniens. Sur ce fondement, on peut ſouſçonner que les principes de la réſolution de Equations n'ont pas été trop heureuſement trouvés, & qu'il y en a d'autres plus naturels. Quoiqu'il en ſoit, M. de Lagni en propoſe de nouveaux, dont il avoit déjà donné quelque idée \*. Nous en rapporterons ici ce qu'ils contiennent de plus facile & de plus neceſſaire pour l'intelligence du tout.

\*V. l'Hift.  
O.  
82. & ſuiv.

Une Equation du ſecond degré étant propoſée, ou une Equation du troiſième dont le ſecond terme eſt évanoui, ce qui eſt toujours aisé, elle a trois termes, l'un qui eſt le quarré ou le cube de l'inconnuë, l'autre le produit de cette même inconnuë par un nombre donné (on appelle ce nombre *le Coefficient*) enfin le troiſième qui eſt l'homogene de comparaifon. Si dans le ſecond degré de quarré de l'inconnuë, plus 2 fois ſon produit, par exemple, eſt égal à un grand nombre ou homogene de comparaifon, comme 100, il eſt aisé de voir d'un premier coup d'œil que le quarré de l'inconnuë ne doit guere differer de 100, puis-que pour égaler 100 il ne lui faut qu'un auſſi petit ſecours que le produit de cette même inconnuë par 2. Si donc on neglige ce produit qui eſt le ſecond terme, & qu'on égale ſimplement le quarré de l'inconnuë à 100, on trouve l'inconnuë égale à 10, nombre, à la verité, un peu trop grand, ce qu'on voit en remettant 10 au lieu de l'inconnuë dans l'Equation, mais auſſi 9 ſeroit trop petit, & delà on conclut neceſſairement que l'inconnuë eſt un nombre irrationnel entre 9 & 10, mais plus près de 9 que de 10, parce qu'en ſuppoſant 9 pour l'inconnuë on approche plus de l'Equation donnée qu'en ſuppoſant 10. Dans cet exemple, après qu'on a égalé immédiatement le quarré de l'inconnuë à 100, il vaut mieux ne conclure l'inconnuë qu'égale à 9, & non-pas à 10, car par ce moyen on tient com-

pte de ce qu'on a negligé le second terme.

Il paroît donc que quand l'homogene est le terme *dominant*, ainsi que l'appelle M. de Lagni, c'est à dire, lorsque c'est un grand nombre par rapport au coëfficient, on peut negliger le second terme, sauf à y avoir égard d'ailleurs, & par là tout l'embarras de l'Equation est ôté, puisque l'inconnuë n'y monte plus à differens degrés.

Ce sera la même chose en un sens contraire si le coëfficient est le terme dominant par rapport à l'homogene. Il faudra negliger le quarré de l'inconnuë, qui sera necessairement fort petit. Ainsi si le quarré de l'inconnuë plus le produit de cette même inconnuë par 144 est égal à 12, on voit que le quarré de l'inconnuë étant negligé, elle seroit égale à  $\frac{11}{12}$ , que  $\frac{1}{12}$  est une trop grande valeur, parcequ'enfin le quarré negligé, quoique fort petit, est quelque chose, que  $\frac{1}{12}$  seroit aussi une trop petite valeur, & par conséquent que celle qu'on cherche est une fraction irrationnelle entre  $\frac{1}{12}$  &  $\frac{1}{11}$ ; car, comme nous l'avons dit dans  
 \* 86 & 86 l'Hist. de 1705 \*, quand la haute puissance de l'Equation n'a point de coëfficient, ou de nombre qui la multiplie, si la racine est une fraction, ce ne peut être qu'une fraction irrationnelle.

Tout cela s'applique de soi-même aux Equations du troisieme degré.

Pour juger lequel est le terme dominant, ou du coëfficient, ou de l'homogene, il ne suffit pas de voir lequel est le plus grand en lui-même, il faut voir lequel est le plus grand en son espece. Dans une équation du second degré, où par conséquent tous les termes sont des plans, l'homogene est un plan numerique, & le coëfficient n'est qu'un nombre lineaire, qui multipliant l'inconnuë fait un plan. Il faut donc, si l'homogene domine, qu'il soit plus grand comme nombre plan, que le coëfficient ne l'est comme nombre lineaire. Un nombre plan doit naturellement être conçu comme coupé en tranches de deux en deux chiffres, un nombre solide de trois en trois, au lieu qu'un nombre lineaire a autant de tranches que de chif-

fres ; & par conséquent l'homogene ne peut dominer qu'il n'ait non seulement plus de chiffres , mais plus de tranches que le coefficient, & par la même raison le coefficient pourroit dominer, quoiqu'il eût moins de chiffres que l'homogene. Ce sera la même chose dans le troisième degré , l'homogene étant coupé de trois en trois.

Si l'arrive que ni le coefficient ni l'homogene ne dominent l'un sur l'autre , on a les regles ordinaires. Cependant M. de Lagni ne laisse pas de rappeler encore ce cas-là à sa methode.

Lorsqu'une des racines ou valeurs de l'Equation est trouvée , M. de Lagni donne une regle pour regler l'autre.

Nous ne le suivrons pas dans l'application qu'il fait de ses principes au cas irreductible , qui a été jusqu'ici l'écueil de l'Algebre. On verra toute cette matiere tournée d'un autre côté que celui par où elle étoit envisagée , & sans doute l'esperance de dompter le cas irreductible , inutilement attaqué depuis si long tems , ne pouvoit être permise , à moins que l'on ne prit une maniere toute nouvelle de l'attaquer.

---

## GEOMETRIE.

---

### SUR LES GRANDEURS.

#### QU'ON NOMME PLUS QU'INFINIES.

**L**orsqu'une Grandeur est exprimée par une fraction , V. les M. P. 13.  
 dont je suppose pour plus de facilité que le Numérateur soit constant ; si le Dénominateur a deux termes

dont le second soit variable, & en même tems retranché du premier, il peut arriver trois cas differens. Ou ce second terme du Dénominateur sera plus petit que le premier, comme il doit l'être naturellement, puisqu'il en est retranché, ou lui sera égal, ou il sera plus grand. Dans le premier cas, le Dénominateur sera positif & fini, & la Grandeur exprimée par la fraction sera pareillement finie; dans le second cas, le Dénominateur sera Zero, ou plutôt infiniment petit; & comme un Diviseur infiniment petit d'une Grandeur si ie quelconque doit donner un Quotient infiniment grand, la Grandeur exprimée par la fraction sera infiniment grande, puisqu'elle est le Quotient de la fraction, ou, ce qui est le même, de la division proposée. Dans le troisième cas, le Dénominateur est négatif & fini; mais si on conçoit les Grandeurs negatives comme moindres que Zero, ce Dénominateur ou Diviseur plus petit que Zero, doit donner un Quotient plus grand que celui qu'a donné le Diviseur égal à Zero, & par conséquent la Grandeur exprimée par la fraction sera *plus qu'infinie*. La variation de son Dénominateur l'aura donc fait passer successivement par ces trois états ou ordres differents, fini, infini, plus qu'infini.

Je les appelle ordres differents pour mieux déterminer l'idée qu'il en faut prendre. Car ce qu'on nomme ici plus qu'infini, ce n'est pas une grandeur infinie plus grande qu'une autre infinie; les grandeurs infinies peuvent être plus grandes ou plus petites les unes que les autres, selon tous les rapports possibles des nombres, & cela sans sortir de l'ordre de l'infini, de même que les grandeurs finies ne sortent pas de l'ordre du fini pour varier entr'elles selon tous ces rapports. Mais ce qu'on entend par des grandeurs plus qu'infinies, ce sont des grandeurs qui étant sorties de l'ordre de l'infini doivent s'élever à un ordre supérieur, comme font les grandeurs finies lorsqu'elles passent à l'ordre infini.

La nature de l'Hyperbole ordinaire considérée par rapport à ses Asymptotes, consiste en ce que le produit d'une Ordonnée



Ordonnée quelconque & de son Abscisse, est toujours égal au quarré d'une grandeur constante. L'essence de cette équation, & ce qui la caractérise particulièrement, est d'avoir d'un côté un produit de deux grandeurs indéterminées & variables, & de l'autre une puissance de la grandeur constante seule, & si l'on imagine que le quarré de l'une des deux grandeurs variables multiplié par l'autre soit égal au cube de la grandeur constante, on aura une équation du même genre, & par conséquent une Hiperbole, mais une Hiperbole d'un degré plus élevé que l'Hiperbole commune. Il est visible qu'on peut pousser cette idée si loin qu'on voudra, & avoir une infinité d'Hiperboles de différens degrés.

On sait que l'espace compris entre l'Hiperbole ordinaire & ses Asimptotes, quoiqu'il aille toujours en décroissant, s'étend à l'infini, & de plus est infini, c'est à dire plus grand que tout espace fini & déterminable, car ces deux choses sont différentes, & un espace toujours décroissant qui s'étendrait à l'infini, pourroit n'être que fini, ou ce qui est le même, égal à un espace fini. C'est ainsi que la somme de tous les termes de la progression harmonique décroissante à l'infini,  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots$  &c. est infinie, & que la somme de toute progression géométrique infinie décroissante, telle que  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$  &c. n'est que finie.

M. Wallis considerant l'Hiperbole ordinaire entre ses Asimptotes, & d'autres Hiperboles d'un degré plus élevé posées entre les mêmes Asimptotes, qui leur peuvent être communes, paroît avoir conçu trois especes d'Hiperboles, dont l'une avoit son espace asimptotique fini, la seconde infini, la troisième plus qu'infini, ou s'il n'en a conçu que deux especes, il a crû que, hors l'Hiperbole ordinaire, elles avoient toutes une partie de leur espace asimptotique finie, & l'autre plus qu'infinie.

Mais M. Varignon, tout accoutumé qu'il est aux merveilles de l'infini, refuse celle-là. Il examine les Hiperboles de M. Wallis, & en tire les conclusions suivantes.

Une Hiperbole cubique, si l'on veut, ayant le même

sommet & les mêmes Asymptotes que l'Hiperbole ordinaire, s'approche toujours plus qu'elle d'une de ces Asymptotes, & s'éloigne davantage de l'autre. Du côté de l'Asymptote dont elle s'approche davantage, son espace asymptotique n'est pas infini comme celui de l'Hiperbole ordinaire, mais fini quoiqu'infiniment étendu; du côté de l'autre Asymptote, son espace asymptotique est infini, aussi-bien que celui de l'Hiperbole ordinaire, & il est plus grand. En général toutes les Hiperboles, excepté l'Hiperbole ordinaire, ont leur espace asymptotique fini d'un côté, & infini de l'autre, & M. Wallis ayant trouvé pour la partie infinie de cet espace une expression positive, pour l'autre une expression negative, a crû que cette seconde expression donnoit une quantité plus qu'infinie, au lieu qu'elle ne représentoit précisément que la partie finie de l'espace, prise du côté opposé à la partie infinie.

C'est-là tout l'effet du signe *moins* dans les grandeurs negatives. Il renverse leur position, & la rend contraire à celle des grandeurs positives. Du reste les unes & les autres sont également finies. Il faudroit pour le plus qu'infini de M. Wallis que les grandeurs negatives fussent au-dessous de Zero, & moindres que rien, mais c'est-là une idée absolument incompréhensible. Il est fort naturel au contraire de concevoir qu'après qu'un dénominateur infiniment petit a rendu infinie une fraction telle que nous l'avons supposée d'abord, un dénominateur negatif la fait redevenir finie, mais contraire à ce qu'elle étoit auparavant, c'est-à-dire que si, par exemple, elle exprime une ligne ou un espace, cette ligne ou cet espace ont une position contraire à celles qu'ils avoient.

C'est ainsi qu'il faut entendre ce que M. Carré a fait voir pag. 20 dans son Livre du Calcul Integral, que l'Hist. de 1700 \* annonça. Il y démontre que tous les espaces asymptotiques sont ou finis, ou infinis, ou plus qu'infinis. Or nous savons presentement que le plus qu'infini n'est que fini, & même M. Carré en se servant du terme de plus qu'infini eut soin d'avertir qu'il n'employoit cette

\* p. 100.  
& suiv.

expression que parcequ'elle étoit devenuë commune, & promet qu'il y auroit quelque jour sur cette matiere un éclaircissement, qui est celui que M. Varignon vient de donner.

## S U R L A M E T H O D E

### DES INFINIMENT PETITS

*Pour les Maxima & Minima.*

**L**E Livre de l'Analise des Infiniment petits a été fait V. l. A. P. 24.  
d'une maniere si sçavante & si sublime qu'on y peut  
souvent desirer des éclaircissements, mais aussi c'est tout  
ce qu'on y peut desirer, & les Réponses qu'on a faites aux  
differentes Objections proposées contre les Methodes de  
ce Livre, n'ont jamais été que des éclaircissements, qui en  
ont confirmé les Principes.

Il est visible que la Tangente quelconque d'une Courbe est l'hipotenuse d'un triangle rectangle dont les deux autres côtés sont la Soûtangente, & l'Appliquée menée à la Courbe par le point où la Tangente la touche. On suppose cette Appliquée perpendiculaire à l'axe. Tout ce qu'on cherche en cherchant une Tangente, ne peut être que sa grandeur, & l'angle qu'elle fait sur l'axe de la Courbe, & l'un & l'autre dépend du rapport qu'ont entre eux les deux autres côtés du triangle dont elle est l'hipotenuse. Si l'Appliquée & la Soûtangente sont égales, la Tangente est la racine du double du carré de l'une des deux, & elle fait avec l'axe un angle de 45 degrés. Plus la Soûtangente est grande par rapport à l'Appliquée, plus la Tangente est longue, & plus elle s'incline à l'axe, de sorte qu'à la fin elle lui devient infiniment inclinée, ou, ce qui est la même chose, parallele, & en même temps infinie, lorsque la Soûtangente est infinie par rapport à l'Appliquée. Au contraire, si la Soûtangente est nulle par rap-

port à l'Appliquée, la Tangente n'est qu'égale à l'Appliquée, & elle est infiniment peu inclinée à l'axe, ou, ce qui est le même, perpendiculaire. Si l'on avoit donc pour tous les points d'une Courbe quelconque le rapport de la Soutangente & de l'Appliquée, on auroit routes les Tangentes des Courbes en général.

Par la Geometrie des Infiniment petits, on trouve que l'infiniment petit de l'Appliquée quelconque d'une Courbe est à l'infiniment petit de l'Abcisse qui lui répond, comme l'Appliquée est à la Soutangente; voilà donc ce rapport que l'on cherchoit, découvert par les principes qui sont particuliers à cette Géometrie, il n'y a plus qu'à tirer de l'Equation d'une Courbe quelconque ces deux infiniment petits, & à considerer comment ils sont entre eux. Quand ils sont égaux, la Tangente est inclinée de 45 degrés à l'axe, & l'on trouve, par exemple dans l'Hyperbole équilaterre qu'ils ne peuvent jamais être égaux, que quand cette Courbe s'est étendue à l'infini, d'où il suit que la Tangente qu'elle a, a cette extrémité infiniment éloignée du sommet, ou, ce qui est la même chose, son Asymptote est inclinée à l'axe de 45 degrés. Afin qu'une Tangente soit parallele ou perpendiculaire à l'axe, ou, ce qui est le même, parallele à l'un des deux axes conjugués, il faut que l'un des deux infiniment petits soit nul par rapport à l'autre, ce qui est une suite de ce que nous avons dit sur l'Appliquée & la Soutangente.

Toutes les fois que la Tangente est parallele à l'un des deux axes conjugués, l'Appliquée qui lui répond est ou la plus grande ou la plus petite des Appliquées qui la précèdent & qui la suivent, du moins dans une certaine étendue de la Courbe. C'est ce qu'on appelle en Geometrie des *Maxima* & *Minima*. Pour déterminer les points où il s'en trouve dans quelque Courbe que ce soit, M. de l'Hôpital a avancé que dans ces points-là l'un des deux infiniment petits devenoit nul par rapport à l'autre, ou, ce qui est la même chose, que leur rapport étoit nul ou infini,

Ce rapport est toujours exprimé par une fraction, dont par conséquent ou le numérateur ou le dénominateur devenu nul détermine les plus grandes ou les plus petites Appliquées. C'est-là la règle de M. de l'Hôpital, il l'a donnée pour générale, & ne l'a appliquée qu'à un petit nombre d'exemples assez simples. D'autres exemples auxquels on l'a appliquée depuis ont fait naître des difficultés que le Livre de M. de l'Hôpital n'a pas indiquées expressément, & M. Guisnée a entrepris de les lever toutes ensemble. Par-là non-seulement il conserve à la Règle son universalité, mais il la met dans un plus grand jour, & la rend plus incontestable. Voici le précis de ses réflexions.

1°. On ne sçait si l'Appliquée que la Règle détermine est *un plus grand*, ou *un plus petit*. Cela ne se peut connoître qu'en decrivant la Courbe, ou en examinant la valeur d'une Appliquée prise arbitrairement avant ou après celle qu'on a trouvée.

2°. Si le numérateur de la fraction qui exprime le rapport des deux infiniment petits, étant supposé nul, ou égalé à Zero, la nouvelle équation qui en résulte a plusieurs racines réelles, il y aura autant de points de la Courbe qui donneront des plus grands, ou des plus petits, ce qui est évidemment possible, car une Courbe peut s'écarter de son axe jusqu'à un certain point, ensuite s'en rapprocher, après cela recommencer à s'en écarter, &c.

3°. Ce sera la même chose si le dénominateur étant égalé à Zero, l'équation a plusieurs racines réelles.

4°. M. de l'Hôpital n'a cherché dans tous les exemples qu'il apporte que des grands ou plus petits finis, & ce sont en effet les seuls dont il soit question ordinairement; Mais si l'on veut compter pour plus grands ou plus petits ceux qui seront infiniment petits, ou infiniment grands, la Règle les comprend aussi. Dans la Parabole, par exemple, le rapport de l'infiniment petit de l'Ordonnée à l'infiniment petit de l'Abscisse est le même que celui du Paramètre au double de l'Ordonnée, d'où il suit que l'un

des infiniment petits ne peut être nul par rapport à l'autre, si le Parametre n'est nul par rapport au double de l'Ordonnée, ou si le double de l'Ordonnée n'est nul par rapport en Parametre. Or le Parametre qui est toujours une ligne finie & constante ne peut être nul par rapport au double de l'Ordonnée, si l'Ordonnée n'est devenue infiniment grande, ce qui ne peut arriver à moins que la Parabole qui s'écarte toujours de son axe ne s'en soit écartée à l'infini, & par conséquent ne se soit étendue à l'infini. De même le double de l'Ordonnée ne peut être nul par rapport au Parametre, à moins que l'Ordonnée ne soit nulle, ce qui n'arrive qu'au point où la Parabole rencontre son axe; c'est-à-dire enfin que cette Courbe a une Appliquée infiniment petite à son sommet, & une autre infiniment grande à son extrémité infiniment éloignée du sommet, mais qu'elle n'a nulle Appliquée finie plus grande ou plus petite que celles qui la précèdent & la suivent. Comme l'infiniment petit de l'Ordonnée devenu nul par rapport à celui de l'Abscisse donne une Tangente parallèle, & que celui de l'Abscisse devenu nul par rapport à l'autre donne une Tangente perpendiculaire, il s'ensuit qu'au sommet de la Parabole où son Ordonnée est infiniment petite, la Tangente est perpendiculaire, & qu'à l'extrémité de cette Courbe où l'Ordonnée seroit infiniment grande, la Tangente seroit parallèle.

5°. Si le numerateur & le dénominateur sont tels qu'ils puissent l'un & l'autre devenir nuls, & que les deux équations qui en résulteront déterminent différents points de la Courbe, elle aura dans tous ces points, en quelque nombre qu'ils soient, des plus grands ou des plus petits, les uns qui repondront à des Tangentes parallèles, & ce seront ceux que le numerateur aura donnés, les autres qui repondront à des Tangentes perpendiculaires, & ce seront ceux qu'aura donnés le dénominateur.

6°. Mais si le numerateur & le dénominateur étant égaux à Zero, les deux équations déterminent le même point de la Courbe, M. Guisnée fait voir qu'alors la Courbe a

deux *rameaux* qui se coupent en ce point-là, & que chacun y est oblique à l'axe commun. Cette obliquité suit nécessairement du Système des Infiniment petits. Car toutes les fois que les deux infiniment petits de l'Ordonnée & de l'Abscisse ont un rapport fini l'un à l'autre, ils déterminent dans la Courbe au point qui leur répond une position oblique à l'égard de l'axe. Or deux grandeurs ont toujours entr'elles un rapport fini tant qu'elles sont toutes deux du même genre, c'est à dire, ou infinies, ou finies, ou infiniment petites du premier genre, ou infiniment petites du second, &c. Donc les deux infiniment petits dont il s'agit qui étoient du premier genre étant devenus tous deux infiniment petits du second en même tems, ou à l'égard du même point de la Courbe, ont encore entr'eux un rapport fini, & par conséquent déterminent une portion oblique de la Courbe sur l'axe en ce point-là. Donc ce cas ne doit point être compris dans la Règle des plus grands ou plus petits, & en effet l'Ordonnée qui répond à l'intersection des deux rameaux, appartenant en même tems à tous les deux, n'est un plus grand ou un plus petit ni pour l'un ni pour l'autre ; mais ce même cas doit être compris, & il l'est aussi, dans la Règle des Tangentes, qui doit donner toutes les positions de la Courbe à l'égard de l'axe en quelque point que ce soit. C'est-là le cas qui a pu faire le plus de difficulté sur les deux Règles en même tems, jusqu'à ce que l'on ait vû avec autant d'évidence qu'on le voit aujourd'hui, à laquelle des deux il se rapporte, & combien il entre naturellement, & nécessairement dans le Système général.

Voilà quels sont les principaux éclaircissements que M. Guisnée donne sur la Règle des plus grands & plus petits, & il semble que tous les cas ayant été prévûs par la méthode des combinaisons, il ne puisse plus survenir aucune difficulté nouvelle ; car on ne peut pas compter pour des difficultés qui appartiendroient à la Geometrie de l'Infini, des embarras de calcul qui naîtroient de l'Algebre ordinaire, qu'il y faut nécessairement appliquer.

## SUR LE RAPPORT DES

## FORCES CENTRALES.

## A LA PESANTEUR DES CORPS.

V. les M.  
p. 178.  
p. 84. &  
suiv.  
p. 80.  
\*\*\* p. 73.  
\*\*\* p. 12.

**L**Es Histoires de 1700\*, 1701\*\*, 1703\*\*\*, 1705\*\*\*, ont exposé toute la Theorie de M. Varignon sur les Forces centrales, non seulement selon différentes vûes & differens tours Geometriques, mais encore selon toutes les hypotheses Phisiques, qui peuvent être employées à expliquer la Nature, ou même imaginées à plaire. Mais cette Theorie si vaste ne roule que sur différentes forces centrales comparées entre elles, ou, ce qui revient au même, sur les rapports d'une même force contrale agissant inégalement en differens instans, & c'est à cet égard que le sujet est *épuisé*, ainsi que nous l'avons dit dans l'Hist. de 1703. & repeté dans celle de 1705. Il reste à sçavoir quelles sont absolument & en elles-mêmes. ces forces dont on connoît les rapports, il reste à les pouvoir évaluer en livres, & pour cela, il faut les comparer à la pesanteur des Corps, que l'on suppose toujours connue de cette maniere. Après cette comparaison faite, le sujet est épuisé à tous égards.

Tout mouvement en ligne Courbe, par exemple, le mouvement elliptique d'une Planete autour du Soleil, peut être conçu comme composé de deux mouvemens plus simples, ou, ce qui revient au même, produit par deux causes. L'une imprime à la Planete un mouvement selon une ligne droite indéfinie, qui traverseroit le Tourbillon, comme une corde traverse un Cercle, & par conséquent s'éloigneroit toujours du Soleil depuis un certain point; l'autre cause qu'on peut imaginer comme inhérente au Soleil retire la Planete vers ce centre ou foyée, & agit par une ligne droite qui fait avec la premiere un angle queleconque. Il n'importe que cette seconde cause soit



soit dans le Soleil même , ou que ce soit la matiere du Tourbillon qui repousse la Planette vers cet Astre , l'effet ne change point, & quoique la premiere idée soit la moins conforme à la Phisique , nous la préfererons , parce que l'imagination la saisit mieux.

La premiere des deux causes, d'où naît la composition, est la tendance naturelle & générale de tous les Corps à se mouvoir en ligne droite, dès qu'ils se meuvent ; la seconde est la force centrale qui tire les Planetes vers le Soleil. Par consequent la Planete à chaque instant infiniment petit de son cours tend en vertu de la premiere cause à décrire une certaine ligne droite infiniment petite , mais elle est en même tems tirée vers le Soleil par la force centrale qui agit selon une autre ligne droite ; & n'agit dans cet instant que d'une quantité infiniment petite , & par consequent le mouvement instantané de la Planete est une Diagonale entre ces deux lignes droites infiniment petites. Et comme les deux causes qui font le mouvement composé agissent perpetuellement , & que la Planete qui en vertu de la premiere cause tend à continuer en ligne droite le mouvement du premier instant , en est détournée dans le second par la force centrale , il s'ensuit que les deux Diagonales infiniment petites de ces deux instants , & par la même raison celles de tous les autres , ne sont point posées bout à bout en ligne droite , & par conséquent forment une Courbe.

C'est la force centrale qui à chaque instant détourne le Corps de la ligne droite qu'il tendoit à décrire , & c'est uniquement à elle qu'il faut rapporter la description de la Courbe ; elle est donc d'autant plus grande & plus puissante que le Corps est plus difficile à détourner de la ligne droite , & qu'elle l'en détourne davantage , & cela à chaque instant qu'elle agit. Il est impossible d'imaginer d'autres principes d'où dépende la grandeur de la force centrale. Examinons-les tous deux.

1°. Un Corps est plus ou moins difficile à détourner de la ligne droite , soit par lui-même , soit par la direction

de son mouvement. Plus la quantité de mouvement d'un corps est grande , plus il est difficile de lui imprimer un mouvement différent , cela est clair. Or la quantité de mouvement d'un corps est le produit de sa masse ou pesanteur par sa vitesse , & par conséquent plus un corps est pesant & se meut vite , plus il est difficile à détourner de la ligne droite , & cela , *par lui-même*. Mais il faut encore considérer , que moins la direction de la force qui le détourne est contraire à la direction par laquelle il tend à se mouvoir en ligne droite , moins elle a de pouvoir pour l'en détourner , & pour lui faire décrire un arc de Courbe , ou , ce qui est la même chose , moins elle agit avantageusement , & par conséquent il faut qu'elle soit en elle-même d'autant plus grande. Car que l'on imagine la force centrale agissant par la même ligne droite que le corps tend à décrire , il est clair qu'elle n'a alors nul pouvoir pour lui faire décrire une Courbe , & que tout son effet est ou de hâter le mouvement du corps , si elle tire dans le même sens dont il se meut , ou , si c'est le contraire , de le retarder , & même de l'arrêter. Ce n'est donc que quand sa direction est entre ces deux termes opposés qu'elle peut détourner le Corps de sa ligne droite , & moins sa direction est éloignée de l'un ou de l'autre de ces termes , moins elle agit avantageusement pour faire décrire la Courbe. Delà il suit aussi que cette direction n'étant jamais plus éloignée des deux termes ensemble , que quand elle est perpendiculaire à la ligne droite par laquelle le corps tend naturellement à se mouvoir , c'est alors que la force centrale a le plus d'avantage.

3°. La Courbe que le Corps décrit étant supposée , il est manifeste que la force centrale est d'autant plus grande , que le corps doit être plus détourné de la ligne droite pour être ramené sur la circonférence de cette Courbe , au point que l'on considère alors.

En rassemblant tous les principes selon lesquels la force centrale augmente ou diminue à chaque instant , on trouve la pesanteur du corps , sa vitesse , la direction de la force

centrale comparée à la ligne droite par laquelle le corps tend à se mouvoir, la grandeur de l'écart que cette force fait faire au corps pour le remettre sur la Courbe. Il doit donc y avoir une Equation algebrique de la Force centrale, & de ces 4 principes dont elle dépend, & comme la pesanteur en est un, on aura par là le rapport de la force centrale à la pesanteur.

Mais pour avoir cette Equation, il faut que les idées metaphisiques que nous venons d'exposer soient exprimées geometriquement, & algebriquement. Il est bon qu'une Metaphisique générale précède le calcul qui le dirige, & l'éclaire, mais ensuite c'est le calcul qui donne la précision & les détails.

La pesanteur ne s'exprime que par elle-même. C'est une force qu'on suppose connue, & toujours constante.

La vitesse d'un corps à un point quelconque de la Courbe qu'il décrit, s'exprime par la grandeur d'une ligne verticale d'où il auroit dû tomber, pour acquérir selon le Système ordinaire de l'acceleration une vitesse égale à celle qu'il a au point que l'on considère.

La ligne droite par laquelle le corps tend à continuer de se mouvoir à chaque instant, est la Tangente du point de la Courbe où il se trouve alors, & cette Tangente, selon la Geometrie des Infiniment petits, est l'arc infiniment petit de la Courbe décrit dans cet instant. Du centre où se rapporte la force centrale, & d'où nous supposons qu'elle agit, on tire aux deux extrémités de cet arc deux lignes droites ou *rayons*, ensuite un arc circulaire infiniment petit décrit de ce même centre détermine la difference infiniment petite de ces deux rayons & par là se forme un triangle rectangle dont l'hipoténuse est le petit arc de la Courbe, & les deux autres côtés, l'arc circulaire, & la difference des deux rayons. Cette difference est la direction par laquelle la force centrale agit alors, & l'arc de la Courbe est la direction selon laquelle le corps tend à continuer de se mouvoir en ligne droite dans l'instant suivant. Donc les deux directions sont d'autant

moins contraires que ces deux lignes infiniment petites qui les représentent sont moins éloignées de concourir & de se confondre ensemble, & il est aisé de voir qu'elles le sont d'autant moins que l'arc de la Courbe est plus grand par rapport à l'arc circulaire qui détermine la différence des rayons, de sorte que si cet arc circulaire devient nul, les deux directions ne sont plus que la même. Donc le rapport de la direction de la force centrale à celle selon laquelle le corps tend à continuer de se mouvoir en ligne droite, s'exprime par le rapport du petit arc de la Courbe à cet arc circulaire.

Enfin l'écart que la force centrale fait faire au corps pour le remettre ou le tenir sur la circonférence de la Courbe, est d'autant plus grand que la Courbe en ce point là est plus courbe. Or, comme nous l'avons expliqué dans l'Histoire de 1704 \*, une Courbe est d'autant plus courbe à un point quelconque que le rayon de sa Développée est alors plus petit, & par conséquent plus le rayon de la Développée est petit au point de la Courbe que l'on considère, plus la force centrale doit être grande à ce point-là.

Il est manifeste que de ces 4 principes, les deux premiers, qui sont la pesanteur & la vitesse, sont incapables de devenir infiniment grands, ou infiniment petits, mais que les deux derniers le peuvent devenir, & les cas qui en résultent méritent d'être examinés de plus près.

Puisque la force centrale agit d'autant moins avantageusement, pour faire décrire la Courbe, & par conséquent a besoin d'être d'autant plus grande, que sa direction est moins éloignée de se confondre avec celle par laquelle le corps tend à continuer de se mouvoir en ligne droite, il s'ensuit que si ces deux directions sont infiniment peu éloignées de se confondre, ou, ce qui est le même, se confondent, la force centrale a besoin d'être infiniment grande par rapport à la pesanteur. Or les deux directions, telles que nous les avons expliquées cy-dessus, se confondent, quand celle de la force centrale est une Tangente

\* p. 78.

de la Courbe, car le petit arc de la Courbe qui est la direction par laquelle le corps tend à continuer de se mouvoir en ligne droite, est alors aussi la direction de la force centrale. Donc la force centrale doit être infiniment grande pour agir. Et en effet, puisque l'on conçoit que sa fonction perpétuelle est de détourner le corps de la ligne droite, & de lui faire décrire la Courbe supposée, il faudroit qu'elle eût cette vertu à un degré infini, pour la pouvoir encore exercer lorsqu'elle ne combat plus du tout par sa direction celle du corps, & qu'au contraire elle le met elle-même sur la même ligne droite. Mais comme il est impossible qu'une force centrale soit réellement infinie, non plus que la pesanteur, ce cas-là est pareillement impossible. Aussi quelle que soit la Courbe que décrivent les Planetes, on voit que la force centrale qui les tire, qui doit être dans le Soleil, n'agit jamais par une Tangente de cette Courbe, puisque ni à un Cercle, ni à une Ellipse, ni à aucune autre Courbe de cette nature on ne peut tirer une Tangente d'un point pris au dedans de leur circonférence. Que si par une espece de jeu geometrique, on imagine, comme a fait M. Varignon, que la force centrale réside dans un point pris au dehors de quelqu'une de ces Courbes, il s'ensuivra nécessairement que quand le Corps sera arrivé à un point où la direction de la force centrale soit Tangente, cette force, parce qu'elle ne peut être infinie, ne pourra continuer davantage à faire mouvoir le corps sur la Courbe.

Ce principe qui donne lieu d'imaginer, du moins geometriquement, la force centrale comme infiniment grande par rapport à la pesanteur, ne donne pas lieu de l'imaginer dans le cas opposé comme infiniment petite dans le même sens, c'est-à-dire comme appliquée si avantageusement, que quoi qu'infiniment petite, elle pût encore agir. Les deux directions qui peuvent être infiniment peu contraires, ne peuvent pas être infiniment contraires, car quant à l'effet de la description de la Courbe, elles ne peuvent jamais l'être davantage que lorsqu'elles sont perpendiculaires

l'une à l'autre, ce qui n'est que fini, & a une mesure finie.

La Geometrie s'accorde ici, comme par tout ailleurs, avec la pure Theorie metaphisique. Les deux directions sont représentées par le petit arc de la Courbe, & par le petit arc circulaire qui détermine la difference des deux rayons. Dans le cas où la force centrale devroit être infiniment grande, on voit le petit arc circulaire qui est nul par rapport au petit arc de la Courbe, ce qui, comme on fait, donne un infiniment grand. Mais jamais le petit arc de la Courbe ne peut devenir nul par rapport au petit arc circulaire ; car quand le petit arc de la Courbe est le plus petit qu'il puisse être, il est égal au petit arc circulaire, & cela arrive perpétuellement dans le Cercle, d'où il suit qu'une force centrale qui en occupe le centre agit toujours perpendiculairement, & avec tout l'avantage possible.

Il reste à examiner par rapport à l'infini le quatrième principe. On en doit conclure que si la Courbe devient infiniment peu courbe, c'est-à-dire, qu'en deux ou plusieurs points consecutifs, elle ne soit qu'une ligne droite, la force centrale est infiniment petite, ou agit infiniment peu. En effet, puisque la Courbe n'est qu'une ligne droite dans cette étendue supposée, la force centrale n'a pas besoin d'agir sur le corps pour la lui faire décrire, car il la décrirait de lui même par sa seule tendance naturelle à se mouvoir en ligne droite.

On pourroit peut-être penser ici que par la même raison la force centrale seroit infiniment petite, lorsque sa direction s'accorde avec la direction ou tendance naturelle du corps, mais il y a une très-grande difference entre les deux cas. La description de la Courbe, en tant que Courbe, est l'effet de la force centrale. Quand cette force agit sur le corps de maniere à ne lui plus faire décrire une Courbe, il faudroit pour lui en faire décrire une malgré cela qu'elle eût une puissance, & une efficace infinie. Mais quand la Courbe étant toujours décrite a une certaine partie qu'on n'est qu'une ligne droite, il n'est point be-

soin de force centrale pour la description de cette partie.

Si la Courbe est infiniment courbe, la force centrale qui écarte donc infiniment le corps d'une ligne droite, est infiniment grande.

On fait que quand une Courbe est infiniment peu courbe en quelques points, le rayon de sa Développée est infiniment grand, & qu'il est infiniment petit, quand elle est infiniment courbe, & il se trouve par le calcul que quand ce rayon est infiniment grand, ou infiniment petit, la force centrale devient infiniment petite ou infiniment grande selon les deux cas que nous venons de marquer. Mais comme il ne peut y avoir réellement dans la nature aucune force centrale infiniment grande ou infiniment petite, ne fust-ce que pendant quelques instants, il ne peut y avoir aucune Courbe décrite en vertu d'une force centrale, & qui ait le rayon de sa Développée égal en quelque un de ses points à Zero ou à l'Infini.

Pour mieux comprendre comment l'action de la force centrale varie dépendamment de la courbure de la Courbe, il faut observer encore plus précisément en quoi consiste cette action, & cela répandra un nouveau jour sur cette matière.

L'action de la force centrale ne consiste qu'en ce qu'à chaque instant infiniment petit elle remet sur la Courbe un corps, qui tendoit à continuer de se mouvoir en ligne droite selon la direction de l'arc infiniment petit de la Courbe qu'il avoit décrit pendant l'instant précédent, ou, ce qui est la même chose, selon la Tangente de la Courbe à ce point. Si on prend donc une partie infiniment petite de cette Tangente qui réponde à l'instant supposé, & que de son extrémité on tire sur la Courbe une petite droite selon la direction de la force centrale, cette petite ligne sera le chemin que la force centrale fait faire au corps, & tout l'effet de son action. Or il est aisé de démontrer que cette petite ligne est un infiniment petit du second genre, au lieu que la partie correspondante de la Tangente en est un du premier, & par conséquent tout

l'espace parcouru en vertu de la force centrale dans un instant infiniment petit, n'est qu'un infiniment petit du second genre.

2<sup>e</sup> p. 90.

Nous l'avions déjà prouvé dans l'Histoire de 1700. \* mais nous en allons donner ici un exemple sensible.

La Pesanteur, par laquelle tombe en l'air un corps abandonné à lui-même, & qui n'a nulle autre cause de mouvement, est une force centrale, qui ne fait point décrire une Courbe, parce qu'elle n'est compliquée avec aucune autre cause. Toute la vitesse que le corps a acquise au bout d'un tems fini quelconque, lui vient uniquement de la pesanteur, & puisqu'au bout d'un tems fini cette vitesse est finie, il ne pourroit dans un tems infiniment petit recevoir de la même cause qu'une vitesse infiniment petite. Or la vitesse n'étant que le rapport de l'espace au tems, elle ne peut être infiniment petite si l'espace n'est infiniment petit par rapport au tems; donc le tems étant supposé un infiniment petit du premier genre, il faut pour une vitesse infiniment petite que l'espace parcouru soit un infiniment petit du second, donc dans un tems infiniment petit l'espace parcouru en vertu de la pesanteur, ou de toute autre force centrale est un infiniment petit du second genre.

Si l'on veut pousser cette idée plus loin, quoique sans nécessité par rapport au sujet présent, on verra qu'il s'en ensuit que dans un tems fini la vitesse causée par la pesanteur est infiniment plus grande qu'elle n'étoit, que par conséquent il faut rendre l'espace parcouru infiniment plus grand, c'est-à-dire qu'il doit être un infiniment petit du premier genre, & qu'enfin la vitesse d'un tems fini s'exprime par le rapport d'un espace infiniment petit du premier genre, à un tems infiniment petit du même genre, ce qui effectivement donne une grandeur finie.

Puisque l'espace parcouru dans un tems infiniment petit en vertu d'une force centrale finie est un infiniment petit du second genre, il est évident que la force centrale



trale devoit être infinie , quand cet espace parcouru dans le même tems deviendroît par la nature de la Courbe que le corps décriroit un infiniment petit du premier genre. Or il est démontré qu'il le devient , soit quand la direction de la force centrale concourt avec la direction naturelle du corps , soit quand le rayon de la Développée est égal à Zero. Pareillement , ce même espace devient nul , où , ce qui est la même chose , un infiniment petit du troisième genre , quand le rayon de la Développée est infini. Aussi la force centrale est-elle alors nulle.

Il ne faut pas croire que quand ces suppositions d'infini ne peuvent avoir lieu dans des applications réelles , ce soient pour cela des chimères Geometriques. Elles servent toujours à faire voir les bornes dans lesquelles le réel est compris , & jusqu'où il ne peut monter ou descendre.

De ce que nous avons dit de l'action de la force centrale , & de la tendance naturelle du corps à se mouvoir en ligne droite , il s'ensuit que chaque petit arc de la Courbe décrit par le corps dans un temps infiniment petit , est une ligne résultante de la composition de deux mouvemens , l'un par lequel le corps tend à continuer de se mouvoir en ligne droite selon la direction du petit arc précédent qu'il vient de décrire , l'autre par lequel la force centrale le rappelle sur la Courbe en lui faisant décrire un espace infiniment petit du second genre. Or toute ligne résultante de la composition de deux mouvemens est droite , si ces deux mouvemens sont *uniformes* , & courbe , si l'un des deux ne l'est pas , mais *accélééré* ou *retardé*. C'est par cette raison qu'un corps pesant poussé horizontalement en l'air décrit toujours une Courbe , qui résulte de son mouvement horizontal uniforme , & de son mouvement vertical & accéléré , imprimé par la pesanteur. Un mouvement est nécessairement accéléré , quand il est produit par une même cause toujours appliquée au corps sur lequel elle agit , parce qu'à chaque instant elle augmente toujours l'effet de l'instant précédent.

C'est ainsi que toute force centrale est supposée agir, & par conséquent la petite ligne résultante du mouvement uniforme qu'auroit le corps libre, & de l'action de la force centrale, est courbe, quoi qu'infiniment petite. Cette petite ligne est un arc infiniment petit de la Courbe qui se décrit, voilà donc une Courbe dont toutes les parties infiniment petites sont elles-mêmes Courbes.

Ce cas est remarquable dans la Géométrie des Infiniment petits, où l'on regarde ordinairement toutes les Courbes comme des Polygones infinis dont tous les côtés sont des lignes droites infiniment petites. Il est vrai que dans la Théorie des Développées on avoit déjà considéré les Courbes comme composées d'arcs circulaires infiniment petits; mais ici la composition des mouvements peut fort naturellement être telle, que les petites lignes courbes qui en résulteront ne seront point des arcs circulaires, & enfin voilà une nouvelle nécessité de regarder quelquefois les Courbes comme formées d'éléments courbes.

V. l' H. A.  
de 1701. F.  
80.

Cependant si l'on veut les considérer, même dans ce cas-là, comme formées d'éléments droits, M. Varignon en donne un moyen fort facile. Galilée a démontré que si un corps qui est tombé d'une certaine hauteur, se meut ensuite uniformément avec toute la vitesse acquise par sa chute, il parcourra en un temps égal le double de l'espace qu'il avoit parcouru. Par-là, on change aisément en espaces parcourus d'un mouvement uniforme tous ceux qui avoient été parcourus d'un mouvement accéléré, & si on prend le double du petit espace qui appartient à la force centrale, & que par son extrémité on tire une Tangente à la Courbe, la Diagonale du parallélogramme formé par ces deux lignes sera une ligne droite, & en même temps un arc infiniment petit de la Courbe. De cette seconde supposition naissent toutes les mêmes conséquences que de la première.

Toute cette Théorie posée, il en résulte cette proposition générale.

Que comme le produit d'un petit arc quelconque de la Courbe, & du double de la hauteur d'où le corps auroit dû tomber pour acquérir la vitesse avec laquelle il décrit cet arc, est au produit du rayon de la Développée correspondant, & de l'arc circulaire qui détermine la différence des deux rayons infiniment proches par lesquels agit la force centrale, ainsi cette force est à la pesanteur du corps.

Il ne faut plus qu'appliquer cette formule à telle Courbe qu'on voudra. Si par exemple, on l'applique au Cercle, & qu'on suppose la force centrale dans le centre, on trouvera que parce qu'un petit arc quelconque de cette Courbe est le même que l'arc circulaire de la proposition générale, la force centrale est à la pesanteur, comme la hauteur déterminatrice de la vitesse du corps, est à la moitié du rayon de la Développée, qui est le même que le rayon du Cercle, & c'est-là la proposition fondamentale de feu M. le Marquis de l'Hôpital pour les forces centrales considérées dans le Cercle.

Si un corps décrivait une Spirale Logarithmique, au centre de laquelle concourussent tous les rayons de la force centrale, cette force seroit à la pesanteur, comme la hauteur déterminatrice de la vitesse du corps à un point quelconque seroit à la moitié du rayon correspondant.

Dans la Parabole, supposé que son foyer soit le centre où se rapporte la force centrale, cette force est à la pesanteur comme la hauteur déterminatrice de la vitesse est au rayon correspondant.

Il faut remarquer que l'on peut faire ici deux suppositions différentes, l'une par laquelle les Ordonnées naturelles de la Courbe, c'est-à-dire celles que l'on y considère ordinairement, ou qui entrent dans son Equation, seront les mêmes que les rayons de la force centrale, l'autre, par laquelle ce seront différentes lignes. Les exemples du Cercle & de la Spirale Logarithmique sont dans le premier cas, celui de la Parabole dans le second, mais

\* V. l'Hist.  
de 1700. p.  
81.

tous les deux sont également compris dans la formule générale ; seulement le second demande un peu plus de Géométrie & de calcul.

Si on veut que les rayons de la force centrale au lieu de concourir tous dans un même point à une certaine distance de la Courbe , ne concourent qu'à une distance infinie , c'est-à-dire soient parallèles , le changement qui naît de cette supposition dans les Courbes que l'on considère se présente d'abord. Le Parallélisme n'est qu'un cas particulier du concours des Lignes.

On pourroit même supposer , comme a fait M. Varignon dans l'Histoire de 1703\* que plusieurs forces centrales agiroient ensemble sur un même corps , & que du mélange de leurs différentes actions resulteroit une certaine Courbe. M. Varignon étend sans peine sa règle générale à cette hypothèse. Il donne aussi le moyen de comparer les forces centrales , & les pesanteurs de differens Corps mûs sur une même , ou sur différentes Courbes , ou d'un même Corps mû sur des Courbes différentes.

Enfin pour ne laisser rien échaper à sa Methode , il fait voir comment on en peut tirer , outre le rapport de la force centrale à la pesanteur , celui de cette force à elle-même en differens points de la Courbe , ou , ce qui est la même chose , celui de l'inégalité de son action , qu'il avoit donné en 1700 indépendamment de la pesanteur.

## SUR LES ISOPERIMETRES.

V. les M. **V**Oici le Problème qui causa entre deux illustres Freres cette espece de procès , dont on a parlé dans l'Histoire de 1705\*. M. Bernoulli , maintenant Professeur en Mathematique à Basle , envoya à l'Academie au mois de Janvier 1701 , un Paquet cacheté , intitulé , *Methodes pour la Solution du Problème des Isoperimetres* , & recommanda en même temps qu'il ne fût ouvert qu'après que feu

V. les M.  
p. 235.  
\* p. 146. &  
647.

M. Bernoulli son frere auroit publié son Analife de ce même Problème. Comme il y eut des difficultés sur cette publication , & qu'ensuite M. Bernoulli l'aîné est mort, le paquet du Cadet , n'a été ouvert par l'Academie que le 17 Avril 1706 , & on va trouvé la Solution que l'on imprime presentement. Il y étoit marqué qu'elle avoit été communiquée à M. Leibnits dès le mois de Juin 1698.

Tout le monde sçait qu'une circonference circulaire renferme le plus grand espace *isoperimetre* possible , c'est-à-dire le plus grand espace qui puisse être renfermé dans une circonference de la même longueur.

Cette Proposition peut encore être exprimée de cette maniere ; La somme des Ordonnées d'un demi Cercle remplit un plus grand espace que ne feroient les Ordonnées de toute autre Courbe égale en longueur à la demi circonference circulaire , & terminée aux deux extremités du même diametre.

Mais si l'on demandoit , Quelle est la Courbe dont les Ordonnées , non pas simples , comme celles du Cercle , mais élevées à une puissance quelconque déterminée , par exemple , au Quarré , rempliroient un plus grand espace que ne feroient les Ordonnées de toute autre Courbe *isoperimetre* , & décrite sur le même axe , qui seroient élevées à la même puissance , on voit que le Problème deviendroît beaucoup plus general , & en même temps quiconque le voudra tâter sentira combien il sera devenu difficile. On entend aisé que ces Ordonnées élevées à une puissance quelconque seront représentées par des lignes droites qui auront entre elles les rapports de cette puissance. Si par exemple , la puissance que l'on a déterminée est le Quarré , il faut trouver une Courbe dont les Appliquées qui étoient , si l'on veut , comme 1 , 3 , 6 , 10 , &c. étant devenues entre elles comme 1 , 9 , 36 , 100 , &c. remplissent un plus grand espace que les Appliquées de toute autre Courbe *isoperimetre* qui auroient été par exemple , comme 1 , 5 , 12 , 22 , &c. & seroient devenues comme 1 , 25 , 144 , 484 , &c. Il est évident que les Or-

données d'une Courbe élevée à quelque puissance forment une nouvelle Courbe.

C'est là le Problème que feu M. Bernoulli proposa en 1697. M. Bernoulli son frere qui étoit particulièrement désié, non seulement le résolut, mais le résolut après l'avoir rendu encore plus general, & par consequent plus difficile. Il changea les puissances des Appliquées en ce qu'il appelle *fonctions*. Les fonctions d'une Appliquée comprennent, outre toutes les puissances, soit parfaites, soit imparfaites, où l'on peut l'élever, toutes les multiplications ou divisions que l'on en peut faire par des grandeurs constantes, ou par les Abscisses élevées aussi à telle puissance qu'on voudra ; de sorte, par exemple, que le produit d'une Appliquée élevée au cube & d'une grandeur constante, divisé par le quarré de l'Abscisse, est une fonction de l'Appliquée. Les puissances ne sont qu'une espece dont fonction est le genre.

Puisque dans la Geometrie des Infiniment petits les puissances se *differentient*, les fonctions se differentient aussi en general. M. Bernoulli trouve par un tour de Geometrie fort délicat & fort ingenieux, qu'afin qu'une Courbe soit telle que les fonctions de ses Appliquées remplissent un plus grand espace que les fonctions pareilles des Appliquées de toute autre Courbe isoperimetre, il faut que dans tous ses points le Sinus de sa courbure ait une raison constante à la fonction differentiée de l'Appliquée qui lui répond, mais differentiée avec une certaine modification que M. Bernoulli enseigne. On sçait que le Sinus de la courbure d'une Courbe dans un point quelconque est le Sinus de l'angle aigu infiniment petit, complément de l'obtus que font entre eux en ce point là deux côtés contigus du Polygone infini.

M. Bernoulli donne donc en general, & pour toutes les fonctions imaginables d'Appliquées l'Equation de la Courbe que l'on cherchera. Si l'on veut que la fonction des Appliquées ne soit que leur premiere puissance, c'est à dire les Appliquées mêmes, l'Equation generale ainsi

spécifiée donne aussitôt le Cercle, dont effectivement les Appliquées forment le plus grand espace possible.

Pour élever encore le Problème à une plus grande universalité, M. Bernoulli suppose qu'au lieu des fonctions des Appliquées il s'agisse des fonctions des Arcs, & qu'on cherche une Courbe dont les Arcs soient tels que des lignes droites qui représenteroient une certaine fonction déterminée de ces Arcs rempliroient un plus grand espace que d'autres lignes droites qui représenteroient la même fonction des arcs de toute autre Courbe inscrite. La méthode de M. Bernoulli va même encore plus loin, & elle permet que l'on combine comme on voudra les fonctions des Appliquées avec celles des Arcs, soit par addition, soit par soustraction, &c. Il semble même qu'elle doit permettre, quoiqu'il ne le marque pas, que l'on donne une certaine fonction aux Appliquées, & une autre fonction différente aux Arcs. Quoiqu'il en soit, M. Bernoulli dans ses différentes suppositions trouve toujours que le Sinus de la courbure de la Courbe cherchée doit être en raison constante avec une certaine quantité, qui est différente selon les hypothèses.

Indépendamment d'une aussi fine Geometrie que celle qu'emploie M. Bernoulli, on peut prendre quelque idée de la Theorie, & s'en faire une ébauche superficielle & générale, qui ne laissera peut-être pas de plaire à l'Esprit. Une ligne étant donnée pour base d'un triangle, & de plus un fil d'une certaine longueur qui étant attaché aux deux extrémités de cette base doive faire les deux autres côtés du triangle, il est visible que le triangle ne pourra jamais avoir une plus grande aire, ou comprendre un plus grand espace, que quand le milieu du fil formera l'angle du sommet, ou, ce qui est la même chose, quand les deux moitiés égales du fil formeront les deux côtés du triangle; & par conséquent seront deux angles égaux sur la base. Comme cela ne dépend en aucune manière du rapport que la longueur du fil peut avoir à celle de la base, cette propriété subsistera encore, lors

même que la longueur du fil ne surpassera celle de la base que d'une quantité infiniment petite , c'est-à-dire , lorsque l'angle du sommet sera de 180. degrés, moins les deux angles de la base qui seront infiniment petits , & il faudra afin que le triangle comprenne le plus grand espace possible dans cette supposition , que les deux angles infiniment petits de la base soient égaux. Donc une Courbe quelconque étant divisée en arcs égaux infiniment petits , & chaque arc étant conçu avec sa soutendante , ou base sur les extrémités de laquelle il fait deux angles , il faut , afin que ces petits espaces triangulaires soient les plus grands qu'il se puisse , que les deux angles de chaque arc sur sa base soient égaux , & , puisque tous les arcs ont été pris égaux , que tous ces angles sur toutes ces bases infinies en nombre soient égaux entre eux. Or de cette égalité s'ensuivra nécessairement celle de tous les angles que feront entre eux les côtés du Poligone infini , ou , ce qui revient au même , celles des angles de la courbure , & voilà pourquoi une courbure uniforme & toujours égale est liée avec la propriété de comprendre le plus grand espace possible. Il est manifeste que le Cercle étant conçu comme un Poligone d'une infinité de côtés égaux , ils font tous entre eux les mêmes angles. Toute autre Courbe divisée de la même façon , aura ses côtés infiniment petits tellement posés entre eux qu'ils feront des angles differens , & si l'on veut remonter jusqu'à la première source , on trouvera que chaque petit arc égal étant conçu avec une base , il ne fera pas sur chaque extrémité un angle égal.

De ce que , comme nous venons de le dire , l'uniformité de courbure est liée avec la propriété de comprendre le plus grand espace possible , on voit en général que quand ce ne sont plus , ainsi que dans le Cercle , de simples Appliqués qui doivent former ce plus grand espace , mais des puissances ou fonctions d'Appliquées , l'uniformité de courbure requise ne doit plus consister dans une parfaite égalité , telle que celle du Cercle , mais dans quelque



quelque rapport constant de la courbure aux nouvelles grandeurs dont on fait dépendre le plus grand espace. Ainsi la recherche de M. Bernoulli se réduit à rendre générale la propriété du Cercle, & à marquer les modifications qu'elle doit recevoir dans des cas plus compliqués. Une démonstration geometrique en est plus parfaite & plus agréable à l'Esprit, quand elle va saisir le véritable principe de la question, & s'attache, pour ainsi dire, à un tronc, & non pas à quelque branche.

Comme M. Bernoulli a bien senti que sa Methode étoit fort déliée, il la confirme par un autre Problème qui se réduit aux mêmes termes, & doit donner la même solution. C'est celui de la courbure que doit prendre un Linge attaché par ses deux extrémités, & chargé d'une liqueur quelconque. Il aura toujours la même longueur, & sera isoperimetre, quelque courbure qu'il prenne. D'ailleurs cette courbure doit être telle que toutes les *gravitations* des parties de la liqueur prises ensemble fassent la plus grande somme qu'il se puisse. Ce que M. Bernoulli appelle gravitation de chaque colonne de liqueur, c'est son action composée & de son poids, & de sa distance au point fixe, & de son plus ou moins d'obliquité à la Courbe. On peut supposer la liqueur composée de différents lits ou couches dont la pesanteur spécifique sera inégale selon tels rapports qu'on voudra, & par là on donnera aux gravitations des colonnes le même rapport qu'auroient des Appliquées de Courbes élevées à une certaine fonction. Voilà donc une Courbe qui doit donner une plus grande somme que toute autre Courbe isoperimetre, & qui est précisément dans les mêmes termes que celle du premier Problème. M. Bernoulli qui avoit trouvé il y a long-temps la Courbe du linge chargé de liqueur, fait voir fort clairement que son Equation retombe dans celle qu'il donne ici pour les Courbes isoperimetres en général. Nous avons observé dans l'Hist. de 1705. \* que cette Courbe du Linge est encore la même que l'Elastique de feu M. Bernoulli.

\* p 144.

Il est aisé de juger par toutes ces recherches jusqu'à quelle subtilité & à quelle finesse la Geometrie a été portée depuis un temps , & quelle est la Methode à laquelle on doit de si grands progrès.

## S U R   L E S   R O U L E T T E S

### E N   G E N E R A L.

V. les M.  
P. 340.

**V**Ers le milieu du Siècle passé, les Geometres se mirent à examiner à l'envi les uns des autres la Courbe que décriroit un point quelconque de la circonférence d'un Cercle, qui comme une Rouë de carrosse avanceroit sur un plan en ligne droite, & dans le même temps tourneroit sur lui-même. Cette Courbe fut appelée *Roulette* ou *Cycloïde*. Le Cercle est appelé *Générateur*, & la ligne droite sur laquelle il se meut *Base* de la Roulette. Il est visible que puisque par la génération de la Roulette ou Cycloïde le Cercle générateur applique successivement tous ses points sur la base, elle est égale à sa circonférence, ou, ce qui revient au même, que dans le mouvement composé du droit & du circulaire par lequel se forme la Cycloïde, le droit & le circulaire sont égaux.

Comme l'Esprit qui regne dans la Geometrie moderne va toujours à rendre les Theories plus générales, on a considéré que le Cercle generateur au lieu de se mouvoir sur une ligne droite pouvoir se mouvoir sur la circonférence d'un autre Cercle, soit égal, soit inégal, & en ce cas on appelle *Epicycloïde* la Courbe que décrit un point quelconque de sa circonférence. M. de la Hire a imprimé en 1694. un Traité des Epicycloïdes par rapport aux Mechaniques.

Mais pourquoi s'assujettir à ne prendre le point *décrivant* que sur la circonférence d'un Cercle? on peut le prendre par tout où l'on voudra sur le plan du Cercle gé-

nérateur, soit au dedans, soit au dehors de sa circonférence. Si on le prend au dedans, & que la base soit une ligne droite; la Roulette sera *allongée*, c'est-à-dire, que dans la formation le mouvement droit l'emportera sur le circulaire; si on le prend au dehors, elle sera *accourcie*, parce que le mouvement circulaire l'emportera sur le droit. Et pour s'en convaincre, il n'y a qu'à considérer quel'on ne peut prendre le point décrivant *plus au dedans* du Cercle générateur qu'en prenant son centre pour ce point, ni *plus au dehors*, qu'en le prenant infiniment loin du Cercle générateur. Or dans le premier cas, il est visible que la Roulette n'est qu'une ligne droite, & dans le second, ce n'est qu'un Cercle concentrique au générateur, ou plutôt ayant pour centre le générateur lui-même, qui ne doit plus passer que pour un point. Donc le point décrivant étant pris au centre du Cercle générateur, le mouvement qui forme la Roulette n'est que droit; depuis le centre jusqu'à la circonférence, il l'emporte toujours sur le circulaire, & son avantage va toujours en diminuant; à la circonférence, il est égal au circulaire, au-delà de la circonférence, le circulaire l'emporte, & son avantage diminué toujours depuis ce terme.

Pourquoi encore ne faire rouler que des Cercles sur des Cercles ou sur des lignes droites? il n'y a point de Courbe qui prise pour génératrice, ne puisse rouler, c'est à dire, appliquer successivement tous les points sur une autre Courbe immobile prise pour base, & un point décrivant quelconque déterminé sur la circonférence ou sur le plan de la génératrice formera par son mouvement une nouvelle Courbe, qui sera une Roulette, car c'est le nom général qu'on donne à toutes les Courbes formées de cette manière.

Il y a plus. Sous l'idée générale de lignes Courbes, on peut comprendre les lignes droites, en supposant qu'elles soient des circonférences de Cercles dont le rayon est infini, & cette hypothèse qui est peut-être une des plus dures, & des plus difficiles à digérer de toutes celles qui

se tirent de l'Infini, est cependant necessaire en plusieurs occasions, admise par tous les grands Geometres, & parfaitement exempte d'erreur. On peut donc imaginer une Courbe quelconque qui roule sur la circonference d'un Cercle infini, c'est-à-dire sur une ligne droite, ou reciproquement la circonference d'un Cercle infini qui roule sur une Courbe quelconque. Dans ce dernier cas, il est évident qu'une ligne droite ne peut rouler autrement sur une Courbe, qu'en s'y appliquant de maniere qu'elle en soit toujours la Tangente en quelqu'un de ses points. La base Courbe est alors la même chose que ce qu'on appelle une *Développée*\*, & la Roulette formée par un point décrivant quelconque pris sur la ligne droite génératrice, est la Courbe née du développement de la base. Ainsi la Theorie des Développées fait partie de celle des Roulettes élevée à sa plus grande generalité.

\* V. l'Hist.  
de 1701. p.  
81.

C'est dans cette generalité infinie que M. de la Hire entreprend d'examiner les Roulettes. Pour cela, il prend l'hipothese des Infiniment petits. Il suppose un point décrivant pris dans le plan de la ligne generatrice. Un côté Infiniment petit de la generatrice considerée comme un Poligone infini s'applique à un autre côté infiniment petit de la base, c'est-à-dire, que la génératrice & la base se touchent, & alors le point décrivant a necessairement une certaine position, & comme il appartient toujours à la Roulette, voilà le premier instant de sa formation. Ensuite les deux côtés infiniment petits tant de la generatrice que de la base, qui suivent immediatement les deux premiers, viennent par le mouvement que l'on suppose dans la generatrice à s'appliquer l'un sur l'autre, c'est à dire que la generatrice vient à toucher la base en un autre point, ce qui détermine le mouvement du point décrivant, selon qu'il est posé sur la generatrice, & par consequent c'est-là le second instant de la generation de la Roulette, qui continuë à se former par de semblables mouvements. Nous ne pouvons entrer ici dans le détail geometrique, il consiste en la consideration de certains Triangles,

gles qui se meuvent avec la generatrice , & suivent tous les pas infiniment petits qu'elle fait sur la base. Ils ont necessairement des angles infiniment petits, & ne peuvent être connus que par les regles particulieres à cette hypothese. Cette voye conduit M. de la Hire à une methode générale & très simple pour les Tangentes de toutes les Roulettes possibles. Que d'un point où la generatrice touche la base on tire au point décrivant une ligne droite , & sur cette ligne une perpendiculaire par le point décrivant , cette perpendiculaire est Tangente de la Roulette en ce point. En effet , on peut concevoir un point quelconque où la generatrice touche la base comme centre d'un cercle , dont le rayon est la ligne tirée de ce point au point décrivant , & alors l'arc circulaire infiniment petit que décrit ce rayon par son mouvement d'un instant est un arc de la Roulette. Or la Tangente d'un arc de cercle est perpendiculaire au rayon qui s'y termine.

Pour sçavoir si la Roulette est concave ou convexe vers un point quelconque déterminé où la generatrice touche la base , M. de la Hire a besoin de tracer un Cercle qu'il détermine ainsi. La generatrice & la base sont connues , & par consequent on connoît le rayon de la Développée de chacune d'elles. Comme la somme de ces deux rayons est à celui de la génératrice , ainsi celui de la base est à une quatrième ligne, qu'il faut prendre pour diametre du cercle dont il s'agit. Si le point décrivant de la Roulette se trouve au dedans de ce cercle , elle est convexe vers le point déterminé de la base , concave, si ce même point décrivant est hors le cercle , & ni convexe ni concave , s'il est sur la circonference, c'est-à-dire qu'elle a alors un point d'*inflexion* , où de concave qu'elle étoit vers un certain côté elle devient convexe vers ce même côté, ou reciproquement , & n'est ni concave ni convexe dans ce passage , mais ligne droite.

Le cercle déterminateur de la concavité & de la convexité de la Roulette, ou simplement *déterminateur*, change

toujours, puisqu'il dépend des Rayons des Développées de la generatrice & de la base, & que le rayon de la Développée d'une Courbe varie toujours pour chacun de ses points, si ce n'est dans le Cercle, où il est constant, & le rayon même du Cercle. Mais le point d'atouchement de la generatrice & de la base, ou, ce qui est la même chose, la position de la generatrice sur la base étant la même, quel que soit le point décrivant pris sur le plan de la generatrice, on est sûr que s'il se trouve alors sur la circonference du Cercle déterminateur, la Roulette a une inflexion en ce même point. Ainsi la circonference de ce cercle comprend tous les points d'inflexion de toutes les différentes Roulettes possibles décrites par différents points du plan de la generatrice, pourvu qu'elles aient des points d'inflexion, & si elles n'en ont point, jamais leurs points décrivants ne se trouveront sur cette circonference; il faut toujours entendre que tout cela n'est que pour une position déterminée de la même generatrice sur la même base, les points décrivants étant differens.

Par l'analogie qui donne le Cercle déterminateur, on voit que si la base est une ligne droite, dont par conséquent le rayon de la Développée est infini, le rayon de la Développée de la generatrice, quelle qu'elle soit, est égal au diametre du cercle déterminateur. Donc si on suppose encore que la generatrice soit un cercle, le rayon du cercle generateur sera le diametre du déterminateur; & cela dans toutes les positions du cercle generateur sur la base, puisqu'il a toujours le même rayon. Si l'on ajoute donc pour dernière supposition que le point décrivant soit le centre du cercle generateur, le point décrivant se trouvera toujours sur la circonference du déterminateur, & par conséquent la Roulette aura une inflexion perpetuelle; mais qu'est-ce qu'une inflexion perpetuelle? car il paroît d'abord difficile de s'en faire une idée, puisque l'inflexion n'est que le passage de la concavité d'une Courbe à la convexité, ou reciproquement. Voici ce que

c'est. Selon le Système des Infinitement petits, une Courbe qui de concave devient convexe, ou reciproquement, a dans ce passage deux de ses côtés infiniment petits posés bout à bout en ligne droite, & par conséquent avoir une inflexion perpetuelle, c'est avoir tous ses côtés infiniment petits posés bout à bout en ligne droite ; ou, ce qui est la même chose, n'être qu'une ligne droite ; d'où il suit que dans le cas proposé la Roulette en seroit une, & non plus une Courbe. Et en effet, il est évident sans aucune geometrie que si un cercle roule sur une ligne droite, son centre trace une ligne droite parallele à la base. L'art ne seroit pas nécessaire pour ne découvrir que des cas si simples, mais il l'est pour les renfermer dans une même Regle avec les plus compliqués, & quand on voit qu'étant développée elle produit ces cas simples & connus, c'est un surcroît d'assurance qu'elle produira aussi les autres.

L'inflexion perpetuelle n'est pas bornée au cas que nous venons de voir, & il n'est pas nécessaire que le rayon de la Développée de la generatrice soit toujours constant. Car puisque par la Regle de M. de la Hire, la base de la Roulette étant droite, le rayon de la Développée de la generatrice est égal au diametre du cercle déterminateur, il s'ensuit que quoique le rayon de la Développée de la generatrice varie à chaque instant, l'inflexion ne laissera pas d'être perpetuelle, si le point décrivant suit toujours la circonference du cercle variable dont ce rayon sera le diametre. Or c'est ce qui arrive, lorsqu'une Spirale Logarithmique roule sur une ligne droite, & que le centre de cette Spirale est le point décrivant. Cette Courbe est telle que le rayon de sa Développée à un point quelconque étant pris pour diametre d'un Cercle, son Ordonnée correspondante, c'est-à-dire la ligne tirée du centre au point correspondant de la courbe, est toujours une corde de ce cercle. Donc à quelque point que ce soit de la Spirale Logarithmique, son centre se trouve toujours sur la circonference du cercle dont le rayon de sa Dévelo-

pée en ce point là est le diamètre. Donc ce centre étant le point décrivant, la Roulette formée par le mouvement de la Spirale Logarithmique sur une base droite, aura une inflexion perpetuelle, ou ne sera qu'une ligne droite. Cette ligne droite ou Roulette ne sera pas parallele à la base, mais inclinée, ce qui suit de la variation perpetuelle du Rayon de la Développée. On peut remarquer ici que cette Roulette est un des côtés d'un Triangle qui a autant de bases paralleles que la Spirale Logarithmique a d'Ordonnées concourantes à son centre. Or parce que la nature de la Spirale Logarithmique est que toutes ses Ordonnées fassent toujours le même angle avec la circonférence de cette Courbe, on peut imaginer que c'est un Triangle qui avoit une infinité de bases paralleles que l'on a renduës toutes concourantes en un seul point, sans changer les angles toujours égaux qu'elles faisoient par leur autre extrémité sur un même côté, qui par là devient la circonférence de la Spirale Logarithmique. Par consequent la Roulette formée, comme nous l'avons dit, par cette Spirale, étant un côté de Triangle, tel que nous l'avons représenté, elle est ce même côté de triangle, qui a pû se changer en Spirale Logarithmique. En un mot, c'est la Spirale Logarithmique déroulée.

Une Roulette ne sera encore qu'une ligne droite, quand un cercle générateur sera toujours égal au déterminateur, & que le point décrivant sera pris sur la circonférence du générateur; cela est évident. Mais le cas où le cercle générateur peut être égal au déterminateur ne saute pas d'abord aux yeux, car il faut pour cela, suivant la règle de M. de la Hire, que le rayon du générateur soit la moitié du diamètre du déterminateur, & que par consequent le rayon du cercle générateur plus le rayon de la Développée de la Base quelconque que l'on prendra, ne soit que la moitié de ce même rayon de la Développée de la base. Or c'est ce qui ne se peut absolument dans l'hypothèse que nous avons suivie jusqu'ici & qui est la plus naturelle. Nous avons supposé que la convexité de la  
génératrice



génératrice rouloit toujours sur la convexité de la base, & qu'alors dans le calcul algebrique les deux rayons de leur Développées avoient chacun le signe *plus*, auquel cas il est totalement impossible que la somme des deux soit égale à la moitié de l'un des deux. Mais si on suppose que la convexité de la génératrice roule sur la concavité de la base, alors par les regles de l'Algebre le rayon de la Développée de la base est affecté du signe *moins*, parce que d'un certain côté déterminé où il étoit il passe au côté opposé, & la somme des deux rayons dont l'un est affecté de moins, peut être moindre qu'un seul des deux. Si l'on prend donc pour base un cercle dont le rayon soit double de celui du cercle générateur, & que le générateur roule dans la concavité de celui qui sert de base, on trouvera que la somme des deux rayons ne sera que la moitié de celui de la base, & que la Roulette sera une ligne droite.

Dans ce même cas, M. de la Hire fait voir que si le point décrivant étoit au centre du cercle générateur & déterminateur, la Roulette seroit un Cercle, & que s'il est pris par tout ailleurs, au dedans ou au dehors du générateur, la Roulette sera une Ellipse, ce qui convient à la nature de cette courbe que l'on sçait être une espece moyenne entre la ligne droite & la circulaire, & qui peut dégénérer en l'une ou en l'autre.

M. de la Hire détermine avec plus de facilité les points de *rebroussement* des Roulettes, lorsqu'elles en ont, que ceux d'*inflexion*. Lorsque la plus grande ou la plus petite ligne menée du point décrivant sur la circonférence de la génératrice est perpendiculaire à la Base, le point correspondant de la Roulette est un point de rebroussement. En effet, il est aisé d'imaginer que si on fait rouler une Parabole, par exemple, sur une ligne droite, que le mouvement commence par quelque point de la circonférence de cette Courbe éloigné du sommet, & que le point décrivant soit le foyer, il arrivera, quand la Parabole touchera la base par son sommet, que la Roulette qui jusques-là aura toujours descendu par rapport à la base,

sera alors descendue au point le plus bas, & ne pourra ensuite que remonter, ce qui fait un rebroussement. Or quand la Parabole touche la base par son sommet, il est évident que la plus petite ligne qu'on puisse mener du foyer à la circonférence de la Parabole, est alors perpendiculaire à la base. La même Regle subsistera, si l'on conçoit que le point décrivant devienne infiniment proche de la circonférence de la génératrice, c'est-à-dire, soit pris sur cette circonférence. Alors il faudra qu'il soit sur la base, afin que la Roulette ayant descendu remonte, ou réciproquement, ou en un mot, rebrousse, ce qui est assés clair par soi-même.

De-là M. de la Hire passe à la rectification & à la quadrature des Roulettes. Les longueurs des Courbes sont toujours des sommes infinies d'arcs infiniment petits, & les superficies sont des sommes infinies d'espaces infiniment petits. Quand ces arcs ou les espaces suivent des progressions dont la nature peut-être connue, & que d'ailleurs on peut avoir les sommes de ces progressions, on a les longueurs, ou les superficies cherchées. Tout se réduit là, mais il y a bien des voyes différentes pour y arriver. Celles que prend M. de la Hire sont des plus simples. Il quarre & rectifie d'abord les Epicycloïdes, parce qu'elles comprennent les Cycloïdes, lorsque le rayon de leur base est supposé infini, & que par conséquent la base est une ligne droite. Il trouve que l'espace de l'Epicycloïdes en général, est à celui du Cercle générateur, comme trois fois le rayon de la base plus deux fois le rayon du Cercle générateur est au rayon de la base, d'où il suit évidemment que l'espace de la Cycloïde est triple de celui du Cercle, générateur ; car quand l'Epicycloïde devient Cycloïde le rayon du Cercle générateur qui est fini disparaît dans cette Analogie. De même la circonférence de l'Epicycloïde en général est à quatre fois le diamètre du Cercle générateur, comme le rayon de la base plus celui du Cercle générateur est au rayon de la base, d'où il suit que la circonférence de la Cycloïde est égale à quatre fois le dia-

metre du Cercle générateur. M. de la Hire passe ensuite aux Roulettes allongées ou accourcies, enfin à la Roulette dont la base est un Cercle, & la génératrice une ligne droite, où l'on prend un point quelconque pour décrivant, c'est-à-dire, à la Courbe qui naît du dévolement du Cercle. Elle peut devenir par un léger changement la Spirale d'Archimède.

Il est aisé de conclure de toute cette Theorie, qu'il n'y a point de Courbe qui ne puisse être considérée comme une Roulette, car il n'y en a aucune qui ne puisse avoir été formée par le mouvement d'un certain point décrivant pris sur le plan d'une certaine génératrice qui aura roulé sur une certaine base. Delà naissent ces Problèmes, *Une Courbe prise pour Roulette étant donnée avec sa base, trouver la génératrice, ou, Une Courbe étant donnée avec sa génératrice, trouver la base, ou, La Base & la génératrice avec le point décrivant étant données, trouver la Roulette.* M. de la Hire apporte quelques solutions qui naissent de sa Theorie générale, & qui peuvent servir d'exemples pour d'autres cas que ceux qu'il propose.

## SUR UNE PROPOSITION

### DE GEOMETRIE ELEMENTAIRE.

**I**l y a dans la Géométrie Elementaire des Propositions que l'on retrouve presque par tout, & à chaque moment, & qui sont si souvent employées, qu'il semble que toutes les autres soient devenues inutiles. Telle est la fameuse Quarante-septième du premier Livre d'Euclide, si digne de l'Hecatombe que l'on dit qu'elle coûta à son Inventeur. Telle est aussi celle de la similitude des Triangles. Il arrive le plus souvent que les plus sublimes recherches n'empruntent de toute la Géométrie Elementaire que ces deux Propositions.

M. de Lagni croît qu'il y en a encore quelques-unes

ou inconnuës ou negligées, qui pourroient tenir à peu près le même rang. On peut prendre pour exemple celle qu'il démontre ici, que dans un Parallelogramme quelconque la somme des quarrés des deux Diagonales est égale à la somme des quarrés des quatre côtés.

Il évident d'abord que la quarante-septième du premier Livre d'Euclide n'est qu'un cas particulier de cette proposition, car si le Parallelogramme est rectangle, il s'ensuit que les deux Diagonales sont égales, & par conséquent le quarré d'une Diagonale, ou, ce qui est la même chose, le quarré de l'Hypotenuse d'un angle droit, est égal aux quarrés des deux côtés. Mais si le Parallelogramme n'est pas rectangle, & si par conséquent les deux Diagonales ne sont pas égales, ce qui est le cas le plus général, la proposition devient d'un usage fort étendu.

Elle peut servir, par exemple, dans toute la Theorie des Mouvements composés, d'où dépendent toutes les recherches de Mechanique, & plus généralement pres- que toutes celles qui ont quelques mouvements pour objet.

Dans un Parallelogramme qui n'est pas rectangle, la grande Diagonale est la soutendante d'un angle obtus, & la petite est la soutendante d'un angle aigu, complement de cet obtus. La grande est d'autant plus grande, & la petite d'autant plus petite que l'angle obtus est plus grand, de sorte que si cet angle obtus en croissant toujours devient infiniment grand par rapport à l'aigu, ou, ce qui est la même chose, si les deux côtés *conjoints* ou inégaux du Parallelogramme sont posés bout à bout en ligne droite, la grande Diagonale est la somme même de ces deux côtés, & la petite est nulle. Si on connoît deux côtés conjoints du Parallelogramme & l'angle qu'ils font entre eux, il est aisé de trouver en nombres la soutendante de cet angle, c'est à dire, une des Diagonales du Parallelogramme, après quoi la proposition de M. de Lagni donne l'autre Diagonale, ce qu'on peut voir très-facilement. Or, cette seconde Diagonale qu'on trouve ainsi est la ligne que

décriroit un corps poussé en même tems par deux forces qui auroient entre elles le même rapport que les deux côtés conjoints, & agiroient selon ces deux directions, & ce corps décriroit cette diagonale dans le même tems qu'il auroit décrit l'un ou l'autre des deux côtés conjoints, s'il n'avoit été poussé que par la force correspondante. C'est là un des plus grands usages de la Proposition, car le rapport de deux forces, & l'angle qu'elles font entre elles étant donnés, il est souvent nécessaire de déterminer en nombres la ligne que décriroit dans un certain tems un corps poussé par ces deux forces ensemble.

Ce n'est pas que deux Methodes ordinaires & connues, l'une Trigonometrique, l'autre Géometrique & Analytique ne pussent résoudre ce Problème; mais M. de Lagni fait voir que la premiere demande 21 operation, la seconde 15, & que la sienne n'en demande que 7. Elle a même encore cet avantage qu'elle épargne des divisions & des extractions de racines, qui presque toujours produisent des fractions, qu'on ne peut negliger sans erreur, ou employer dans le calcul sans le rendre beaucoup plus long & plus penible.

Si les deux côtés conjoints d'un Parallelogramme sont donnés de grandeur seulement, il est visible qu'ils peuvent faire entre eux une infinité d'angles differens, & puisque le rapport des deux Diagonales entre elles, dépend de l'angle de ces deux côtés, on en peut former une infinité de Parallelogrammes dont les deux Diagonales auront entre elles un rapport different. C'est là un Problème qui a une infinité de solutions, & même, à le considerer encore de plus près, une infinité d'infinités de solutions. Car que les deux côtés donnés de grandeur fassent d'abord un angle de 180, c'est à dire, soient posés bout à bout en ligne droite, ils peuvent faire ensuite des angles toujours décroissans selon la progression soudouple infinie, ou selon la progression soutriple pareillement infinie; en un mot, selon une infinité de progressions differentes, dont chacune est infinie, M. de Lagni

donne cette infinité d'infinités de solutions en deux formules générales, dont l'une est pour deux côtés égaux, & l'autre pour deux côtés inégaux, & il remarque en même tems que ces sortes de Problèmes ne sont pleinement résolus que de cette maniere, car ni plusieurs solutions, quel qu'en fût le nombre, ni une infinité, ni même plusieurs infinités ne comprendroient tout. Ce n'est pas cependant que toutes ces solutions soient toujours différentes entre elles; quelques-unes de celles qui sont entrées dans un certain ordre, peuvent se retrouver dans un autre; ainsi lorsque des angles décroîtront toujours depuis celui de 180 selon une certaine progression, quelques-uns de ceux qui étoient compris dans la progression soudouple 16, 8, 4, 2, 1, &c. se retrouveront dans la progression souquadrouple, 16, 4, 1, &c. mais on reconnoît assés aisément en quels endtoits ces répétitions doivent arriver, & comme elles ne sont qu'en nombre fini dans chaque ordre, elles y laissent l'infini en son entier.

Ce Problème des Diagonales du Parallelogramme a du rapport avec celui du Triangle rectangle en nombres, qui a tant exercé les Arithmeticiens, & les Algebristes. Ils ont cherché des regles pour déterminer tous les nombres qui pris trois à trois eussent la propriété du Triangle rectangle, c'est-à-dire, qui fussent tels que le carré de l'un fût égal aux carrés des deux autres, & ils ont infiniment étendu & enrichi cette Theorie. Ici, il est question de trouver une somme de deux carrés doubles de deux autres carrés données, & ce peut être une assez ample matiere à de nouvelles recherches. On peut observer en passant que comme les nombres 3, 4, 5, sont les plus simples qui ayent la propriété du Triangle rectangle, ainsi 5 & 10 pris pour côtés, & 9 & 13 pour Diagonales sont les plus simples qui fournissent un exemple de la Proposition de M. de Lagni.

Il en fait aussi une application à un sujet plus détourné que les mouvemens composés, & auquel on peut croire qu'il s'intéresse davantage. Nous avons dit dans l'Histoire

de 1703 \*, que M. de Lagni trouve que les Logarithmes, tels qu'ils sont jusqu'à présent, sont défectueux & arbitraires, & qu'il prétend leur en substituer d'autres plus parfaits & naturels, tirés de son Arithmetique Binaire. D'un autre côté, il faut sçavoir que l'Hiperbole prise entre ses Asimptotes a cette propriété, que si on prend une Asimptote pour diamètre, qu'on la divise en parties égales, & que par toutes ces divisions qui formeront autant d'Abscisses toujours croissantes également, on tire des Ordonnées à la Courbe, paralleles à l'autre Asimptote, les Abscisses représenteront la suite infinie des Nombres naturels, & les espaces Asimptotiques ou Hiperboliques correspondans, représenteront la suite des Logarithmes de ces Nombres. Pour prendre quelque idée de cette vérité, il n'y a qu'à considérer que le rapport Arithmetique est toujours le même dans la suite des Nombres naturels, puisqu'ils croissent toujours d'une unité, & que leur rapport géométrique décroît toujours, de sorte qu'entre deux nombres voisins il est toujours d'autant plus petit, qu'ils sont plus avancés dans la suite, ou, ce qui est la même chose, plus grands. Ainsi le rapport géométrique de 99 & de 100 est plus petit que celui de 9 & de 10, ou, ce qui revient au même, 99 & 100 approchent davantage de l'égalité, non pas arithmetiquement, mais géométriquement, parce que 1 qui est la différence de part & d'autre est moins considérable par rapport à 100, que par rapport à 10. Si la suite naturelle pouvoit avoir une fin, on conçoit que 1 différence des deux derniers nombres seroit infiniment petit par rapport à eux, & par conséquent les laisseroit égaux. Les Logarithmes sont des nombres qui par leur rapport Arithmetique représentent le rapport géométrique des nombres naturels, & par conséquent le rapport Arithmetique des Logarithmes décroît toujours, quoique les Logarithmes croissent toujours, ainsi que les nombres naturels correspondans, ou, ce qui est la même chose, les Logarithmes croissent toujours, mais de moins en moins. Or, telle est aussi la ma-

ture de l'espace compris entre une Asimptote & l'Hiperbole, qu'il croît à l'infini, mais toujours de moins en moins, parce que l'Hiperbole s'approche toujours davantage de l'Asimptote, & il croît de moins en moins selon la même proportion que les Logarithmes.

Cette propriété se trouve dans toutes les différentes Hiperboles, car on sçait que par un même point du Cône pris pour sommet, il se peut former une infinité d'Hiperboles différentes, aussi-bien que d'Ellipses, au lieu qu'il ne se pourroit former qu'une Parabole ou qu'un Cercle. Les Asimptotes de ces différentes Hiperboles sont toutes entre elles un angle différent, & leurs espaces Asimptotiques, quoique tous infinis, sont inégaux, parce que deux Hiperboles différentes, dont chacune s'approche toujours de plus en plus de ses Asimptotes, ne laissent pas de s'en approcher inégalement. De là vient qu'une Asimptote de chacune de ces deux Hiperboles ayant été divisée en parties égale entre elles, & égales aux divisions de l'autre, les espaces Asimptotiques correspondants seront inégaux, & par conséquent à la même suite des nombres naturels, il peut répondre différentes suites de Logarithmes; & en effet, puisque la manière de construire les Tables des Logarithmes est de prendre 0 ou 00 ou enfin tant de Zero qu'on voudra pour Logarithme de 1; 100 ou 1000 &c. pour Logarithme de 10; 200 ou 2000 &c. pour Logarithme de 100, & toujours ainsi en prenant les nombres naturels selon la progression de 1 à 10, après quoi les Logarithmes de tous les nombre interposés entre 1 & 10, entre 10 & 100 &c. sont déterminés par ces premiers Logarithmes des nombres 1, 10, 100 &c, il est clair que si au lieu de la progression de 1 à 10, on eût pris, par exemple, celle 1 à 8, & qu'on eût donné aux nombres 1, 8, 64 &c. les mêmes Logarithmes qu'on a donnés dans l'autre hypothèse aux nombres 1, 10, 100 &c. les Logarithmes des nombres interposés 2, 3, 4, &c. auroient été dans la seconde hypothèse différents de ceux de la première, & par conséquent la même suite des  
nombres



nombres naturels peut recevoir différentes suites de Logarithmes, ou, ce qui revient au même, une infinité d'Hiperboles différentes peuvent représenter par leurs espaces asymptotiques les Logarithmes des nombres naturels.

Pour déterminer la suite des Logarithmes, il faut donc faire un choix arbitraire de quelque Hiperbole, mais il est certain que ce choix sera d'autant meilleur, qu'il sera moins arbitraire, & plus fondé en raison. Or la plus simple de toutes les Hiperboles est l'*équilatere*; c'est-à-dire, celle dont les Asymptotes font entre elles un angle droit, car quand deux lignes peuvent faire entre elles différents angles, le droit est en quelque sorte le plus naturel de tous, & c'est incontestablement celui qui produit dans les figures les propriétés les plus simples. De là M. de Lagny conclut que pour régler les Logarithmes, il auroit fallu choisir l'Hiperbole équilatere, & on auroit trouvé ceux que son Arithmétique Binaire lui donne.

Au lieu de suivre cette Arithmétique Binaire, ou, ce qui est la même chose, de couper toujours la suite des nombres de deux en deux, on l'a coupée de dix en dix, & on s'est assujéti à cet usage dans la détermination des Logarithmes. Ceux que l'on a établis, répondent donc à une autre Hiperbole que l'équilatere, & M. de Lagny a cherché quelle est cette Hiperbole, c'est-à-dire, quel angle font ses Asymptotes. Comme toute Hiperbole peut être décrite par le moyen d'un Parallelogramme pris sur ses deux Asymptotes, & dont l'angle des Asymptotes est un des Angles, M. de Lagny trouve par sa Proposition quelles sont les Diagonales du Parallelogramme qui a formé l'Hiperbole à laquelle répondent les Logarithmes communs, & par ces Diagonales il détermine que l'angle des Asymptotes de cette Hiperbole de  $25^{\circ} 44' 25''$  à peu près. La grandeur de cet angle irrégulière & bisarre, pour ainsi dire, fait assez voir qu'il n'auroit pas dû être préféré à l'angle droit, & que les Logarithmes dont l'Hiperbole équilatere seroit le modèle, mériteroient le titre de *naturels*, à l'exclusion de tous les autres, qui ne pourroient

être traités que d'arbitraires. Cela justifie ce que M. de Lagny a déjà avancé plusieurs fois sur les Logarithmes communs, & ce n'est peut-être pas un des moindres fruits de la Proposition des Diagonales des Parallelogrammes, que de lui avoir aidé à mettre sa pensée & sa prétention dans tout son jour.

## S U R   L E S   R A Y O N S

### DES DEVELOPÉES DES COURBES

*Conçues comme formées d'Elemens Courbes.*

V. les M.  
P. 490.  
P. 65. &  
6.

**N**Ous avons dit ci-dessus\* que quand les Courbes se formoient par des Mouvemens composés, & que l'un des deux étoit accéléré ou retardé, on ne pouvoit se dispenser de regarder les Arcs infiniment petits ou Elemens de la Courbe, comme courbes eux-mêmes. Jusqu'ici on les a pris pour droits dans le Système des infiniment petits, & dans tous les calculs qui en dépendent, & comme cette diversité d'hypothese pourroit faire quelque embarras, M. Varignon donne dans la recherche des Rayons des Développées un exemple de la maniere dont il faut operer sur les Elemens courbes.

Il est bien vrai, & nous l'avons dit dans l'Hist. de 1701.  
\* en traitant cette matiere, & ci-dessus à l'endroit déjà cité, que les Géometres avoient avancé qu'une Courbe formée par le développement d'une autre, pouvoit être conçue comme composée d'une infinité de petits arcs circulaires tous décrits de differens centres, & sur differens rayons. Mais cette idée n'a été proposée que pour mieux faire entendre la génération des Courbes par le développement, & elle n'a jamais servi de principe aux calculs géometriques que l'on a faits pour trouver les rayons des Développées. Elle le devient maintenant pour la premiere fois entre les mains de M. Varignon.

Quand on imagineroit une composition de mouvemens qui produiroit un Element courbe d'une autre courbure que la circulaire, parabolique, par exemple, ou hyperbolique, on seroit toujours en droit de le regarder comme circulaire, parce qu'étant infiniment petit il n'auroit nulle propriété particuliere ni de la Parabole ni de l'Hiperbole, & que tout son caractere géometrique consisteroit en ce que le rayon de la Développée lui seroit perpendiculaire, ce qui est une propriété du Cercle. M. Varignon prend donc tous les Elemens courbes pour les circulaires.

Quelque Element supposé courbe que l'on prenne dans une Courbe quelconque, il sera donc toujours commun & à cette Courbe, & à un Cercle qui auroit pour rayon celui de la Développée, ou, ce qui est la même chose, le Cercle touchera la Courbe en cet Element-là. Mais comme le rayon de la Développée varie incessamment, & infiniment peu à chaque instant, un autre Cercle décrit sur un rayon infiniment proche du premier, & plus grand ou plus petit d'une difference infiniment petite, aura aussi l'arc circulaire immédiatement suivant commun avec la Courbe, ou la touchera en cet Element. Et parce que deux Cercles décrits de deux centres infiniment proches, & sur deux rayons infiniment peu differens, ne sont que le même Cercle fini; le même Cercle décrit sur un rayon quelconque de la Développée, aura deux de ses arcs infiniment petits communs avec la Courbe, ou, ce qui revient au même, exactement appliqués sur deux arcs de la Courbe; & si l'on veut pousser encore cette idée plus loin, les deux arcs circulaires à cause de la difference infiniment petite de leurs rayons, seront appliqués sur ceux de la Courbe, l'un en dedans, l'autre en dehors, de sorte que le même Cercle ayant été *interieur* à l'égard de la Courbe, & l'ayant touchée en un point, lui deviendra *exterieur* dans le point immédiatement suivant, & par conséquent la coupera en la touchant encore. Avoir un arc infiniment petit, ou un seul point commun avec une Cour-

be, c'est la *toucher*, mais avoir deux arcs ou deux points communs l'un auprès de l'autre, c'est la *baiser*, selon le langage des nouveaux Géometres, qui par la précision que donnent les infiniment petits ont distingué le *baisement* du simple attouchement. Delà vient qu'un Cercle décrit sur un rayon quelconque de la Developée d'une Courbe est appelé Cercle *baisant* ou *osculateur*, & le rayon de la Developée rayon *osculateur*.

M. Varignon trouve en plusieurs manieres différentes le rayon sur lequel est décrit l'arc circulaire quelconque d'une Courbe quelconque. Il trouve même pour ce rayon plusieurs formules, mais parfaitement équivalentes, & qui seulement dans les applications particulieres peuvent avoir quelque avantage l'une sur l'autre pour la commodité du calcul.

Ces formules consistent dans des rapports de trois infiniment petits, de l'arc circulaire de la Courbe, de la difference de l'Abcisse, & de la difference de l'Appliquée correspondante, ou même dans les rapports de leurs infiniment petits. Il n'y a point de Courbe dont la nature ne puisse être exprimée par la loi qui regle la variation de ces rapports, mais pour sçavoir quelle est la variation de deux de ces infiniment petits, il faut necessairement supposer que le troisieme ne varie point, & demeure *constant*; ainsi pour sçavoir selon quelle loi croissent ou décroissent les arcs d'une Courbes, & les differences des Appliquées, il faut supposer que la difference des Abcisses correspondantes, est toujours la même, c'est-à-dire, que les Appliquées dont on recherche la variation sont séparées par des intervalles infiniment petits égaux, & qu'à ces intervalles répondent les arcs de la Courbe. Cette supposition est la plus naturelle & la plus commune. Mais les deux autres qu'on pourroit faire seroient tout aussi recevables, car enfin toutes ces divisions sont entierement arbitraires. C'a été selon cette hipotese commune que feu M. le Marquis de l'Hopital dans l'Analise des infiniment petits a donné la formule générale des Rayons Oscula-

teurs, aussi n'est-elle générale que quand on prendra dans les Courbes la différence des Abscisses pour constante, hors delà, elle ne seroit plus d'aucun usage. Celles de M. Varignon ont cela de singulier & de nouveau qu'elles ne supposent rien de constant ; il est vrai que dans l'usage il faudra venir à prendre pour constant l'un des trois infiniment petits, mais ce sera celui que l'on voudra, & l'on verra aussi-tôt le changement que la supposition qu'on aura choisie produira dans les formules, qui en deviendront plus simples & plus commodes. Il n'est pas même nécessaire de traiter de constant l'un des trois infiniment petits précisément, il suffit de traiter ainsi quel qu'un des produits qu'ils font, soit entre eux, soit avec quelque grandeur finie, & par-là l'universalité de la formule est encore plus grande.

Pour trouver les rayons Osculateurs, en considérant les Elemens des Courbes comme courbes, il faut plus de Géometrie & de calcul, que si l'on avoit considéré ces Elemens comme droits, mais les formules viennent précisément les mêmes, & en effet, cela doit être ainsi ; puisque tout le caractère de ces Elemens par rapport aux rayons Osculateurs est la perpendicularité, qui convient également à une ligne droite ou courbe, ou plutôt ne convient à une courbe que dans un espace infiniment petit où elle est droite.

M. Varignon donne aussi les rayons Osculateurs, en prenant les Elemens pour droits. Ces nouvelles formules ne renferment rien de constant non plus que les autres, & laissent une libre entrée à toutes les suppositions. Il résout encore ce Problème par la voye de la *Synthese*, mais en prenant successivement pour constant l'un des trois infiniment petits. On sçait combien la *Synthese* est inférieure à l'*Analise*. Celle-ci est la source, & l'autre n'est que le ruisseau. On peut se contenter du ruisseau, mais ce n'est que lorsqu'on ne peut pas pénétrer jusqu'à la source.

**M**onsieur Carré a donné en trois manieres différentes la Quadrature d'une Courbe appellée *Folium* ou *Feuille*, à cause de son contour.

V. les M.  
p. 284

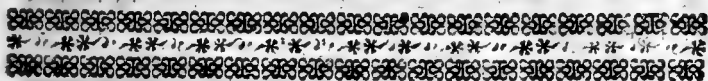
**M**onsieur Rolle a donne une Methode pour trouver les foyers des Lignes Géometriques, par rapport à la Dioptrique.

op 71. &  
liv.

**Q**uelque tems après que M. de la Hire eût fait part à l'Academie de sa Theorie des Roulettes, M. Nicole, Géometre déjà fameux, malgré sa grande jeunesse, fit voir aussi une Methode nouvelle qu'il a trouvée pour ces Lignes. Il résulte de tout ce que nous avons dit ci-dessus\*, qu'on ne peut considerer dans cette Theorie que trois Courbes, la Génératrice, la Base, la Roulette; M. Nicole a des Equations infiniment générales, par lesquelles deux de ces Courbes étant données, il détermine aussitôt la troisième, & cela, soit que le point décrivant se prenne sur la circonference de la Génératrice, ou au dedans, ou au dehors. L'Infini bien manié, principe ordinaire, & apparemment unique de l'universalité, a produit ces Equations, qui remplissent sur cette matiere la plus vaste curiosité de l'Esprit. Une consequence remarquable, & qui s'est présentée naturellement à M. Nicole, lorsqu'il a été sur cette voye, c'est que toute Roulette, formée par une Courbe Géometrique roulant sur elle-même, est Geometrique aussi, en quelque endroit que soit pris le point décrivant; ainsi voilà le nombre des Courbes Géometriques augmenté à l'infini, puisqu'il n'y en a aucune qui n'en puisse produire une infinité.

La Methode que M. Nicole exposa à l'Academie n'est qu'un échantillon d'un grand Ouvrage qu'il doit bien-tôt publier sur les Roulettes. Il y expliquera d'une maniere

nouvelle leurs propriétés déjà connues, & en découvrira qui ne le sont pas encore; il donnera les dimensions de leurs Surfaces & de leurs Solides, déterminera leurs centres de Pesanteur & d'Oscillation, & l'on s'attend à trouver dans tout le Livre une grande connoissance, non-seulement du calcul Differential, mais aussi de l'integral, qui est de toute la Géometrie moderne la partie qui a encore le plus de besoin d'être cultivée.



## ASTRONOMIE.

### SUR LES MOUVEMENTS

#### DE JUPITER ET DE MARS.

**L'**Astronomie demande un travail continu; jamais rien n'y est fixé de manière qu'il n'y ait <sup>V. les M. p 61. & 66.</sup> plus aucun lieu à la revision. Il faut toujours observer, soit pour s'assurer davantage des hypothèses qu'on a établies, soit pour y faire les changemens nécessaires. On pourroit dire que l'Astronomie est toujours en mouvement aussi bien que les Astres.

Ces sortes de revisions ne doivent être entreprises, que quand on a devant soi un grand amas d'observations, faites pendant une assez longue suite d'années. Le nombre n'en sauroit être trop grand, tant parce qu'en général chaque détermination qu'on peut faire sur une Planete en est plus exacte, que parcequ'il faut pour chaque détermination différente des observations faites en differens points du cours de la Planete, du moins pour une plus grande commodité de calcul, & pour plus de sûreté. Ainsi quand on veut déterminer ou l'Aphelie & le Perihelie, ou les Nœuds, les observations les plus avantageuses sont

celles qui se trouvent aux environs de ces points, ce qui est naturel, & il n'y auroit rien à desirer si en même tems la Planete, supposé qu'elle soit supérieure, avoit été opposée au Soleil, ou, ce qui revient au même, Perigée, c'est-à-dire, placée dans son moindre éloignement de la Terre, car alors à cause de cette proximité son mouvement auroit été beaucoup plus sensible, & il doit l'être le plus qu'il se puisse pour donner lieu de déterminer plus précisément des points invisibles, tels que le Nœud ou l'Aphele. Par les mêmes raisons, s'il s'agit de déterminer l'inclinaison de l'Orbe d'une Planete sur l'Ecliptique, il n'y a point d'observations plus favorables que celles qui se trouvent aux environs de la plus grande latitude de la Planete, & de son opposition au Soleil. Il est clair que c'est dans le tems de cette opposition qu'il faut prendre une Planete supérieure, pour observer ses Taches, & par-là reconnoître quelle est la durée de sa révolution sur son axe, & l'inclinaison de cet axe sur le plan de son Orbe, selon la methode que nous avons expliquée pour le Soleil dans l'Hist. de 1701 \*. S'il est question de déterminer par la seconde inégalité d'une Planete, c'est-à-dire, par la difference optique du mouvement de cette Planete vûe du Soleil ou vûe de la Terre, quelle est sa distance au Soleil comparée à celle de la Terre, les observations qui conviennent le mieux, sont celles de cette Planete prise en quadrature avec le Soleil. Car quand elle est ou. en opposition ou en conjonction avec le Soleil, son mouvement par rapport à la Terre est d'un jour à l'autre le moins inégal qu'il se puisse, & par consequent moins different à cet égard de ce qu'il seroit étant vû du Soleil, ou, ce qui revient au même, la seconde inégalité de la Planete est moins sensible. Elle l'est donc autant qu'elle le puisse être entre l'opposition & la conjonction, c'est-à-dire, dans les quadratures. Nous avons supposé ici que l'on connût ce que c'est que toutes ces differentes déterminations, expliquées dans l'Hist. de 1704 \*.

\* p. 101.  
& suiv.

\* p. 65. &  
suiv.

Ce qu'on a vû dans cette même Histoire que fit M. Maraldi



Maraldi sur Saturne, il l'a fait ensuite sur Jupiter & sur Mars. Ayant entre les mains un grand nombre d'observations exactes, dont les plus anciennes appartenoient à M. Cassini seul, & les plus nouvelles à M<sup>rs</sup> Cassini & à lui, & se voyant en état de trouver toujours dans ce grand nombre celles que demanderoient les differens besoins, il a examiné par rapport à Jupiter & à Mars les Tables astronomiques que Kepler a données. Les legers changemens que M. Maraldi juge qu'il y faut faire sur certains points, sont fort glorieux à ce grand Astronome. Ce détail ne nous regarde pas, non plus que celui de plusieurs déterminations nouvelles que M. Maraldi tire de ses observations. Nous nous arrêterons seulement à la parallaxe de Mars, parce qu'elle est importante pour le système général de l'Astronomie.

Par la fameuse Regle de Kepler, que de nouveaux Astronomes ont confirmée, ainsi qu'il a été dit dans l'Hist. de 1705 \*, on a les rapports des distances de toutes les Planètes principales au Soleil; on sçait, par exemple, que Jupiter en est plus de 5 fois plus éloigné que la Terre, Saturne un peu moins de 10 fois; mais pour changer ces rapports en grandeurs absolues, il faudroit avoir en lieuës la distance de quelqu'une des Planètes au Soleil ou à la Terre. On a voulu parvenir à cette connoissance par l'angle de la parallaxe que quelque Planete principale peut faire à l'égard de la Terre.

\* p. 118 & suiv.

Une Planete étant supposée à l'horison, on imagine deux lignes tirées à son centre, dont l'une part du centre de la Terre, l'autre d'un point quelconque de sa surface où est un Observateur. Il se forme donc un Triangle rectangle, dont un des angles aigus est au centre de la Planete, & a pour base le demi-diametre de la Terre que l'on connoît. Cet angle est la parallaxe, ou la difference optique qui est entre une Planete vüe du centre de la Terre, ou de sa surface. Si cet angle est connu, tout le triangle l'est par les regles de la Trigonometrie, & par consequent celui de ses côtés qui est la distance du centre de la

Terre à la Planete. Il est bon de remarquer ici que cet angle n'est jamais plus grand qu'à l'Horison, & que delà il va toujours en diminuant jusqu'au Zenith, où il s'anéantit entierement. Aussi la plus grande parallaxe est toujours l'horizontale, mais il n'est pas necessaire de l'avoir immédiatement, on la conclut sans peine de celle qu'on aura trouvée dans quelque autre point du Ciel. Il faut remarquer aussi que la ligne tirée de la surface de la Terre à la Planete, & qui est celle de notre rayon visuel, rapporte toujours la Planete à un point du Ciel plus bas, que celle qui est tirée du centre de la Terre, c'est-à-dire, que la parallaxe fait toujours baisser l'Astre.

Afin qu'une Planete puisse avoir une parallaxe, il est necessaire que dans ce Triangle que nous venons d'imaginer, le demi-diametre de la Terre ait quelque rapport sensible aux deux autres côtés qui sont la distance de la Planete au centre de la Terre, ou à sa surface. Si ce rapport est trop petit, il est nul à notre égard, & la parallaxe cesse absolument. C'est ce qui arrive aux Planetes de Saturne & de Jupiter, dont les distances sont infinies, par rapport au demi-diametre de la Terre qui n'est que de 1500 lieuës. Mais on a pas desespéré de la parallaxe de Mars, qui est plus proche de nous, pourvû cependant qu'on le prit dans le tems où il en est le plus proche, & où sa distance qui peut être de 13 ne fût que de 2.

Outre les distances absolües des Planetes au Soleil, & entre elles, que l'on auroit par la parallaxe de Mars, on auroit aussi la parallaxe du Soleil que l'on ne peut avoir par observation à cause du grand éloignement de cet Astre, & qui est cependant necessaire pour la précision d'une infinité de calculs. Car les parallaxes étant proportionnelles aux distances, la parallaxe de Mars donneroit celle du Soleil, puisque l'on sçait quel est le rapport des distances de Mars & du Soleil à la Terre.

Toutes ces connoissances que l'on peut tirer de la parallaxe de Mars, & qui ne peuvent guere venir par d'autres voies, la rendent donc fort précieuse aux Astronomes,

Aussi lorsqu'en 1672 M. Richer fut envoyé par l'Académie en l'Isle de Cayenne, sur les côtes de l'Amerique, pour y faire des observations, il fut chargé de s'attacher particulièrement à la parallaxe de Mars, qui devoit être alors dans son perigée. Etant arrivé à Cayenne, il comparoit Mars à une Etoile fixe la plus proche, & mesuroit exactement leur distance. Pendant ce même tems, & souvent aux mêmes jours, M. Cassini mesuroit à l'Observatoire la distance de Mars & de la même fixe. Quand M. Richer fut de retour en 1673, on compara les observations. Si Paris & Cayenne qui a environ 5 degrés de latitude Septentrionale, avoient eu la même longitude, & que Mars vût dans le même moment de l'un & de l'autre lieu, n'eût pas paru à la même distance de la fixe, il est certain que la difference eût dû être entièrement rapportée au grand éloignement des deux lieux des observations, & par conséquent on auroit eu une parallaxe *partiale* de Mars; je dis *partiale*, car elle eût été moindre que si Cayenne eût été sous l'Equateur & Paris sous le Pole, ce qui auroit donné sa parallaxe *totale*, ou horisontale. Mais on avoit égard à la difference de longitude entre Paris & Cayenne, qui étoit de 3 heures 39', & à la quantité dont Mars pendant ce tems-là devoit s'approcher ou s'éloigner de la fixe par son mouvement particulier, & cette réduction faite toute la difference de distance entre la fixe & Mars vût de Paris ou de Cayenne apparemment à la parallaxe *partiale* de Mars. Par cette voie on la trouva de 15", la totale ou horisontale de 25", celle du Soleil de 9"<sup>1</sup>/<sub>2</sub>, la distance de Mars perigée à la Terre de 11 ou 12 millions de lieux, celle du Soleil de 33 millions, son globe un million de fois plus gros que la Terre, &c. Il paroît étonnant d'abord que 15 secondes de parallaxe découvertes dans Mars, qui sont une grandeur presque imperceptible aux yeux & aux instrumens, donnent toutes ces grandeurs énormes, & presque immenses; cependant rien n'est plus facile que de le voir, & les Mathématiciens ne daignent presque pas s'y arrêter.

Comme il est rare que l'on ait de bonnes observations, faites en des lieux fort éloignés, telles que celles de M. Richer, on ne laisse pas de chercher & de déterminer sans ce secours la parallaxe de Mars, toujours lorsqu'il est périégée. On prend quelque nuits de suite à son passage au Meridien, c'est-à-dire, alors à minuit ou à peu près, sa différence d'ascension droite avec une étoile fixe la plus proche, & comme l'étoile n'a point de mouvement en ascension droite, on voit précisément quel est celui de Mars par la variation de sa distance à cette étoile. Alors Mars n'a point de parallaxe\*, puisqu'il est au Meridien, & toute la distance entre la fixe & lui est, pour ainsi dire, réelle.\*\* On prend ensuite cette même distance à quelque autre heure la plus éloignée de minuit qu'il se puisse, & si, comme il arrive effectivement, on la trouve différente de ce qu'elle doit être par le seul mouvement propre de Mars, qu'on suppose très-exactement établi, cette différence appartient à la parallaxe que Mars fait alors, & qui en le baissant vers l'Horison l'approche ou l'éloigne de l'étoile, selon qu'elle est posée à son égard. M. Cassini, inventeur de cette methode, la pratiquoit en 1672. pendant que M. Richer étoit à Cayenne, & trouvoit la parallaxe de Mars indépendamment de la comparaison qu'il devoit faire ensuite de ses observations avec celles de M. Richer. La même détermination faite par deux différentes voies, en devoit être plus sûre.

Cette dernière methode demande une saison où les nuits soient longues, parce que plus l'heure qui doit donner la parallaxe de Mars sera éloignée de minuit, plus la parallaxe sera sensible, & elle ne peut jamais l'être tant, qu'elle ne soit encore bien delicate. Par cette même raison, il ne suffit pas tout-à-fait que Mars soit dans son périégée, il est bon qu'il soit encore dans son perihelie ou aux environs, car il est visible que la Terre étant entre le Soleil & lui, il sera encore plus proche de la Terre, s'il est dans la partie la plus basse de son Orbe par rapport au Soleil.

\* En ascension droite, car il en a encore une en hauteur.  
\*\* En prenant seulement cette distance en ascension droite.

Depuis l'année 1672, toutes ces circonstances, presque absolument nécessaires, à cause de la grande subtilité de cette détermination, ne se retrouvèrent qu'aux mois de Septembre & d'Octobre 1704. Aussi M. Maraldi ne manqua-t'il pas cette occasion. Il détermina la parallaxe horizontale de Mars de  $24''$ , plus petite d'une seconde que celle qui avoit été déterminée par M. Cassini en 1672. Cette legere difference passeroit pour un accord surprenant dans de semblables recherches; mais il y a plus, cette difference n'en est pas une, Mars étoit un peu plus éloigné de son perihelie, & par conséquent de la Terre en 1704 qu'en 1672. Voilà donc les  $25''$  de la parallaxe de Mars confirmées, toute cette multitude de consequence qui s'en ensuivent.

M. Maraldi observa aussi dans le même tems les Taches de Mars, & verifia par là sa révolution autour de son axe en 24 heures 40', découverte par M. Cassini. Elle est difficile à déterminer, parce que les Taches de Mars changent beaucoup, non-seulement d'un perigée à l'autre, qui sont les seuls tems où l'on puisse les observer, mais même d'un mois à l'autre. Elles ont cela de commun avec les Taches de Jupiter, dont nous avons parlé dans l'Hist. de 1699\*, & la reflexion que nous fîmes alors en devient plus étendue. Il faut que les grandes parties de la surface de notre Globe terrestre, différentes entre elles, comme les Mers & les Continents, soient bien en repos les unes à l'égard des autres, & bien exemptes de changement, en comparaison de celles qui leur répondent dans les Globes de Jupiter & de Mars.

\* P. 784

## SUR LES REFRACTIONS.

**M**onsieur Cassini, & le P. Laval Jésuite, l'un de ses Correspondants sur l'Astronomie, & Professeur d'Hydrographie à Marseille, ont traité dans leur com-

v. les MQ  
P. 782

merce sçavant diverses matieres, dont la principale ou la plus instructive est la refraction astronomique.

Ce fut principalement à l'occasion de la mesure de la Terre, commencée par l'Academie en 1669, que l'on s'apperçût des différentes refractions d'un objet vû sur la terre. Elles sont d'autant plus grandes, qu'il est plus élevé, ou plus éloigné, plus grandes le matin qu'à midi, & qu'aux heures correspondantes après midi, différentes en differens jours, le tout sans aucune proportion bien connue. Tout cela peut s'expliquer par différentes couches de vapeurs repandues dans l'air, les inferieures plus grossieres que les superieures, plus mêlées ensemble & moins différentes, lorsque le Soleil a eu le tems d'agir sur elles. La quantité, la consistance & le mélange de ces vapeurs dépendent d'une trop grande combinaison de causes particulieres, pour nous permettre aucune détermination précise.

Il seroit de consequence dans l'Astronomie de connoître au juste les refractions des Astres à l'horison, ou, ce qui revient au même, la variation que les refractions causent à l'apparence de l'horison sensible, qu'elles élèvent plus ou moins. L'Observatoire du P. Laval à Marseille est commode pour cette recherche, parcequ'il est en vû de la Mer, & a par consequent un horison sensible qu'on peut appeller *veritable* en comparaison des horisons terrestres, qui sont presque toujours trop hauts, ou trop bas.

Le P. Laval a observé que l'horison de son Observatoire terminé à la Mer, n'est jamais plus bas que de 15 minutes, ni moins que de  $13\frac{1}{2}$ , c'est-à-dire, que l'arc de la circonference de la Terre, compris depuis l'Observatoire jusqu'à l'horison, varie entre ces grandeurs, d'où M. Cassini conclut, par le moyen du Rayon de la Terre connu allés exactement, que l'étendue de l'horison est de 7 petites lieues, & que l'Observatoire est élevé sur la surface de la Mer de 175 pieds.

C'est une chose remarquable, que quand la Mer a été grosse, ou que le Nord-Oüest, ou le Sud-Est ont été frais,

& que l'air a été rempli à l'horison d'une brume déliée, le P. Laval a trouvé ordinairement son horison plus bas, c'est-à-dire, que la refraction a été moindre, puisqu'elle l'a moins élevé. Cependant ces circonstances auroient pu faire croire que l'air plus chargé de vapeurs auroit dû la rendre plus forte.

Il sembleroit de même que la refraction d'un Astre vu au travers d'un nuage devoit être plus grande. Elle ne l'est pourtant pas, & c'est ce que M. Cassini & le P. Laval ont observé plusieurs fois. Delà M. Cassini conjecture qu'il pourroit y avoir dans l'air une *matiere refractive* differente de l'air.

D'un autre côté cependant les refractions paroissent avoir un certain rapport à la constitution de l'air. Le P. Laval trouve au Solstice d'Hiver la distance du Soleil à l'Equateur ou l'obliquité de l'Ecliptique moindre qu'il ne la trouve au Solstice d'Esté, ce qui apparemment vient d'une refraction plus grande en Hiver qu'en Esté. Toujours il est certain, comme nous l'avons dit dans l'Hist. de 1700 \*, \* p. 109; & suiv. que vers l'Equateur les refractions horizontales sont moindres que celles de notre climat d'environ un tiers, & que vers les 65 ou 66 degrés de latitude elles sont presque doubles des nôtres.

Entre les Tropiques, le Barometre en général s'éleve moins que dans les pais Septentrionaux. ce qui marque sûrement que l'air de la Zone Torride est plus léger, & ce plus de legereté s'accorde bien avec de moindres refractions. Mais d'ailleurs le Barometre ne s'éleve pas plus à Stokolm qu'à Paris, du moins selon les observations d'un certain nombre d'années, quoique les refractions de Stokolm aient toujours été plus grandes. Voilà bien des contrariétés apparentes, qui éloignent beaucoup l'établissement d'un système; il suffit maintenant de ramasser tous les sujets d'incertitude, & peut-être quand ils seront en assez grand nombre, produiront-ils quelque certitude, ou quelque vrai-semblance.

## SUR L'APPARITION

## D'UNE COMETE.

V. les M. **L**E Ciel confirme ce que nous avons dit dans l'Hist. de 1702 \*, que les Cometes qui étoient affés rares deviennent communes, depuis qu'il y a des Observateurs en plus grand nombre, & plus appliqués. Il a paru une Comete en 1698, deux en 1702, une en cette année, c'est-à-dire, 4 Cometes en 8 ans, mais il est vrai qu'elles n'ont paru qu'aux yeux des Astronomes, qui voudroient encore en voir plus souvent, & qu'elles n'ont pas servi à épouvanter les peuples.

P. 91 &  
s. 8  
\* P. 68.

Celle de cette année fut découverte par M<sup>rs</sup> Cassini & Maraldi, la nuit du 18 au 19 Mars, proche de la Couronne Septentrionale. Elle étoit de la grandeur d'une petite Etoile nebuleuse, plus claire vers le milieu que vers les bords, & mal terminée. On la reconnut pour Comete à son mouvement propre, qui fut bien-tôt apperçû.

Par les observations des trois premieres nuits, où l'on pût la voir, on déterminâ que sa route étoit sur un grand Cercle qui coupoit l'Ecliptique vers le milieu de la Vierge & des Poissons, & qui dans son plus grand éloignement de l'Equateur, en étoit à 55 degrés, que le mouvement de la Comete sur ce Cercle étoit alors de 4 degrés par jour, contre l'ordre des signes, & qu'elle s'approchoit toujours de l'Ecliptique, allant du Nord-Est au Sud-Oüest. On déterminâ même par la diminution sensible de son mouvement, qu'elle avoit dû être vers son perigée au tems de la premiere observation.

Cette détermination du perigée est tout-à-fait importante. Quand elle est une fois faite, M. Cassini suppose que la Comete au lieu de décrire un arc de Cercle ou de quelque autre Courbe, décrit la Tangente d'un Cercle concentrique à la Terre, qui a pour rayon la distance de



la Terre à la Comete dans son Perigée. Cette Tangente l'est dans le point du Perigée. Quoique ce soit une ligne droite, elle peut dans une grande étendue être prise pour l'arc même de l'Orbe de la Comete, à cause de l'énorme grandeur dont cet Orbe doit être. De plus, M. Cassini suppose le mouvement de la Comete égal, & en effet il l'est du moins par rapport à nous, tant à cause de la grande distance, que de la petite partie de l'Orbe qui nous est visible. Il prend ensuite par observation le nombre de degrés celestes que la Comete a parcourus en un jour depuis son Perigée, par exemple 4 degrés, il les pose sur la Tangente à compter depuis le Perigée, & par l'extrémité de cette étendue de 4 degrés, il tire au centre de la Terre une ligne qui est l'hypoténuse de l'angle droit formé par le rayon du Cercle & par la Tangente. Les 4 degrés sont la mesure, & dans la supposition présente, la base de l'angle du centre. Voilà donc un triangle rectangle dont les trois angles sont connus, & par conséquent le rapport de ses côtés. Dans l'exemple présent, si le rayon du Cercle est de cent parties, les 4 degrés valent 7 de ces parties, d'où M. Cassini tira cette conséquence, que le chemin de la Comete en un jour étoit les  $\frac{7}{100}$  de sa plus petite distance à la Terre. Enfin la Tangente étant divisée en parties qui soient toutes égale à ces 7, on a le chemin de la Comete pour chaque jour, & on peut le prédire, de sorte que si on a été plusieurs jours de suite sans la pouvoir observer à cause du mauvais tems, on sçait dès que le tems permet l'observatoire, à quel endroit du Ciel il faut pointer la Lunete pour retrouver l'Astre. Il est visible que cette division de la Tangente en parties égales donne la diminution du mouvement apparent de la Comete, à mesure qu'elle s'éloigne de son Perigée, car ces parties égales sont vûes sous des angles toujours plus petits, dont la diminution est aisée à connoître, & c'est par-là que M. Cassini prédit les lieux de la Comete dans le Ciel.

Comme la supposition de la Tangente décrite par la Comete est fautive, on ne trouve plus l'Astre sur cette li-

gne droite, quand son cours nous est visible dans une étendue considérable. Ainsi la Comete de cette année qui disparut le 16 Avril commençoit à s'écarter de la Tangente. Elle n'étoit plus même dans le plan d'un grand Cercle, c'est-à-dire, d'un Cercle dont le plan eût passé par le centre de la Terre.

A la fin de son cours, son mouvement n'étoit pas d'un degré par jour. Sa grandeur diminuoit en même tems.

Il parût en 1580. une Comete qui eût la même vitesse; & qui tint à peu près la même route. On en pourroit tirer une conséquence favorable à l'Hypothese des Retours.

La Theorie que nous avons rapportée, & par laquelle M. Cassini calcula le mouvement de cette Comete répondit aussi juste aux observations que les meilleurs Tables de la Lune. On pourroit être étonné que le cours de la Lune, qui est si proche de nous, & toujours exposée à nos yeux, ne nous fût pas plus connu que celui de ces Astres étrangers, si éloignés de nous, & le plus souvent cachés, mais la proximité même de la Lune & sa présence continuelle font la difficulté de connoître son cours.

## S U R L A P L A N E T E

### D E M E R C U R E.

V. les M.  
R. 25.

**M**ercure, qui à notre égard ne s'éloigne jamais plus du Soleil que de 28 degrés, en est ordinairement si proche, qu'il est perdu & abîmé dans sa lumière, & invisible à la vûe simple. Quand il se dégage des rayons du Soleil le plus qu'il est possible, il est encore le plus souvent dans les Crepuscules, & comme il est beaucoup plus petit que la Terre, on ne le decouvre pas sans peine, supposé même que le tems soit alors favorable.

Depuis l'usage des Lunetes, on l'a vû plus commodément, mais rarement encore, & presque toujours le matin ou le soir. Or les observations faites en ces tems-là sont

les moins sûres, & les moins propres à fonder des Tables du mouvement d'une Planete, à cause de l'inégalité des refractions horisontales, qui changent irrégulièrement le lieu apparent de l'Astre, & cet inconvenient est d'autant plus grand, que l'Astre est plus rarement apperçû, parcequ'on a moins d'observations qui se rectifient les unes les autres. Par cette raison, il faut voir Mercure proche du Meridien, s'il est possible,

L'avantage qu'on tire des Lunetes à l'égard de Mercure n'est pas qu'elles le grossissent, au contraire elles le font voir plus petit qu'à la vûe simple, ce qui a été expliqué en général dans l'Hist. de 1699 \*, mais elles donnent lieu de le voir malgré une clarté qui l'effaceroit, ainsi que nous avons dit dans l'Hist. de 1700 \*. M. de la Hire a cependant cherché long-tems Mercure dans le Meridien sans l'y pouvoir découvrir, peut-être faute d'avoir d'assés bonnes Tables de son mouvement, car pour trouver dans un si grand jour un aussi petit objet, il faut sçavoir assés précisément l'endroit où l'on doit le trouver, & y pointer la Lunete.

\* P. 79.

p. 116. &  
127.

Le mouvement du Soleil étant de tous les mouvemens celestes le plus exactement connu, on a tâché de voir Mercure le plus près du Soleil qu'il fût possible, afin de connoître plus sûrement par le lieu du Soleil dans le Ciel celui de Mercure. On a fait des observations de cette Planete sous la Zone Torride, où les Crepuscules plus courts que ceux de nos Climats la laissent voir plus près du Soleil. Mais malheureusement ces observations n'ont pas été assés sûres.

Les plus avantageuses de toutes ont été celles de Mercure vû sur le disque même du Soleil, car quelquefois dans sa conjonction *inferieure* il passe devant cet Astre, & en éclipse une très-petite partie, visible seulement à la Lunete. La premiere observation de cette espece qui ait jamais été faite fut celle de Gassendi en 1632, après quoi on en a fait encore cinq dans le Siècle passé.

M. de la Hire ayant devant lui ces observations, &

celles qu'il avoit faites lui-même de Mercure le matin & le soir, en dressa de si bonnes Tables qu'enfin avec leur secours il trouva Mercure dans le Meridien pour la première fois le 22 Octobre 1699. Après cela il ne lui fût plus fort difficile de le revoir dans la même situation.

Il publia en 1702 ses Tables pour toutes les Planètes, & maintenant M. de la Hire le fils leur compare plusieurs observations de Mercure dans le Meridien. il l'y a vu le 28 Juillet 1705. à 11<sup>h</sup> 31' du matin, & par conséquent éloigné seulement du Soleil de 7 degrés à peu près. En même tems il compare aux Tables de M. de la Hire ce que donnent les Tables de Kepler, estimées de tous les Astronomes avec tant de justice. Il est naturel que celles de M. de la Hire l'emportent, fondées comme elles sont sur des observations en plus grand nombre, & sur les observations singulieres de Mercure vû dans le Soleil, que Kepler n'avoit pas; aussi voit-on le plus souvent qu'elles s'éloignent beaucoup moins du Ciel, & elles s'en éloignent si peu que ce sera une espece de merveille pour ceux qui connoissent Mercure.

Il ne faut pas oublier ici que quelquefois M<sup>s</sup> de la Hire n'ont pû découvrir Mercure au Meridien, quoiqu'alors il fût plus éloigné du Soleil, & par conséquent plus facile à découvrir, que dans d'autres tems où ils l'avoient vû, & cela, sans pouvoir soupçonner qu'il y eût de la faute des Tables. Peut-être Mercure, aussi-bien que le cinquième Satellite de Saturne, qui devient invisible en certains tems\*, a-t'il une partie considerable de son globe plus obscure que le reste, c'est-à-dire, moins propre à réfléchir vers nous la lumiere du Soleil.

\* V. l'HIST.  
de 1705. F.  
R216



## SUR LES APPARENCES

## DU CORPS DE LA LUNE.

**D**Epuis les Telescopes, la Lune est un objet tout nouveau pour nous. Voici quelles en sont les principales apparences. V. les M.  
p. 107.

1°. Elle a une infinité de montagnes plus hautes que les nôtres, à proportion de son globe, près de 60 fois plus petit que celui de la Terre. On voit l'ombre de ces montagnes, & on la voit changer selon les differens aspects du Soleil.

2°. Elle a des cavités ou lacunes, pareilles à celles que laisseroient nos Mers sur la surface de la Terre, si elles étoient anéanties, mais moins continuës, moins grandes, en beaucoup plus grand nombre, & plus profondes. Ce sont comme une infinité de grandes fosses. Par conséquent la surface de la Lune n'est pas, ainsi que celle de la Terre, à peu près égale & de niveau, aux montagnes près, elle a de plus ces especes de fosses, qui y sont creusées en mille & mille endroits.

3°. Il y a d'autres endroits qui sans être des cavités paroissent obscurs, & ce sont ceux-là que l'on pourroit prendre pour des Mers. Mais M. de la Hire remarque qu'à les examiner de plus près ils ont aussi des cavités, ce qui ne peut guere convenir à un liquide. Il n'y aura donc point de Mers sur la Lune, & ces endroits obscurs seront seulement de grands Pais dont la terre sera naturellement plus noire.

4°. Ordinairement de grandes montagnes bordent les cavités.

5°. Des quadratures à l'opposition, les apparences de la surface de la Lune changent à tel point qu'à peine sont-elles reconnoissables. Un grand nombre de montagnes & de cavités qui se distinguoient aisément, ne se distinguent

plus du tout, ce qui vient, selon M. de la Hire, de ce que ces montagnes étant éclairées de côté dans les quadratures, leurs éminences devenoient sensibles à nos yeux, au lieu qu'elles ne le sont plus, quand elles sont éclairées en face, de la même manière à peu près, que la saillie des figures d'un bas-relief placé à une distance mediocre est plus aisée à voir quand le jour y donne de côté. De plus, quantité d'endroits qui dans les quadratures ne sont que de petites cavités noires, à peine sensibles, deviennent dans l'opposition très-lumineux & très-brillants, & il y en a tel qui l'est tant qu'on a cru qu'il devoit jeter des flammes comme le Mont-Etna. M. de la Hire explique assés naturellement ce Phenomene, en supposant que la figure interieure de ces cavités est à peu-près spherique, & leur superficie blanche & fort raboteuse. Ces especes de grands Miroirs concaves n peuvent nous renvoyer la lumiere du Soleil que quand ils en sont vûs à plan, & ils la renvoient de tous côtés, parceque leur surface est raboteuse, & très-vivement, parcequ'elle est blanche. En joignant ensemble le changement qui arrive à l'apparence de ces cavités, & la difference de beaucoup de cavités & de Montagnes qui s'efface en même tems, il est aisé de voir combien la Lune doit-être differente d'elle-même du tems à l'autre.

Pour s'assurer de ces idées, M. de la Hire fit autrefois une representation en relief d'une petite partie de la Lune, telle qu'il l'imaginoit, & il vit qu'en différentes expositions au Soleil, elle répondoit assés bien aux apparences qu'il vouloit expliquer.

6°. Depuis près de 100 ans que l'on a les Telescopes, il ne doit pas être arrivé de grands changemens sur la surface de la Lune. Car M. de la Hire démontre qu'avec une Lune de 25 picds, un espace qui ne seroit pas plus grand que Paris, y seroit fort sensible, & par consequent s'il s'y étoit fait quelque grand changement, qui eût occupé seulement une pareille étendue, on l'auroit vû. Il n'en est pas ainsi de Jupiter & de Mars \*. Il convient assés à une Pla-

neté qui n'a point de Mers, que sa surface soit exempte de grands changemens.

7°. Il lui convient aussi de n'avoir point d'Atmosphère, & en effet il ne paroît pas que la Lune en ait, du moins sensiblement. D'habiles Observateurs ne s'aperçoivent point que les rayons d'une Etoile fixe, qui en sera tout proche, & qui touchera son disque, souffrent aucune refraction.

## SUR UNE NOUVELLE ETOILE

### QUI PAROIT ET DISPAROIT.

**R**ien ne seroit plus naturel que de croire exemptes de V. les M. F. 115.  
 changement ces Regions immenses, où les Étoiles fixes semblent suspendues. Depuis une longue suite de Siècles, le spectacle en est toujours le même, mais il ne l'est qu'à des yeux peu éclairés ou peu attentifs, & maintenant qu'on observe le Ciel avec un plus grand soin, & de nouveaux secours, on voit qu'il a sa part des changemens, qu'on croyoit n'être que sublunaires. Il disparoît des Étoiles qui ont été vûes par les anciens, il en paroît de nouvelles, il y en a qui disparoissent & reparoissent, & quelques-unes dans de périodes assez réglées.

Auroit-on pensé qu'il n'y a pas dans le Ciel beaucoup de Constellations, où depuis cent ans il ne soit arrivé quelque changement sensible? M. Maraldi a remarqué, il y a déjà quelque tems, que la Region où il en arrive le plus est la Voie de lait, comme si dans cette fourmillier de petites Étoiles il regnoit plus de mouvement & d'agitation.

Dans l'espece de celles qui paroissent & disparoissent assez régulièrement, tout le monde connoît l'Étoile de la Baléine, dont la révolution est ordinairement de 11 mois, & celle du Cigne, dont la révolution est de 13. M. Maraldi en a découvert dans l'Hydre une troisième, dont il a trouvé que la révolution étoit de 2 ans.

Les Etoiles fixes étant autant de Soleils, car à l'énorme distance où elles sont, & que M. Huguens fait 27664 fois plus grande que celle de la Terre au Soleil, elles ne brillent pas d'une lumière réfléchie; il faut ou que ces Soleils qui paroissent & disparoissent ayent un mouvement par lequel ils s'approchent & s'éloignent de notre monde, ce qui n'est guere vrai-semblable, puisqu'il semble qu'ils devroient avoir tous un pareil mouvement, ou que leurs globes soient en partie lumineux, en partie obscurs, & qu'ils tournent sur leurs axes dans les tems où se fait la periode de l'apparition. Cette ingenieuse hypothese de feu M. Bouillaud est la plus recevable, & elle a été depuis appliquée à de pareils Phenomenes, comme au cinquième Satellite de Saturne. Il est fort possible que dans ce nombre infini de Soleils, il y en ait qui ne soient que des demi-Soleils, & d'autant plus que notre Soleil lui-même a des taches, qui le réduiroient à n'être qu'un demi Soleil, si elles étoient fixes & plus étendues. En cas que des Planetes habitées tournent autour de tous les Soleils, il est aisé de s'imaginer quel est l'effroy de habitans, aux yeux de qui leur Soleil disparoit pour un tems considerable, ou plutôt quelle est la tranquillité avec laquelle ils voyent un spectacle ordinaire pour eux, & qui seroit terrible pour nous.

Les révolutions qu'on est obligé de donner aux Etoiles de la Baleine, du Cigne, & de l'Hydre sur leurs axes en 11 mois, 13 mois, & 2 ans sont beaucoup plus longues que celle du Soleil, qui n'est que de 27 jours & demi. Mais il ne paroît pas qu'on puisse tirer de là aucune consequence pour la proportion de la grosseur des Globes, comme si les plus grands employoient plus de tems à tourner. Dans notre Monde, Jupiter mille fois plus gros que la Terre, tourne cependant plus de deux fois plus vite.

Les Etoiles qui paroissent & disparoissent sans révolutions réglées, peuvent être des Soleils dont les Taches soient fort grandes, mais non pas fixes, & peut-être même capables de s'évanouir entièrement. Celles de notre  
Soleil



Soleil nous donnent lieu d'imaginer sur cette matiere un assés grand nombre de varietés.

## SUR LES TROIS ECLIPSES

### DE CETTE ANNEE.

**L**A premiere des trois Eclipses de cette année a été lunaire. Le commencement qui avoit été déterminé dans la connoissance des tems à 3<sup>h</sup> 1' après minuit, 28 Avril, ne pût être observé à cause de la pluie & des nuages, non-plus que plusieurs autres phases. M<sup>rs</sup> Cassini & Maradi observerent la fin à 3<sup>h</sup> 3', & la grandeur de 5 doigts 5 2'. M<sup>rs</sup> de la Hire observerent la fin à 3<sup>h</sup> 4', & la grandeur de 5 doigts 40'. V. 1<sup>er</sup> M.  
P. 155. 157.  
α 4<sup>o</sup> 1<sup>o</sup>.

Les observations de cette Eclipsé, quoiqu'en petit nombre, & même un peu douteuses, n'ont pas laissé d'être d'un grand usage. Heureusement le P. Boutin Missionnaire Jesuite étant alors au Port de Paix dans l'Isle de S. Domingue observa aussi, & il en a envoyé un petit Memoire au P. Gönye, qui l'a communiqué à l'Academic. Quoique le P. Boutin n'ait observé qu'avec sa montre, & à la vûe, la grandeur de l'Eclipsé qu'il a marquée à 10' près de M<sup>rs</sup> de la Hire, a fait ajoûter foi à ses autres observations. M. de la Hire a pris celle qu'il a faite de la fin de l'Eclipsé à 9<sup>h</sup> 40' du soir le 27 Avril au Port de Paix, & la comparant à l'observation correspondante de Paris, il en conclut la difference de longitude de ces deux lieux de plus de 81 degrés, au lieu que les meilleures Cartes que nous ayons jusqu'à present ne la marquent que d'environ 75.

Par les observations que les Jesuites Missionnaires ont faites en divers lieux de l'Orient, il n'y a pas encore 20 ans, on a trouvé les differences de longitude beaucoup moindres que ne les marquoient les Cartes les plus estimées, & l'Asie s'est rapprochée de nous de plus de 500 lieues. Maintenant voici tout au contraire l'Amerique qui s'en

éloigne, & les 6 degrés dont l'Isle de S. Domingue est plus occidentale qu'on ne pensoit, pris sous l'Equateur, valent 150 lieues moyennes de France. Mais pourquoi la Geographie est-elle tombée à l'égard de l'Asie & de l'Amerique dans des erreurs opposées? M. de la Hire croit que cela vient de ce que les déterminations des longitudes dans les Cartes n'ont pas été fondées jusqu'à présent sur des observations astronomiques, mais sur l'estime des Navigateurs, qui ont cru les lieux d'autant plus éloignés que la navigation étoit plus difficile; or il est certain qu'elle l'est plus d'ici en Asie qu'en Amerique. On pourroit ajouter qu'à l'égard de l'Asie l'erreur excessive de Ptolomée a influé sur les Cartes modernes, telles que celles de M<sup>rs</sup> Sanson & Duval. M. Cassini a remarqué, il y a déjà du tems, que selon Ptolomée la Chine seroit de plus de 45 degrés plus orientale qu'elle n'est effectivement, & il est assez naturel que l'on n'ait pas osé faire d'abord à la Geographie de Ptolomée une aussi grande correction qu'il auroit fallu, & que l'on ait conservé quelque prévention pour le grand éloignement de la Chine. Peut-être est-ce par cette raison que du côté de l'Amerique l'erreur, qui a eu ce principe de moins, n'a pas été si grande.

V. les M.  
P 165. 169.  
172. 249.  
La seconde Eclipsé de cette année suivit la premiere d'aussi près qu'il soit possible, puisqu'il n'y eût que l'intervalle de la Pleine Lune à la Nouvelle Lune. Elles furent encore d'autant plus proches, qu'au tems de la seconde la Lune étoit vers son Perigée, & par conséquent dans sa plus grande vitesse, & alors son mouvement vrai surpassa le moyen presque autant qu'il le puisse surpasser. Cette seconde Eclipsé fut donc solaire, & elle arriva le 12 May au matin à Paris.

L'Astronomie peut se venter, & elle conservera cette gloire dans les siècles à venir, que jamais phenomene celeste n'a eu de plus grands & de plus illustres Observateurs. Le Roi voulut voir faire les observations par des Astronomes de l'Academie, & pour cela M. Cassini le fils & M. de la Hire le fils allerent à Marli, avec tous les in-

strumens necessaires. Toute la Maison Royale & toute la Cour furent témoins des operations, & Monseigneur le Duc de Bourgogne, qui fait bien voir que les Sciences peuvent trouver leur place parmi les occupations des plus grands Princes, déterminâ lui-même plusieurs Phases, le commencement, par exemple, qui fut douteux à cause des nuages, & qu'il fixa par une estime fort juste à  $8^h 26'$ . La fin fut à  $10^h 41'$ . Du diametre apparent du Soleil divisé en 12 doigts, il y en eut 11 couverts dans la plus grande obscurité, à quelque minutes près, chaque doit ayant 60 minutes.

Quoiqu'il ne nous restât que la 1<sup>re</sup> partie du diametre du Soleil, la lumiere, qui étoit à la verité d'une pâleur effrayante & sinistre, ne laissoit pas d'être encore assez grande, & tous les objets se distinguoient aussi facilement que dans le plus beau jour. Comme les espaces compris dans des cercles differens sont en même raison que les quarrés des diametres, si l'espace qui étoit encore visible dans le disque du Soleil eût été parfaitement circulaire, nous n'aurions eu que la 144<sup>me</sup> partie de la lumiere que nous avons ordinairement, mais cet espace étant un peu plus grand à cause des cornes de l'Eclipse, il nous resta aussi un peu plus de lumiere, mais nous en eûmes moins que Saturne, qui étant 10 fois plus éloigné du Soleil que nous, n'en a que 100 fois moins, & cela nous doit assurer que cette Planete malgré son grand éloignement du Soleil en est suffisamment éclairée, quand même ses Habitans n'auroient les yeux faits que comme nous.

Au tems de cette Eclipse le Soleil étoit vers son Apogée, aussi-bien que la Lune vers son Perigée; & par conséquent le diametre apparent du Soleil étoit à peu-près le plus petit, & celui de la Lune le plus grand qu'il puisse être, circonstance qui rend l'Eclipse plus grande, & sa durée plus longue. L'excès du diametre apparent de la Lune sur celui du Soleil étoit environ de  $2\frac{1}{2}$ .

M. Cassini ne manqua pas d'employer la Methode qu'il a inventée depuis long-tems pour tracer le chemin de

l'ombre de la Lune sur la Terre, & déterminer par-là tous les lieux qui ont vû l'Eclipsé, soit totale, soit partielle, soit centrale ou non, & les differens tems où ils l'ont vûë.

Dans l'Eclipsé solaire du 23 Sept. 1699 rapportée par l'Histoire de la même année \*, Il avoit décrit le mouvement de l'ombre d'Occident en Orient déclinant vers le midi, & l'avoit fait commencer par les parties Orientales de l'Amerique Septentrionale, & finir à la partie Occidentale de la Chine, après avoir traversé le milieu de l'Afrique & l'Equateur. Dans l'Eclipsé de cette année, le mouvement de l'ombre fut d'Occident en Orient déclinant vers le Septentrion, il commença dans l'Océant Atlantique en dedà de l'Equateur & de l'Amerique, traversa la Méditerranée, alla jusques dans la grande Tartarie, & du côté du Septentrion une partie de l'ombre tomba hors de la Terre, aussi-bien que dans l'Eclipsé de 1699. Ces deux Eclipses étant comparées ensemble, l'ombre de la première alloit du Nord-Oüest au Sud-Est, & celle de la seconde du Sud-Oüest au Nord-Est, & si elles avoient laissé des traces, elles se croiseroient en Pologne.

Cette difference de la direction des deux mouvemens est produite par la differente situation qu'avoient à l'égard du Soleil les signes d'où venoit la Lune. Quand elle vient se joindre au Soleil, elle vient toujours d'un signe ou d'un degré plus occidental que celui où est le Soleil, mais ce degré plus occidental peut-être ou au midi ou au Septentrion du Soleil. Il est très-aisé de faire l'application de cette remarque.

Dans l'endroit déjà cité de l'Hist. de 1699, nous avons dit que le mouvement de l'ombre de la Lune sur la Terre est plus rapide que celui d'un boulet de Canon dans l'air. Cette prodigieuse vitesse de l'ombre vient de ce que tandis que la Lune parcourt un degré de son Orbe, son ombre parcourt sur la Terre une espace égal. Il faut donc voir ce que vaut un degré de l'Orbite de la Lune appliqué sur la circonférence de la Terre. Les circonférences de deux Cercles étant comme leurs rayons, & la distance de la

\* p. 76. &  
suiv.

Lune à la Terre, ou, ce qui est la même chose, le demi-diametre de son Orbite étant environ de 60 demi-diametres de la Terre, un degré de l'Orbite de la Lune vaut 60 degrés d'un grand Cercle de la Terre, ou 1500 lieues. Or la Lune parcourt un degré de son Orbite environ en 2 heures, ce qui donne à son ombre une vitesse de 12 lieues par Minute, & dans ce même tems un boulet de Canon ne parcourt que près de 3 lieues. Nous n'entrons point ici dans les circonstances particulieres, qui peuvent faire varier la vitesse de l'ombre, telles que sont les inégalités du mouvement de la Lune, ses différentes distances à la Terre, la différente obliquité de la projection de l'ombre sur différentes parties de la surface du globe terrestre, la diversité même des refractions des rayons du Soleil.

Le Languedoc, la Provence, & le Dauphiné se sont trouvés sur la route de la ligne qui partageoit par le milieu l'ombre de la Lune le 12 Mai, c'est-à-dire, qu'ils ont vû l'Eclipse totale, & même centrale. Les lieux qui voyent une Eclipse totale peuvent ne la pas voir centrale, parce que la Lune peut couvrir entierement le Soleil, sans que la ligne tirée du lieu de l'observation au centre de la Lune passe aussi par le centre du Soleil. Mais ceux qui voyent une Eclipse centrale la voyent aussi totale, si elle peut l'être, & de la plus grande durée dont elle puisse être, du moins à peu de chose près. Les lieux qui voyent l'Eclipse totale la voyent plus ou moins longue, selon qu'ils sont de part & d'autre plus ou moins éloignés des lieux qui la voyent centrale.

A Arles l'Eclipse fut centrale, & dura totale pendant 5', ce qui est à peu-près la plus grande durée qu'une Eclipse totale de Soleil puisse avoir. Puisque le diametre apparent de la Lune excédoit celui du Soleil de  $2\frac{1}{2}$ , la Lune après qu'elle eut entierement couvert le Soleil, eut ce  $2\frac{1}{2}$  à parcourir dans son Orbite, avant que de pouvoir laisser la moindre partie du Soleil découverte. Or si la Lune fait 1 degré de son Orbite en 2 heures, elle en fait  $2\frac{1}{2}$  en 5'. A Arles, aussi-bien que dans plusieurs autres Villes qui cu-

rent l'Eclipse ou centrale ou totale, l'obscurité fut si grande que l'on ne vit plus ni à lire, ni à travailler; à peine se reconnoissoit-on les uns les autres; les Oiseaux de nuit sortirent de leurs trous, & ceux qui volent de jour se cachèrent. Les Astronomes virent auprès du Soleil Mercure, Venus & Saturne, & plusieurs fixes de toutes parts. Quand la plus petite partie du Soleil commença à reparoître, ce fut comme un éclair subit & très-vif.

La Société Royale des Sciences établie depuis peu à Montpellier sur le modele de l'Academie, observa avec beaucoup de soin cette Eclipse. Ces M<sup>rs</sup> ont remarqué que pendant qu'elle fut totale l'obscurité ne ressembloit ni à celle de la nuit ni à celle du Crepuscule, mais qu'elle fut d'une espeece particuliere, qui ne se peut non-plus exprimer que la lumiere ou le son. Il est allés étonnant que la variété qui regne dans la Nature s'étende jusques sur l'obscurité, qui semble n'avoir qu'une cause, & par consequent devoir être fort uniforme.

Mais de tous les Phenomenes de cette Eclipse le plus considerable, & en même tems le plus difficile à expliquer, ce fut une Couronne d'une lumiere pâle, large de la 12<sup>me</sup> partie du diametre de la Lune, qui parut autour de son disque dans les lieux où l'Eclipse fut totale. Les Astronomes de la Société Royale de Montpellier, plus attentifs & plus exacts que d'autres Observateurs, remarquerent que cette Couronne, qui, à la verité, ne s'étendoit point avec une égale vivacité au-delà des bornes qu'on vient de lui donner, alloit beaucoup plus loin en s'affoiblissant toujours, & formoit un grand espace circulaire de 8 degrés de diametre, & dont la Lune étoit le centre.

D'où pouvoit venir cette Couronne lumineuse? puisque le diametre apparent de la Lune surpassoit celui du Soleil, l'Eclipse n'étoit pas *annulaire*, c'est-à-dire, que la circonference du disque du Soleil ne demeureroit pas découverte, & d'ailleurs l'éclat de cette Couronne étoit sans comparaison moindre que celui de la plus petite par-

tie du Soleil. Cette apparence auroit pû être causée par une Atmosphere de la Lune, mais il n'est gueres vrai-semblable qu'elle en ait, puisque quand elle rencontre quelque Etoile & la cache, on ne voit point ordinairement ou la figure ou la vîtesse apparente de cette Etoile changer par la refraction que l'Atmosphere de la Lune causeroit à ses rayons,

M. Cassini a donc recours à une autre hipothese. Il découvrit en 1683. une Lumiere qui suit le Soleil, & qui l'a peut-être toujours suivi, sans avoir jamais été apperçûe jusques-là, parce que quand il y a des clairs de Lune elle en est toujours effacée, & hors delà, presque toujours par les Crepuscules, qui ne la laissent paroître que quand ils sont les plus courts, & n'en laissent paroître que l'extrémité la plus foible. Il supposa que cette Lumiere étoit causée par une matiere répandue autour du Soleil jusqu'à une certaine distance, plus épaisse à proportion qu'elle en étoit plus proche, & capable de réfléchir ses rayons vers nos yeux, lorsqu'ils n'y viennent plus directement. Il avança même alors, conformément à son système, que *si on pouvoit voir cette Lumiere en presence du Soleil, elle lui formeroit une espee de chevelure*, au lieu qu'elle ne paroïssoit qu'une traînée de lumiere d'une certaine largeur, toujours étendue sur le Zodiaque, parce qu'on ne la voyoit que quand le Soleil étoit sous l'horison. Il y a tout lieu de croire que la grande Couronne qui dans l'Eclipse totale a été vûë autour de la Lune, ou, ce qui revient au même, autour du Soleil, est la Chevelure prédite par M. Cassini. En effet, elle n'a paru qu'au même degré d'obscurité à peu-près où l'on voit, après la fin des Crepuscules, la Lumiere qui s'étend sur le Zodiaque jusqu'à un certain terme. Il est très-possible, pour ne rien dire de plus, que cette même Chevelure ait déjà paru dans d'autres Eclipses, & que faute de connoître la Lumiere qui la produisoit, on ait pris pour annulaires des Eclipses totales, & même plus que totales. Plus on fait de découvertes, plus on voit qu'on n'en sçauroit trop faire, & qu'elles sont toutes importantes.

V. les M. Toutes les observations de cette Eclipsé que l'Academie  
P. 462. pût avoir de differens lieux, servirent, selon la methode  
de M. Cassini, à déterminer les Longitudes.

V. les M. La troisième Eclipsé de cette année fut une Eclipsé de  
P. 471. Lune, qui arriva le 21 Octobre au soir. Selon la *Connois-*  
*sance des Tems* le commencement devoit être à  $6^h 3' 37''$ ,  
le milieu à  $7^h 22' 1''$ , la fin à  $8^h 40' 25''$ . La grandeur de-  
voit être de 7 doigts 26'. Le tems fut ici très-contraire à  
l'observation, & la rendit fort imparfaite, mais à Mar-  
seille & à Boulogne en Italie il fut plus favorable, & les  
observations qu'on y fit se sont trouvées, après les redu-  
ctions nécessaires, assez conformes à la *Connoissance des*  
*Tems*.

## SUR UNE CONJONCTION

### DE JUPITER.

#### AVEC LE COEUR DU LION.

V. les M. Les meilleures Tables Astronomiques & les plus pro-  
P. 482. pres à représenter les mouvemens celestes, étant une  
fois construites, ce n'est pas un repos acquis aux Astro-  
nomes. Elles demandent à être tous les jours comparées  
avec le Ciel, soit parce qu'elles ne peuvent jamais être  
de la dernière exactitude, soit parce que peut-être le Ciel  
changera. M. de la Hire ayant comparé à ses Tables de  
Jupiter une observation qu'il fit le 17 Octobre 1706 de  
la conjonction de cette Planete avec l'Etoile nommée le  
Cœur du Lion, ou *Regulus*, fut content de leur justesse, &  
à cette occasion il examina les deux seules conjonctions de  
Jupiter avec la même Etoile, dont il y ait memoire parmi  
les Astronomes.

La premiere est de l'an 508 observée à Athenes, trou-  
vée par M. Bouillaud dans un ancien Manuscrit de la Bi-  
bliothèque du Roi. La seconde a été observée en 1623.  
par



par M. Bouillaud lui-même, encore fort jeune. Nous n'entrerons point dans le détail des reflexions de M. de la Hire sur ces deux observations, & sur les conséquences que M. Bouillaud en a tirées pour la longitude ou la latitude de Jupiter. Nous rapporterons seulement ici un fait digne de remarque. M. de la Hire voyant ses Tables trop éloignées de la position que M. Bouillaud donnoit à Jupiter dans la conjonction de 508, & soupçonnant quelque erreur dans les calculs de cet Astronome, quoique très-habile, trouva qu'effectivement il n'avoit pas fait attention que l'année 508 étoit Bissexile, & cette legere inadvertance étoit la seule cause de tout le mal. Ce qui prouve combien il est aisé de tomber dans une semblable erreur, c'est qu'il est même difficile de s'appercevoir qu'un autre y soit tombé.

Parmi toutes les discussions délicates où M. de la Hire est conduit par le sujet qu'il traite, il propose un soupçon qui lui est venu, que le mouvement des Nœuds des Planetes pourroit bien n'avoir pas toujours la même direction, mais retrograder quelquefois, & avoir des especes de vibrations irregulieres. A l'égard de la Lune, cela est constant, il croit en être sûr pour Saturne; peut-être dans les autres Planetes les irregularitez du mouvement des Nœuds sont elles-moins sensibles. Il est toujours certain que quand on ramene les choses à la Phisique le préjugé est grand contre l'uniformité ou l'égalité exacte.

## S U R L E S T A C H E S

### D U S O L E I L.

SElon le plan que nous avons exposé dans l'Hist. de 1705 \*, & en supposant les connoissances préliminaires qui y ont été établies, voici le résultat des Observations que M. Cassini, de la Hire & Maraldi ont faites des Taches qui ont paru cette année dans le Soleil.

1706.

Q.

Le 6 Avril, on apperçut une Tache d'un médiocre grofleur, éloignée du bord Oriental du Difque d'un peu plus de 3', dont le Diametre du Soleil en contient 32, & plus élevée de 4' à peu-près que le centre du Soleil. Elle étoit affez noire, compofée d'une Tache plus groffe, qui avoit fa nebulofité à l'ordinaire, & de quelques autres petites. Le tout étoit environné d'une grande Facule, ce qui marque affez fouvent que les Taches diminuent de grandeur, & font prêtes à fe diffiper. En effet, celle-ci diminua tellement qu'on ne pût la voir que jufqu'au 10. Elle s'étoit toujours avancée vers l'Occident.

Le 4 Juin, on vit une petite Tache prefque au milieu du Difque. Elle n'avoit point paru 2 jours auparavant, quoiqu'on eût eu attention à en chercher. Elle étoit plus baffe que le centre du Soleil de  $1' \frac{1}{2}$ . Le lendemain & les jours fuivans, on ne la vit plus.

Le 19 Juin, on apperçut un amas de Taches qui avoit déjà paffé le milieu du Difque, & qui cependant n'avoit point paru les jours précédens. La plus groffe Tache de cet amas étoit plus baffe que le centre du Soleil de près de 4'. Depuis le 19, on ne put observer jufqu'au 23, & alors on ne vit plus rien, quoique ces Taches n'euffent pas encore pû être portées dans l'Hemifphere caché du Soleil par fon mouvement de 27 jours & demi.

Le 14 Septembre, on apperçut une Tache éloignée de 5' du bord Oriental du Difque, & plus baffe que le centre de 9'. Le tems ne permit point de l'observer après le 20. Dans la dernière obfervation elle n'étoit plus au-deffous du centre du Soleil que d'un peu plus de 1'.

On ne doit pas être furpris que la *déclinaifon* ou *latitude* des mêmes Taches par rapport au centre du Soleil varie, quand même on les fupoferoit fixes, & fans aucun mouvement particulier. Nous avons expliqué dans l'Hift. de 1701\* que par la compofition du mouvement annuel de la Terre autour du Soleil, & du tournoyement du Soleil autour de fon axe, l'apparence eft la même à nos yeux, que fi la Terre étant immobile, l'Equateur du Soleil après

\* p. 104.  
& fuiv.

avoir été dans le plan de l'Ecliptique en sortoit, & s'élevoit peu-à-peu au-dessus. Or il est évident qu'en ce cas-là ce que nous appellons le centre du Soleil, ou le milieu de son Disque apparent changeroit toujours, & s'approcheroit ou s'éloigneroit d'une Tache supposée fixe.

Le 10 Novembre, il parut près du bord Oriental du Soleil, & au-dessous du centre, deux Taches assez grosses, mais peu obscures, & d'un degré d'obscurité tel à peu-près que quand elles vont disparaître. Aussi ne pût-on les voir que jusqu'au 13. La plus Orientale dût passer par le milieu du Disque le 15 vers le Midi.

Le 7 Decembre, on vit vers le bord Oriental du Soleil un amas de Taches, parmi lesquelles il y en avoit trois plus grosses, dont la plus considérable étoit la plus Occidentale. Elle étoit plus basse que le centre du Soleil de quelque 5'. Le 11 elle s'étoit avancée vers l'Occident selon que le demande l'hypothese de la révolution du Soleil en 27 jours & demi, & elle s'étoit élevée de près de 3' par rapport au centre. Tout l'amas étoit plus de 16" à passer par le Meridien.

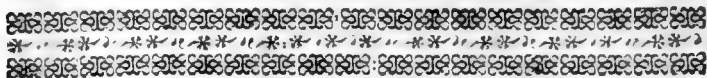
Si l'on suppose avec M. Cassini que la parallaxe du Soleil soit de 10" à peu-près, ou, ce qui est la même chose, que le demi-diametre de la Terre vû de dedans le Soleil fût vû sous un angle de 10", il s'ensuit que le diametre de la Terre observé de dedans le Soleil passeroit par un Meridien en  $1\frac{1}{3}$ , par consequent en 12 fois moins de tems que cet amas de Taches. Et si on le suppose spherique, son diametre étant 12 fois plus grand que celui de la Terre, la masse entiere sera 1728 fois plus grosse. Une pareille masse n'est dans le Soleil qu'une Tache invisible à tous les yeux, & peut-être une espece d'écume flottante sur la surface, qui s'est formée par accident, & qui se dissipe assez vite.

La plus grosse Tache passa par le milieu du Disque le 12 sur les 6 heures du soir, de sorte qu'elle pouvoit être la même qui y avoit passé le 15 Novembre à Midi.

Le 17 elle étoit plus haute de près de 1' que le centre

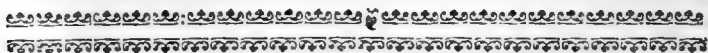
du Soleil. Les jours suivans le tems ne permit pas d'observer.

Monsieur Maraldi a communiqué quelques Observations faites par les PP. Jesuites de Lyon dans leur Observatoire , & on les a comparées aux Observations correspondantes que l'on avoit.



## A C O U S T I Q U E.

Monsieur Carré a commencé à lire un Traité Mathématique des Cordes par rapport aux Instrumens de Musique.



## M E C H A N I Q U E.

### S U R   L E S   L O I X   D U   C H O C D E S   C O R P S.

V. les M.  
P. 442.

IL est presque honteux à la Philosophie de s'être avisée aussi tard qu'elle a fait , qu'il y eût de certaines Regles ou *Loix* selon lesquelles les Corps se communiquent du mouvement. Mais aussi depuis cent ans ou environ, que l'on a eu cette idée , qui doit être un des premiers fondemens de la Phisique , on a bien réparé le tems perdu ,

les plus celebres Philosophes se sont appliquez à un sujet si utile , & le grand Descartes lui-même l'a rendu encore plus fameux par les erreurs où il est tombé en le traitant. Tout ce qu'un grand nombre d'Auteurs en ont écrit de plus considerable , a été ramassé par M. Carré dans une seule Formule universelle , d'où l'on tire tout d'un coup une infinité de propositions répandues en differens endroits , & souvent prouvées par de longs & penibles circuits.

Les Loix du Choc des Corps sont très-simples , mais dans presque tous les effets qu'elles produisent à nos yeux , elles sont si enveloppées , & si étouffées sous la multitude des differentes circonstances , qu'il est difficile de les en démêler , & de parvenir à les voir dans leur simplicité naturelle. Le secret est d'écarter d'abord le plus de circonstances qu'il est possible , & de n'envisager que les cas où il en entre le moins.

Il ne s'agit ici que des Corps qui se choquent directement , ou , ce qui est la même chose , dont les Centres de gravité se meuvent sur une même ligne droite.

On suppose pour un temps que les Corps sont ou parfaitement durs ou parfaitement mous , c'est-à-dire , ou qu'ils sont incapables de changer de figure par le choc , ou que s'ils en changent , ils ne reprennent point celle qu'ils avoient auparavant , en un mot , qu'ils sont sans ressort , car un corps à ressort n'est ni parfaitement dur puisqu'il change de figure par le choc , & qu'il s'applatit , par exemple , ni parfaitement mou , puisqu'il reprend ensuite sa premiere figure.

C'est une certaine force qui fait le mouvement , & cette force doit être plus grande pour mouvoir un plus grand corps , ou pour mouvoir le même corps avec plus de vitesse. Si elle demeure la même , & qu'elle agisse toute entiere , elle donnera une moindre vitesse à un plus grand corps , & une plus grande vitesse à un plus petit , & ces vitesses seront en raison renversées des masses ou pesanteurs des corps. Ainsi la force par laquelle un corps se meut ,

ou, ce qui est la même chose, la quantité de mouvement est le produit de sa masse ou pesanteur par sa vitesse, & ce produit peut demeurer toujours égal, tandis que ces deux grandeurs qui le forment varieront d'une infinité de manières différentes, ce qui est le grand Principe de la Méchanique. Pour sçavoir quelle est la vitesse d'un corps dont on connoît la quantité de mouvement & la masse, il n'y a donc qu'à diviser la quantité de mouvement par la masse, & le quotient est la vitesse. Si l'on suppose que la masse soit augmentée sans que la quantité de mouvement le soit, la vitesse devient moindre, puisque la même quantité de mouvement est divisée par un plus grand nombre.

Comme il est souvent utile, & même nécessaire d'aller jusqu'à l'Infini, quoique les recherches ne se terminent qu'à des grandeurs finies, on trouve par les Regles de l'Infini que la plus grande masse finie n'ayant qu'une vitesse infiniment petite, ou, ce qui revient au même, étant en repos, n'a qu'une force infiniment petite ou nulle par rapport à la plus petite masse finie qui aura la plus petite vitesse finie. De là vient qu'on dit que la force de la Percussion ou du Choc est infinie par rapport à celle de la simple pesanteur. De même, une masse infiniment petite mue avec la plus grande vitesse finie, n'aura qu'une force infiniment petite.

Il est clair par la seule Métaphisique, & indépendamment de l'expérience, que deux forces égales étant opposées, elles empêchent absolument l'action l'une de l'autre, & se détruisent mutuellement tant qu'elles sont forces agissantes, qu'elles ne se détruisent nullement si elles ne sont nullement opposées, & que si deux forces sont inégales & opposées, il ne reste de leur combat que l'excès de la plus grande sur la plus petite. De là il suit,

1<sup>o</sup>. Que deux Corps, tels que nous les avons supposés, se rencontrant directement avec des quantités de mouvement égales, s'arrêtent l'un l'autre, & demeurent en repos après le Choc.

2<sup>o</sup>. Que si un Corps en mouvement en rencontre en un

repos, il le poussera devant lui avec une vitesse moindre que celle qu'il avoit avant le choc, & qu'ils iront tous deux ensemble avec cette vitesse commune sans se separer. Car le corps mù doit conserver sa force ou quantité de mouvement toute entiere, puisque le corps qu'il rencontre ne lui oppose que son repos, qui n'est tout au plus qu'une force infiniment petite, & il arrive par le choc la même chose que si la quantité de mouvement du corps mù demeurant la même, sa masse étoit augmentée de celle du corps en repos; sa vitesse qui devient commune aux deux corps est donc diminuée.

3°. Que si deux corps se choquent avec des quantités de mouvement inégales & opposées, ils iront tous deux ensemble après le choc selon la direction du plus fort, & avec une vitesse commune moindre que la somme des vitesses qui ont précédé le choc. La plus petite quantité de mouvement ayant péri par le choc, & avec elle une portion égale de la plus grande, il n'est resté pour toute quantité de mouvement que l'excès de la grande sur la petite, & c'est la même chose après le choc que si le corps le plus fort, n'ayant que cette seule quantité de mouvement, eût rencontré le plus foible en repos.

4°. Que si deux corps ayant la même direction & des vitesses inégales se rencontrent, ils iront tous deux ensemble après le choc avec une vitesse commune moindre que la somme des deux vitesses qui ont précédé le choc. Les deux quantités de mouvement n'ayant rien d'opposé subsistent toutes deux après le choc, & c'est la même chose que si l'un des deux corps qui auroit eu une quantité de mouvement égal à ces deux quantités, avoit rencontré l'autre en repos; or on a vu qu'en ce cas-là quelle qu'eût été sa vitesse avant le choc elle seroit moindre après.

Il est très-aisé d'imaginer en nombres une infinité d'Exemples de ces 4 cas, en donnant aux deux corps telles masses, & telles vitesses qu'on voudra.

On voit par ces 4 cas, qui comprennent tout ce qui est possible en cette matiere, 1°. Que la quantité de mouve-

ment qui a précédé le choc ne peut jamais augmenter par le choc. 2<sup>o</sup>. Qu'elle peut diminuer & même s'anéantir. 3<sup>o</sup>. Que la vitesse diminue toujours.

Il périroit donc du mouvement à chaque instant en une infinité d'endroits de l'Univers, & la Nature tomberoit peu à peu dans une langueur, suivie à la fin d'un repos universel & funeste à tous les Estres, s'il n'y avoit une ressource perpétuelle pour la reproduction du mouvement. C'est le ressort, dont peut-être aucun corps n'est absolument privé. Il n'y en a point qui soit ni parfaitement dur, ni parfaitement mou. Ils s'applatissent par le choc, autant que mous, mais par leur ressort naturel ils reprennent leur figure, autant que durs, & ils la reprennent parfaitement, si leur ressort est parfait, comme on le supposera toujours dans la suite. Le mouvement que nous avons considéré jusqu'ici dans les corps congus sans ressort s'appellera *simple*, par opposition au mouvement que le ressort produit.

Il est certain que le ressort, qu'elle qu'en soit la cause Physique, est une force qui fait qu'un corps applati ou enfoncé par un certain degré de compression, ou enfin changé quant à sa figure de telle manière qu'on voudra, la reprend entièrement. Or comme ce changement de figure est tout l'effet de la force étrangère dont il a souffert l'impression, il ne peut détruire entièrement cet effet sans une force égale, & par conséquent la force par laquelle un corps à ressort se rétablit est toujours égale à celle qui l'a ou applati ou enfoncé, &c. Mais quand un corps à ressort choqué ou applati par un autre corps rétablit sa figure, il repousse en arrière celui dont il a été choqué, donc il le repousse avec une force égale à celle qu'avoit avant le choc le corps qui a choqué, donc il tend à lui imprimer la force ou quantité de mouvement qu'il avoit, & par conséquent à lui rendre sa première vitesse, mais avec une direction contraire.

Il suit de là que si je presse entre mes mains deux corps à ressort l'un contre l'autre, par exemple, deux balles, leurs deux ressorts agissent l'un contre l'autre avec une  
force:



force égale à celle de cette pression, & c'est la même chose que si un seul ressort d'une force égale à la pression de mes deux mains, étoit placé entre les deux balles, & prêt à se débänder contre routes les deux, & à envoyer l'une d'un côté, l'autre de l'autre. Or si les deux balles sont supposées inégales en grosseur, la force du ressort placé entre elles agissant également contre les deux ne pourra imprimer qu'une moindre vitesse à la plus grosse, tandis qu'elle en imprimera une plus grande à la plus petite, & par conséquent dès que les balles, mises en ressort par une pression mutuelle, pourront se separer, elles prendront des vitesses qui seront en raison renversée de leurs masses, chacune d'un côté opposé. Voilà le seul principe de tous les mouvemens de ressort.

Il ne reste plus qu'à voir quelle est dans le choc de deux corps la force qui les met en ressort, car elle sera nécessairement partagée en raison renversée de leurs masses. Cette force n'est que leur vitesse *respective*, c'est-à-dire, la quantité dont ils s'approchent l'un de l'autre en un certain tems. S'il n'y a qu'un des deux corps qui se meuve, la vitesse respective est toute la vitesse *absoluë* de ce corps. S'ils se meuvent tous deux avec des directions contraires, ou l'un vers l'autre, la vitesse respective est la somme des vitesses absoluës, & ce n'en est que la difference, s'ils se meuvent du même sens, ou avec la même direction. On sous-entend que dans ce dernier cas leurs vitesses soient inégales: car autrement ils ne s'approcheroient jamais, & la vitesse respective seroit nulle, quelques que fussent les deux vitesses absoluës égales. Il est évident que plus la vitesse respective est grande, plus le choc est violent, & plus les deux corps sont mis en ressort.

Pour déterminer tous les effets du choc, il ne faut donc que voir quelles sont les quantités de mouvement, ou les vitesses résultantes du mouvement simple, & combiner avec elles les quantités de mouvement ou les vitesses résultantes du mouvement de ressort, ou, ce qui est la même chose, la vitesse respective partagée entre les deux

corps selon la raison renversée de leurs masses. Toute l'attention qu'il faut avoir dans cette combinaison , est que des deux vitesses produites par le mouvement de ressort , l'une a toujours une direction contraire à la vitesse commune produite par le mouvement simple , & l'autre toujours la même direction , ce qui augmente ou diminue , & enfin modifie en une infinité de manieres différentes les effets du mouvement simple.

Dans le premier des 4 cas que nous avons rapportés , deux corps qui se choquent en allant l'un contre l'autre avec des quantités de mouvement égales , s'arrêtent absolument l'un l'autre par le mouvement simple. Mais ensuite par le mouvement de ressort , leur vitesse respective qui est alors la somme de leurs vitesses absolues se partageant entre eux en raison renversée de leurs masses , chacun reprend la même vitesse absolue qu'il avoit avant le choc , car puisqu'ils avoient des quantités de mouvement égales , leurs vitesses absolues étoient nécessairement en raison renversée de leurs masses. Il est inutile de remarquer que ces vitesses ont après le choc une direction contraire à celle qu'elles avoient auparavant. Et comme on peut appeller vitesse respective non-seulement la quantité dont deux corps s'approchent l'un de l'autre en un certain tems , mais aussi celle dont ils s'éloignent en un tems égal , leur vitesse respective est la même avant & après le choc. Ainsi dans ce cas la vitesse respective , & même les deux quantités de mouvement , entièrement détruites par le mouvement simple , sont entièrement rétablies par le mouvement de ressort.

Et l'on peut même voir que dans les autres 3 cas qui restent , la vitesse respective doit pareillement être égale avant & après le choc. Car dans ces 3 cas , les deux corps par le mouvement simple vont ensemble après le choc d'une vitesse commune , comme feroient deux parties d'un même corps , & par conséquent sont en repos à l'égard l'un de l'autre. Or l'effet de leur ressort est de les séparer , & la force de ce ressort n'est que la vitesse respecti-

ve qu'ils avoient avant le choc , dont ils se séparent avec cette même vitesse respective.

On peut encore prouver ainsi la même chose. Les deux corps mis ensemble de la vitesse commune produite par le mouvement simple , sont dans le même cas que s'ils étoient en repos dans un bateau qui allât de cette vitesse ; or il est clair que si on les mettoit tous deux en ressort , ils se sépareroient ensuite avec une force égale à celle qui auroit fait agir leur ressort , & cela indépendamment de la vitesse du bateau , donc la vitesse commune produite par le mouvement simple , quelle qu'elle soit , ne peut empêcher la vitesse respective d'être égale avant & après le choc.

Une vitesse respective peut demeurer la même , tandis que les vitesses absolues , dont elle est formée par addition ou par soustraction , varieront entre elles en une infinité de manières , & par conséquent l'égalité de la vitesse respective avant & après le choc n'emporte nullement celle des vitesses absolues. De plus , ces mêmes vitesses sont encore augmentées ou diminuées après le choc , selon que la vitesse respective toujours partagée de la même manière entre les deux corps , a la même direction qu'elles , ou une direction contraire. Mais ce sont ces vitesses absolues qui multipliées par les masses font les quantités de mouvement , d'où il suit que les quantités de mouvement , aussi-bien que les vitesses absolues , peuvent être , & sont même le plus souvent fort inégales avant & après le choc. Cette inégalité cependant est renfermée dans des bornes , & nous allons les déterminer pour faire appercevoir en gros toutes les variations comprises dans l'entre-deux.

Si un corps en mouvement en rencontre directement un autre égal & en repos , il est aisé de voir que par le mouvement simple la vitesse commune dont ils iront ensemble selon la direction du corps qui étoit mù , sera la moitié de la vitesse qu'avoit ce corps , que par le mouvement de ressort la vitesse respective qui n'est alors que la

vitesse absolue du corps mû étant partagée également entre les deux , puisqu'ils sont égaux , celui qui étoit mû sera repoussé en arriere avec la moitié de sa premiere vitesse , & par consequent s'arrêtera puisqu'il est repoussé en arriere avec la même vitesse dont il tendoit à aller en avant , & que le corps qui étoit en repos étant poussé selon la direction de l'autre avec les deux moitiés de la vitesse qu'il avoit , aura cette vitesse entiere avec la même direction , & qu'enfin la quantité de mouvement , & la vitesse absolue seront égales avant & après le choc , aussi-bien que la vitesse respective.

Si un corps infiniment petit ayant une vitesse finie , & par consequent une quantité de mouvement infiniment petite , rencontre un corps fini en repos , la vitesse commune dont il le fera aller avec lui selon sa direction sera infiniment petite , car ce sera sa quantité de mouvement infiniment petite divisée par la somme de leurs masses , ou plutôt par la masse seule du corps fini , qui est infiniment grand par raport à l'autre. Le corps fini multiplié par cette vitesse infiniment petite , aura une quantité de mouvement infiniment petite , égale à celle qu'avoit avant le choc le corps infiniment petit , qui n'a plus qu'une quantité de mouvement infiniment petite du second genre , & par consequent nulle par raport à celle du corps fini. Mais par le mouvement de ressort la vitesse respective qui est la vitesse finie du corps infiniment petit se partage de sorte que le corps fini n'en prend qu'une partie infiniment petite , & que le corps infiniment petit la reprend toute entiere , car telle est la proportion des masses. On voit d'ailleurs par les directions que la nouvelle vitesse infiniment petite que prend le corps fini est du même côté que celle qu'il avoit déjà , & par consequent double sa quantité de mouvement , tandis que la vitesse finie que reprend le corps infiniment petit est en arriere. Donc le corps infiniment petit a la même quantité de mouvement après le choc qu'auparavant , & le corps fini en a pris une double de celle-là ; & pour la vitesse respective elle demeure

toute entiere au corps à qui elle apartenoit avant le choc , puisque la vîtesse du corps fini n'est à compter pour rien par rapport à celle de l'infiniment petit.

Donc dans le cas où un corps en mouvement en choque un égal en repos , la quantité de mouvement étant égale avant & après le choc , & étant triplée après le choc dans le cas où un corps infiniment petit en mouvement choque le même corps fini qu'on a supposé en repos , il faut que la quantité de mouvement croisse toujours dans tous les cas infinis qui sont entre ces deux-là , c'est-à-dire , dans tous ceux où le corps en mouvement fera le plus petit , & que cependant elle ne puisse jamais croître jusqu'à être précisément triple de ce qu'elle étoit , puisqu'il faudroit pour cela un corps infiniment petit en mouvement , & séparé de tout autre , ce qui n'est point dans la nature.

De ce que dans le premier des deux cas *extrêmes* la vîtesse respective passe toute entiere dans le corps qui étoit en repos , & de ce que dans le second cas elle demeure toute entiere au corps qui étoit en mouvement , il suit que dans tous les cas moyens elle se partage entre les deux , & il est aisé de trouver qu'elle se partage également lorsque le grand est triple du petit. Donc depuis le cas où les deux corps sont égaux jusqu'au cas où celui qui est mu devient en décroissant toujours 3 fois plus petit que l'autre , c'est le plus grand qui prend le plus de vîtesse ; depuis ce point-là jusques à ce que le petit corps devienne infiniment petit , c'est lui qui en prend toujours le plus , & enfin il la conserve entiere.

Ce dernier cas est visiblement celui de la Reflexion. De grands Philosophes prétendent avec assez d'apparence que quand un corps en rencontre un autre inébranlable par rapport à lui , il s'arrêteroit tout court , & ne réfléchiroit jamais , si ce n'étoit le ressort du corps choqué , & le sien qui agissent alors. Car sans cela quelle nouvelle cause pour retourner en arriere ? On voit même par expérience qu'il est bien plus facile d'arrêter une boule qui roule , & de lui faire perdre son mouvement que de la

renvoyer en arriere avec la même vitesse. Cela supposé ; il est évident qu'un corps qui se réfléchit à la rencontre d'un corps inébranlable , est précisément dans le même cas que s'il en rencontroit un infiniment grand par rapport à lui , & comme cet infiniment grand n'existe point , non plus qu'un corps absolument inébranlable pour un autre quel qu'il soit , il s'ensuit qu'un corps qui se réfléchit communie toujours de sa vitesse à celui qu'il a choqué , quelque inébranlable qu'il paroisse à son égard ; & par conséquent perd toujours par la réflexion une partie de sa force , ou quantité de mouvement , ce que toutes les expériences confirment assez.

Maintenant si nous supposons qu'un corps fini en mouvement en rencontre un infiniment petit en repos , on verra que par le mouvement simple leur vitesse commune après le choc est la même que celle que le corps fini avoit auparavant , que le mouvement de ressort donne au corps infiniment petit cette même vitesse selon la même direction , & par conséquent la double , que le corps fini qui n'est repoussé en arriere que d'une vitesse infiniment petite , conserve toute celle qu'il avoit d'abord , que par conséquent la vitesse absolue qui a précédé le choc est triplée , & que la quantité de mouvement demeure la même , puisque le corps fini n'a que sa premiere vitesse , & que celle du corps infiniment petit multipliée par sa masse ne fait qu'une quantité de mouvement infiniment petite.

On pourra conclure par un raisonnement semblable à celui que nous avons déjà fait , que depuis le cas de l'égalité des deux corps dont l'un est en mouvement , l'autre en repos , jusqu'au cas où le corps en repos est infiniment petit , le corps qui est en repos diminuant toujours dans tous les cas moyens , la vitesse qui a précédé le choc est toujours augmentée après le choc , que jamais elle ne peut être précisément triplée , que le grand corps ne peut jamais conserver entierement sa premiere vitesse , ni le petit en prendre une qui soit double , que puisque dans les deux

cas extrêmes la quantité de mouvement étant égale avant & après le choc, elle passe toute entiere dans le premier cas au corps qui étoit en repos, & dans le second demeure toute entiere à celui qui étoit en mouvement, elle doit se partager entre eux dans tous les cas moyens, qu'elle se partage également lorsque le grand est triple du petit, &c.

Au lieu que nous avons supposé que le corps choqué par le corps fini étoit un infiniment petit du premier genre, si nous le supposions du second, les mêmes raisonnemens subsisteroient, & cet infiniment petit du second genre prendroit toujours une vitesse double de celle du corps fini. Mais si l'on suppose entre ces deux corps le premier infiniment petit qui prendra par le choc une vitesse double de celle du corps fini, & si on conçoit qu'avec cette vitesse il aille choquer l'infiniment petit du second genre, il lui donnera une vitesse double de la sienne, & par conséquent quadruple de celle du corps fini. Donc si le corps fini choque immédiatement le corps infiniment petit du second genre, il lui donnera la moitié moins de vitesse, que s'il le choque par l'entremise de l'infiniment petit du premier genre; & plus on mettra ensuite d'infiniment petits des genres suivans tous en repos, & dont le dernier ne sera choqué que par l'entremise de tous ceux qui le précéderont, plus la vitesse qu'il prendra sera grande par rapport à celle du corps fini, premier moteur. Il est visible par ce qui vient d'être dit que cette augmentation de vitesse suivra toujours la progression double, & que la vitesse de chaque infiniment petit sera à celle du corps fini, comme le terme correspondant de la progression double sera à l'unité; par exemple, la vitesse de l'infiniment petit du sixième genre sera à celle du corps fini, comme le sixième terme de la progression double, ou 32, à 1. Il faut remarquer ici que le corps fini & tous les infiniment petits qui le suivent, rangés selon leurs genres, forment précisément en vertu de ces genres differens une progression géométrique, ce qui est évident.

Comme les propriétés de l'infini se retrouvent dans le fini, les restrictions nécessaires y étant apportées, il s'ensuit qu'un corps en mouvement donnera plus de vitesse à un corps plus petit en repos s'il le choque par l'entremise d'un corps de grandeur moyenne entre les leurs, qu'es'il le choquoit immédiatement; que plus le nombre des corps moyens interposés sera grand, plus la vitesse du premier sera augmentée dans le dernier; que le nombre des corps interposés étant égal, la vitesse ne sera jamais plus augmentée que quand tous ces corps, le premier y étant compris seront en progression géométrique; que tout le reste étant égal, la vitesse sera encore d'autant plus augmentée que la progression géométrique sera formée d'un plus grand rapport, c'est-à-dire, que les termes en seront plus inégaux, & qu'enfin quelque inégaux qu'ils soient, jamais la vitesse ne pourra être réellement augmentée selon la progression double. Il est aisé de voir que tout cela vient de ce que le fini est copié, pour ainsi dire, d'après l'infini, premier original de toutes ces propriétés.

Si l'on renverse la supposition précédente, c'est-à-dire, qu'un corps infiniment petit du second genre choque avec une vitesse finie un corps fini en repos, ou que ce même infiniment petit du second genre en choque un du premier, qui ensuite avec la vitesse acquise par ce choc aille choquer le corps fini, & que l'on compare les deux vitesses du corps fini dans ces deux cas, on trouvera que dans le second il a deux degrés de vitesse infiniment petite du second genre, au lieu qu'il n'en a qu'un dans le premier cas, d'où l'on tirera des conséquences semblables à celles qui viennent d'être tirées.

Un corps communique donc toujours plus de vitesse à un autre s'il le choque par l'entremise de quelques corps interposés, & d'une grandeur moyenne, que s'il le choquoit immédiatement. Cette importante Règle du mouvement a été découverte par M. Huyguens, & publiée dans ses Oeuvres posthumes depuis peu d'années. Il est fort vrai-semblable que la nature emploie ce secret dans les occasions.



occasions où l'on voit un grand mouvement naître tout à coup entre des corps qui paroissent auparavant fort tranquilles, par exemple, dans les Fermentations, & dans les effets de la poudre à canon. Quel peut être le principe de ces agitations si violentes & si tumultueuses ? Où étoit caché tout ce mouvement qui vient à se développer ? On sçait présentement qu'il suffira d'une première vitesse assez peu considérable, pourvu que les corps qui la doivent recevoir les uns après les autres soient tels que leurs grandeurs croissent ou décroissent à peu-près selon quelque progression, & qu'ils soient arrangés de suite, ou, ce qui revient au même, soient mis en mouvement selon cet ordre.

Jusqu'ici nous n'avons examiné que les cas où un corps en mouvement en rencontre un autre en repos.

Si deux corps égaux ayant chacun, par exemple, 2 de masse, se rencontrent directement avec des vitesses contraires & inégales, dont l'une soit, par exemple, 4, & l'autre 6, on voit que par les loix du mouvement simple la plus petite quantité de mouvement qui est 8 étant retranchée de la plus grande qui est 12, il reste 4 pour la quantité de mouvement qui subsiste après le choc, & que 4 divisé par la somme des deux corps donne 1 vitesse commune, avec laquelle le plus fort fera rebrousser chemin au plus foible, & le poussera devant lui. Mais par les loix du ressort la vitesse respectueuse qui est 10, puisqu'elle est en ce cas la somme des vitesses absolues, sera partagée également entre les deux corps, puisqu'ils sont égaux, & ils auront chacun 5 degrés de vitesse en une direction contraire à celle qu'ils avoient avant le choc. Le plus fort qui par le mouvement simple poursuivoit son chemin avec 1 degré de vitesse est donc renvoyé avec 5 degrés en un sens contraire. Reste 4 en ce sens-là. Le plus foible qui avoit aussi 1 degré de vitesse selon la direction du plus fort, prend de plus 5 degrés en ce même sens-là, il en a donc 6, c'est-à-dire, que par le choc ils ont fait entre eux un échange des vitesses qu'ils avoient auparavant, & même de leurs di-

138 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE  
rections, & il en ira de même en tout autre exemple.

Si tout le reste demeurant le même, on suppose que l'un des deux corps soit infiniment petit, la vitesse commune des deux produite par le mouvement simple après le choc, sera la vitesse entiere qu'avoit le corps fini avant le choc, & la direction sera aussi la même. Mais par le ressort le corps fini sera infiniment peu repoussé en arriere, & par consequent conservera sa premiere vitesse & sa premiere direction, & le corps infiniment petit prendra selon la même direction la vitesse respectivement entiere, c'est-à-dire, la somme des deux vitesses absolues qui ont précédé le choc, ce qui ne lui fera rien perdre de la vitesse qu'il avoit par le mouvement simple. Donc les deux corps iront selon la direction qu'avoit le corps fini avant le choc, le fini avec sa premiere vitesse, l'infiniment petit avec le double de cette vitesse, plus celle qu'il avoit avant le choc.

Par-là on voit que même dans le cas où l'un des deux corps seroit infiniment petit par raport à l'autre, la somme des vitesses absolues qui ont précédé le choc n'est pas triplée par le choc, puisqu'il n'y a que la vitesse du grand corps qui le soit, & que celle du petit demeure simple, que cette somme est d'autant plus éloignée de se tripler que la vitesse du petit corps est plus grande par raport à celle du grand, qu'elle ne se triple précisément que quand la vitesse du petit corps est infiniment petite, c'est-à-dire, quand il étoit en repos avant le choc, ce qu'on a déjà vu, que les deux corps étant finis la somme de leurs vitesses après le choc, est d'autant plus augmentée que l'un est plus petit, & a moins de vitesse par raport à l'autre, &c.

Dans le premier des deux cas extrêmes, le corps qui a le plus de quantité de mouvement change sa direction & dans le second il la conserve; donc il y a un cas moyen où il ne la change ni ne la conserve, c'est-à-dire, où il n'en a point, ou, ce qui est la même chose, demeure en repos, & l'on trouve que cela arrive lorsqu'il est triple de l'autre, & qu'ils ont tous deux des vitesses égales.

Il ne reste plus que le cas où deux corps ayant la même

direction, celui qui suit l'autre à la plus grande vitesse & vient à le choquer. Si ces deux corps sont égaux on trouvera par un raisonnement semblable à celui qui a été fait dans le cas des directions contraires, qu'après le choc ils font entre eux un échange des vitesses qu'ils avoient auparavant, & conservent leur première direction. Si le corps qui suit l'autre est infiniment grand par rapport à lui, il conserve sa première vitesse, & l'autre en prend le double, moins celle qu'il avoit avant le choc. Si le corps qui poursuit est infiniment petit, c'est le contraire, il prend le double de la vitesse de l'autre, moins celle qu'il avoit avant le choc, & le corps poursuivi conserve la sienne. La vitesse du corps poursuivi étant toujours la moindre, elle peut, lorsqu'elle est doublée dans ce dernier cas & qu'on en retranche celle de l'autre corps, demeurer positive, ou devenir nulle ou negative, c'est-à-dire, que le corps infiniment petit peut conserver sa direction, ou s'arrêter, ou la changer. Il est aisé de transporter tout cela dans le fini, & de conclure des deux cas extrêmes les cas moyens.

Peut-être en combinant ensemble les cas principaux que nous n'avons envisagés que séparément, pourroit-on s'élever à une Theorie encore plus sublime, mais il suffit presentement que les routes en soient ouvertes. La Formule générale de M. Carré donne avec une extrême facilité tout ce que nous n'avons exposé ici que par d'assés longs raisonnemens, & de plus une infinité de détails que nous n'avons pû saisir qu'en gros, mais il est peut-être bon de faire voir dans toute leur étendue les fondemens de ces Formules si commodés & si courtes; après cela, on jouit de leur commodité & de leur brièveté avec une pleine assurance, ou si l'assurance n'est pas plus grande, du moins on est dans un plus grand jour.

---

**N**ous avons simplement annoncé dans l'Histoire de 1705 \* que M. Daleisme avoit donné un moyen très-simple de faciliter & d'augmenter l'action de ceux qui ti-

\*F. 137.

rent de grands Bateaux. Ce moyen est de tendre le long du rivage une Corde que les Hommes puissent prendre avec les mains en tirant leur Bateau. Il a trouvé par experience qu'avec ce secours, ils ont presque la moitié moins de peine, mais l'épreuve n'a été faite que dans un petit espace de chemin, il y a apparence que dans un plus long ils seroient plutôt las en se servant de la Corde qu'en tirant à la maniere ordinaire, parce que leurs bras agiroient aussi-bien que leurs jambes & leurs pieds. Le remede à cela seroit qu'ils ne prissent la Corde que dans les endroits difficiles, & laissassent ensuite reposer leurs bras.

Voici deux autres pensées proposées aussi par M. Dalesme.

1°. Fondre des Tuyaux de plomb pour des conduites d'eau, sans soudure, & sans *reprise*, & ensuite les passer à la filiere avec un Mandrin dans le tuyau. Il y a de deux sortes de tuyaux ordinaires. Les uns sont faits de tables ou planches de plomb, que l'on plie en tuyau, & que l'on soude ensuite; ils manquent très-souvent par la soudure, & perdent l'eau. Les autres sont fondus & coulés, mais à diverses reprises, parce qu'on n'a pas des moules assés longs, & comme les reprises se soudent alors entre elles par la fonte, mais non-pas si parfaitement qu'il ne reste alentour quantité de petits trous, on y bat le metal avec le marteau. Mais les tuyaux fondus de M. Dalesme n'auront point l'inconvenient des premiers tuyaux qu'il faut souder dans toute leur longueur, & s'ils ont des trous ou pores ils se fermeront mieux que dans les seconds, parce-que la filiere forçant & pétrissant, pour ainsi dire, le metal, le resserrera beaucoup plus, & plus également que ne peut faire le marteau. Les metaux forgés ont plus de force & sont moins poreux que s'ils étoient simplement fondus, & il vaut encore mieux les passer à la filiere que les forger.

2°. Coler aux grands Vaisseaux avec le Bray ou Conroy qui sert à carener, du plomb d'abord fondu épais, & ensuite forgé mince, & par consequent fort solide & fort peu

poroux. Par-là on défendrait les Vaisseaux contre les Vers, qui dans les climats chauds les rongent & les ruinent. Le plomb coûteroit 4 ou 5 fois moins que le doublage de planches dont on se sert. Il ne se détachera du Vaisseau qu'avec le Conroy.

**M**onsieur des Billettes a donné la Description de l'Art de la Papeterie, & de celui du Doreur de Livres, & M. Jaugeon a commencé à donner celle des Arts & Metiers qui concernent la Soye.

## MACHINES OU INVENTIONS

APPROUVÉES PAR L'ACADEMIE

PENDANT L'ANNEE 1706.

### I.

**U**ne maniere de tirer les Loteries proposée par M. d'Aubicour.

### II.

Une Chaine sans fin, inventée par M. Martenot, qui peut servir à la place du Treuil ordinaire, & réussir bien, pourvu que dans l'exécution on y apporte assés de précision & de solidité.

### III.

Un Couëau pliant, inventé par M. de la Chaumette, qui est tel que sans aucun ressort les deux jouës du manche s'approchent exactement lorsqu'on l'ouvre, & s'éloignent pour recevoir la lame lorsqu'on le ferme. L'invention a paru ingenieuse.

### IV.

Une nouvelle sorte de Bougies, inventées par M. Marius qui ne coûteront que la moitié des autres, seront aussi propres à manier, & donneront autant de lumiere,

mais seulement dureront un peu moins.

## V.

Des Cornets d'une construction nouvelle, inventés par M. du Guet. Quoiqu'ils ne soient encore regardés par l'Auteur que comme une *étude* & une ébauche, on a cru qu'ils pourroient être fort utiles à ceux qui sont devenus sourds.

## VI.

Une Machine du sieur Thomas, pour élever des fardeaux d'une grande pésanteur. On l'a trouvée utile, mais presque semblable à plusieurs autres qui ont déjà été inventées.



## E L O G E

DE M. DU HAMEL.

**J**EAN-BAPTISTE DU HAMEL nâquit en 1624 à Vire en basse Normandie. Nicolas du Hamel son Pere étoit Avocat dans la même Ville; malgré le caractère général qu'on attribué à ce país-là, & malgré son interest particulier, il ne songeoit qu'à accommoder les procès qu'il avoit entre les mains, & en étoit quelquefois mal avec les Juges.

M. du Hamel fit ses premières études à Caën, sa Rhetorique & sa Philosophie à Paris. A l'âge de 18 ans il composa un petit Traité, où il expliquoit avec une ou deux figures, & d'une maniere fort simple, les trois Livres des *Spheriques* de Theodose; il y ajoûta une Trigonometrie fort courte & fort claire dans le dessein de faciliter l'entrée de l'Astronomie. Il a dit dans un Ouvrage postérieur qu'il n'avoit imprimé celui-là que par une vanité de jeune homme, mais peu de gens de cet âge pourroient avoir la même vanité. Il faloit que l'inclination qui le portoit aux

Sciences fût déjà bien générale & bien étendue, pour ne pas laisser échaper les Mathématiques si peu connues, & si peu cultivées en ce tems-là, & dans les lieux où il étudioit.

A l'âge de 19 ans, il entra dans les Peres de l'Oratoire. Il y fut 10 ans, & en sortit pour être Curé de Neuilli sur Marne. Pendant l'un & l'autre de ces deux tems, il joignit aux devoirs de son état une grande application à la lecture.

La Phisique étoit alors comme un grand Royaume démembré, dont les Provinces ou les Gouvernemens seroient devenus des Souverainetés presque indépendantes. L'Astronomie, la Mechanique, l'Optique, la Chimie, &c. étoient des Sciences à part, qui n'avoient plus rien de commun avec ce qu'on apelloit Phisique; & les Medecins même en avoient détaché leur Phisiologie, dont le nom seul la trahissoit. La Phisique apauvrie & dépourvue n'avoit plus pour son partage que des Questions également épineuses & steriles. M. du Hamel entreprit de lui rendre ce qu'on lui avoit usurpé, c'est-à-dire une infinité de connoissances utiles & agréables, propres à faire renaître l'estime & le goût qu'on lui devoit, Il commença l'exécution de ce dessein par son *Astronomia Physica*, & par son *Traité De Meteoris & Fossilibus*, imprimés l'un & l'autre en 1660.

Ces deux Traités sont des Dialogues dont les Personnages sont Theophile, grand Zelateur des Anciens, Menandre, Cartesien passionné, Simplicius, Philosophe indifférent entre tous les partis, qui le plus souvent tâche à les accorder tous, & qui hors delà est en droit par son caractère de prendre dans chacun ce qu'il y a de meilleur. Ce Simplicius ou M. du Hamel, c'est le même homme.

A la forme de Dialogues, & à cette maniere de traiter la Philosophie, on reconnoît que Cicéron a servi de modele, mais on le reconnoît encore à une Latinité pure & exquise, & ce qui est plus important à un grand nombre d'expressions ingénieuses & fines, dont ces Ouvrages sont

semés. Ce sont des raisonnemens philosophiques, qui ont dépouillé leur secheresse naturelle ou du moins ordinaire, en passant au travers d'une imagination fleurie & ornée, & qui n'y ont pris cependant que la juste dose d'agrément qui leur convenoit. Ce qui ne doit être embelli que jusqu'à une certaine mesure précise, est ce qui coûte le plus à embellir.

L'Astronomie phisique est un Recueil des principales pensées des Philosophes tant Anciens que Modernes sur la Lumiere, sur les Couleurs, sur les Systèmes du monde; & de plus tout ce qui appartient à la Sphere, à la Theorie des Planetes, au Calcul des Eclipses, y est expliqué mathematiquement. De même, le Traité des Meteores & des Fossiles rassemble tout ce qu'en ont dit les Auteurs qui ont quelque reputation dans ces matieres; car M. du Hamel ne se bornoit pas à la lecture des plus fameux. On voit dans ce qu'il a écrit des Fossiles une grande connoissance de l'Histoire Naturelle, & sur tout de la Chimie, quoiqu'elle fût encore alors envelopée de mysteres & de tenebres difficiles à percer.

On lui reprocha d'avoir été peu favorable au grand Descartes, si digne du respect de tous les Philosophes, même de ceux qui ne le suivent pas. En effet, Theophile le traite quelquefois assés mal. M. du Hamel répondit que c'étoit Theophile, entêté de l'Antiquité, incapable de goûter aucun Moderne, & que jamais Simplicius n'en avoit mal parlé. Il disoit vrai, cependant c'étoit au fond Simplicius qui faisoit parler Theophile.

En 1663, qui fut la même année où il quitta la Cure de Neuilli, il donna le fameux Livre, *De Consensu veteris & novæ Philosophie*. C'est une Phisique générale, ou un Traité des premiers Principes. Ce que le titre promet est pleinement exécuté, & l'esprit de conciliation, héréditaire à l'Auteur, triomphe dans cet Ouvrage. Il commence par la sublime & peu intelligible Metaphisique des Platoniciens sur les Idées, sur les Nombres, sur les formes Archetypes, & quoique M. du Hamel en reconnoisse l'obscurité,



rité, il ne peut leur refuser une place dans cette espece d'Etats généraux de la Philosophie. Il traite avec la même indulgence la Privation principe, l'Eduction des formes substantielles, & quelques autres idées Scholastiques; mais quand il est enfin arrivé aux Principes qui se peuvent entendre, c'est-à-dire, ou aux Loix du mouvement, ou aux principes moins simples établis par les Chimistes, on sent que malgré l'envie d'accorder tout, il laisse naturellement pancher la balance de ce côté-là. On s'aperçoit même que ce n'est qu'à regret qu'il entre dans des questions générales, d'où l'on ne remporte que des mots, qui n'ont point d'autre mérite que d'avoir long-tems passé pour des choses. Son inclination & son sçavoir le rappellent toujours assés promptement à la Philosophie Experimentale, & sur tout à la chimie pour laquelle il paroît avoir eu un goût particulier.

En 1666. M. Colbert qui sçavoit combien la gloire des Lettres contribué à la splendeur d'un Etat, proposa & fit approuver au Roi l'établissement de l'Academie Roiale des Sciences. Il rassembla avec un discernement exquis un petit nombre d'hommes, excellens chacun dans son genre. Il falloit à cette Compagnie un Secrétaire qui entendit & qui parlât bien toutes les différentes langues de ces Sçavans, celle d'un Chimiste, par exemple, & celle d'un Astronome, qui fût auprès du Public leur interprete commun, qui pût donner à tant de matieres épineuses & abstraites des éclaircissemens, un certain tour, & même un agrément que les Auteurs negligent quelquefois de leur donner, & que cependant la plupart des Lecteurs demandent, enfin qui par son caractère fût exempt de partialité, & propre à rendre un compte desintéressé des contestations Academiques. Le choix de M. Colbert pour cette fonction tomba sur M. du Hamel; & après les preuves qu'il avoit faites sans y penser de toutes les qualités nécessaires, un choix aussi éclairé ne pouvoit tomber que sur lui.

Sa belle Latinité ayant beaucoup brillé dans ses Ouvrages, & d'autant plus que ses matieres étoient moins

favorables, il fut choisi pour mettre en Latin un Traité. des Droits de la feuë Reine sur le Brabant, sur Namur, & sur quelques autres Seigneuries des Pays-bas Espagnols. Le Roi, qui le fit publier en 1667. vouloit qu'il pût être lû de toute l'Europe, où ses conquêtes, & peut-être aussi un grand nombre d'excellens Livres, n'avoient pas encore rendu le François aussi familier qu'il l'est devenu.

A cet Ouvrage qui soutenoit les droits de la Reine, il en succeda l'année suivante un autre de la même main, & en Latin, qui soutenoit les droits de l'Archevêque de Paris contre les Exemptions que prétend l'Abbaye de S. Germain des Prez. Ce fut M. de Perefixe, alors Archevêque, qui engagea M. du Hamel à cette entreprise, & apparemment il crut que le nom d'un Auteur, si éloigné d'attaquer sans justice, & même d'attaquer, seroit un grand préjugé pour le Siege Archiepiscopal. En effet, c'est la seule fois que M. du Hamel ait forcé son caractère jusqu'à prendre le personnage d'Agresseur, & il est bon qu'il l'ait pris une fois pour laisser un modele de la moderation & de l'honnêteté avec laquelle ces sortes de contestations devroient être conduites.

Sa grande reputation sur la Latinité fut cause encore qu'en la même année 1668. M. Colbert de Croissi Plenipotentiaire pour la Paix d'Aix la Chapelle l'y mena avec lui. Il pouvoit l'employer souvent pour tout ce qui se devoit traiter en Latin avec les Ministres Etrangers, & quoique la pureté de cette Langue puisse paroître une circonstance peu importante par rapport à une negociation de Paix, les Politiques sçavent assez qu'il ne faut rien négliger de ce qui peut donner du relief à une Nation aux yeux de ses voisins, ou de ses ennemis.

Après la Paix d'Aix la Chapelle, M. de Croissi alla Ambassadeur en Angleterre, & M. du Hamel l'y accompagna. Il fit ce voyage en Philosophe; sa principale curiosité fut de voir les Sçavans, sur tout l'illustre M. Boyle qui lui ouvrit tous ses trésors de Phisique Experimentale. De-là, il passa en Hollande avec le même esprit, & il rapporta de ces deux voyages des richesses, dont il a ensuite orné ses Livres.

Revenu en France, & occupant sa place de Secrétaire de l'Académie, il publia son *Traité De Corporum affectionibus* en 1670. Là, il pousse la Physique jusqu'à la Médecine, dont il ne se contente pas d'effleurer les principes. Deux ans après, il donna son *Traité de Mente humana*. C'est une Logique Métaphysique, ou une Théorie de l'Entendement humain & des Idées, avec l'art de conduire la raison. Quoique les expériences physiques paroissent étrangères à ce sujet, elles y entrent cependant en assez grande quantité, elles fournissent tous les exemples dont l'Auteur a besoin ; il en étoit si plein, qu'elles semblent lui échapper à chaque moment.

Un an après, c'est-à-dire en 1673, parut son Livre *De Corpore animato*. On peut juger par le titre si la Physique Experimentale y est employée. Sur tout, l'Anatomie y regne. M. du Hamel en avoit acquis une grande connoissance & par les Conférences de l'Académie, & par un commerce particulier avec M<sup>rs</sup>. Stenon, & du Verney. Quand M. du Verney commença à s'établir à Paris, & qu'il y établit en même temps un nouveau goût pour l'Anatomie, M. du Hamel fut un des premiers qui se saisit de lui, & des découvertes qu'il apportoit. Un tel Disciple excita encore le jeune Anatomiste à de plus grands progrès, & y contribua.

Dans ce Livre *De Corpore animato*, il fait entendre qu'on lui reprochoit de ne point décider les Questions, & d'être trop indéterminé entre les différens partis. Il promet de se corriger, & il faut avouer cependant qu'il ne paroît pas trop avoir tenu parole, mais enfin il est rare qu'un Philosophe soit accusé de n'être pas assez décisif.

Au même endroit, il se fait à lui-même un autre reproche, dont il est beaucoup plus touché, c'est d'être Ecclesiastique, & de donner tout son temps à la Philosophie profane. Il est aisé de voir quelle foule de raisons la justifioient, mais l'extrême délicatesse de sa conscience ne s'en contentoit pas. Il proteste qu'il veut retourner à un Ouvrage de Théologie, dont le projet avoit été formé dès le temps qu'il publia ses premiers Livres, & dont l'exécu-

tion avoit été toujours interrompue.

Cependant il y survint encore une nouvelle interruption. Un ordre superieur , & glorieux pour lui l'engagea à composer un Cours entier de Philosophie, selon la forme usitée dans les Colleges. Cet Ouvrage parut en 1678 sous le titre de *Philosophia vetus & nova ad usum Scholæ accommodata, in Regia Burgundia pertracta*, assemblage aussi judicieux & aussi heureux qu'il puisse être des idées anciennes & des nouvelles, de la Philosophie des mots, & de celle des choses, de l'Ecole & de l'Academie pour en parler encore plus juste; l'Ecole y est ménagée, mais l'Academie y domine. M. du Hamel y a repandu tout ce qu'il avoit puisé dans les Conférences Academiques, expériences, découvertes, raisonnemens, conjectures. Le succès de l'Ouvrage a été grand, les nouveaux Systèmes déguisés en quelque sorte ou alliés avec les anciens se sont introduits plus facilement chez leurs Ennemis; & peut-être le Vrai a-t'il eu moins d'oppositions à essuyer, parce qu'il a eu le secours de quelques erreurs.

Plusieurs années après la publication de ce Livre, des Missionnaires qui l'avoient porté aux Indes Orientales écrivirent qu'ils y enseignoient cette Philosophie avec beaucoup de succès, principalement la Physique, qui est des quatre parties du Cours entier celle où l'Academie & les Modernes ont le plus de part. Des Peuples peu éclairés & conduits par le seul goût naturel, n'ont pas beaucoup hésité entre deux especes de Philosophie, dont l'une nous a si long-tems occupés.

Il semble que M. du Hamel ait été destiné à être le Philosophe de l'Orient. Le P. Bouvet Jésuite, & fameux Missionnaire de la Chine, a écrit que quand ses Confreres & lui voulurent faire en langue Tartare une Philosophie pour l'Empereur de ce grand Etat, & le disposer par là aux verités de l'Evangile, une des principales sources où ils puisèrent fut la Philosophie ancienne & moderne de M. du Hamel. L'entrée qu'elle pouvoit procurer à la Religion dans ces climats éloignés, a dû le consoler de l'application qu'il y avoit donnée.

A la fin, il s'acquitta encore plus précisément du devoir dont il se croyoit chargé. En 1691. il imprima un corps de Theologie en 7 Tomes, sous ce titre, *Theologia Speculatrix & Practica juxta S.S. Patrum dogmata pertractata, & ad usum Scholæ accomodata*. La Theologie a été long-tems remplie de subtilités fort ingenieuses à la verité, utiles même jusqu'à un certain point, mais assés souvent excessives; & l'on negligeoit alors la connoissance des Peres, des Conciles, de l'Histoire de l'Eglise, enfin tout ce qu'on appelle aujourd'hui Theologie positive. On alloit aussi loin que l'on pouvoit aller par la seule Metaphisique, & sans le secours des faits presque entierement inconnus, & cette Theologie a pû être appellée fille de l'Esprit & de l'ignorance. Mais enfin les vûes plus saines & plus nettes des deux derniers Siecles ont fait renaître la Positive. M. du Hamel l'a reunie dans son Ouvrage avec la Scolastique, & personne n'étoit plus propre à ménager cette réunion. Ce que la Philosophie Experimentale est à l'égard de la Philosophie Scholastique, la Theologie Positive l'est à l'égard de l'ancienne Theologie de l'Ecole : c'est la positive qui donne du corps & de la solidité à la Scholastique & M. du Hamel fit précisément pour la Theologie ce qu'il avoit fait pour la Philosophie. On voit de part & d'autre la même étendue de connoissances, le même desir, & le même art de concilier les opinions, le même jugement pour choisir, quand il le faut, enfin le même esprit qui agit sur différentes matieres. On peut se représenter ici ce que c'est que d'être Philosophe & Theologien tout-à-la-fois, Philosophe qui embrasse toute la Philosophie, Theologien qui embrasse la Theologie entiere.

Ce travail presque immense lui en produisit encore un autre. On souhaita qu'il tirât en abrégé de son Corps de Theologie ce qui étoit le plus necessaire aux jeunes Ecclesiastiques, que l'on instruit dans les Seminaires. Touché de l'utilité du dessein, il l'entreprit, quoiqu'agé de 70 ans & sujet à une infirmité, qui de tems en tems le mettoit à deux doits de la mort. Il fit même beaucoup plus qu'on ne lui demandoit, il traita quantité de matieres qu'il n'a-

voit pas fait entrer dans son premier Ouvrage, & en donna un presque tout nouveau en 1694. sous ce titre, *Theologia Clericorum Seminariis accommodata Summarium*. Ce Sommaire contient 5. Volumes.

Son application à la Theologie ne nuit point à ses devoirs Academiques. Non seulement il exerça toujours sa fonction, en tenant la plume, & recueillant les fruits de chaque Assemblée, mais il entreprit de faire en Latin une Histoire générale de l'Academie depuis son établissement en 1666. jusqu'en 1696 Il prit cette Epoque pour finir son Histoire, parce qu'au commencement de 1697. il quitta la plume, ayant représenté à M. de Pontchartrain, aujourd'hui Chancelier de France, qu'il devenoit trop infirme, & qu'il avoit besoin d'un successeur. Il seroit de mon intérêt de cacher ici le nom de celui qui osa prendre la place d'un tel Homme, mais la reconnoissance que je lui dois de la bonté avec laquelle il m'agrea, & du soin qu'il prit de me former, ne me le permet pas.

Ce fut en 1698. que parut son Histoire sous ce titre : *Regia Scientiarum Academia Historia*. L'Edition fut bien-tôt enlevée, & en 1701. il en parut une seconde beaucoup plus ample, augmentée des quatre années qui manquoient à la premiere pour finir le Siècle, & dont les deux dernieres étoient comprises dans une Histoire Françoisse.

Si nous n'avions une preuve incontestable par la date de ses Livres, nous n'aurions pas la hardiesse de rapporter qu'en la même année 1698. où il donna pour la premiere fois son Histoire de l'Academie, il donna aussi un Ouvrage Theologique fort sçavant, intitulé, *Institutiones Biblicæ, seu Scripturæ Sacræ Prolegomena unâ cum selectis Annotationibus in Pentateuchum*. Là, il ramasse tout ce qu'il y a de plus important à sçavoir sur la critique de l'Ecriture Sainte ; un Jugement droit & sûr est l'Architecte qui choisit & qui dispose les materiaux que fournit une vaste Erudition. Le même caractère regne dans les Notes sur les cinq Livres de Moyse, elles sont bien choisies, peu chargées de discours, instructives, curieuses seulement lorsqu'il faut qu'elles le soient pour être instructives, sçavantes sans

pompe , mêlées quelquefois de sentimens de pieté , qui partoient aussi naturellement du cœur de l'Ecrivain , que du fond de la matiere.

Il publia en 1701 les *Pseaumes* , & en 1703 les *Livres de Salomon , la Sapience , & l'Ecclesiastique* avec de pareilles Notes. Tous ces Ouvrages n'étoient que les avant-coureurs d'un autre sans comparaison plus grand auquel il travailloit , d'une *Bible* entiere accompagnée de Notes sur tous les endroits qui en demandoient , & de Notes telles qu'il les faisoit. Il la donna en 1705 , âgé de 81. ans. Cette Bible , & par la beauté de l'Edition , & par la commodité & l'utilité du Commentaire disposé au bas des pages , l'emporte au jugement des Sçavants sur toutes celles qui ont encore paru.

Parvenu à un si grand âge , ayant acquis plus que personne le droit de se reposer glorieusement , mais incapable de ne rien faire , il voulut continuer de mettre en Latin l'Histoire François de l'Academie , & il avoit déjà fait cet honneur à une Préface générale qui marche à la tête. Mais enfin il mourut le 6. Aoust 1706 , d'une mort douce & paisible , & par la seule nécessité de mourir.

Jusqu'ici nous ne l'avons presque représenté que comme Sçavant & comme Academicien , il faudroit maintenant le représenter comme homme , & peindre ses mœurs ; mais ce seroit le Panagirique d'un Saint , & nous ne sommes pas dignes de toucher à cette partie de son Eloge , qui devroit être faite à la face des Autels , & non dans une Academie. Nous en détacherons seulement deux faits qui peuvent être rapportés dans une bouche profane.

Il alloit tous les ans à Neüilli sur Marne visiter son ancien Troupeau , & le jour qu'il y passoit étoit célébré dans tout le Village comme un jour de Fête. On ne travailloit point , & on n'étoit occupé que de la joie de le voir. Tout le monde sçait quelles sont les vertus , non-seulement Morales , mais Chrétiennes nécessaires à un Pasteur , pour lui gagner tous les cœurs à ce point là , & de quel prix sont les louanges de ceux sur qui on a eu de l'autorité , & sur qui on n'en a plus.

Pendant qu'il fut en Angleterre, les Catholiques Anglois qui alloient entendre la Messe chez l'Ambassadeur de France, disoient communément, *allons à la Messe du saint Prêtre*. Ces Etrangers n'avoient pas eu besoin d'un long tems pour prendre de lui l'idée qu'il meritoit; un extérieur très-simple, & qu'on ne pouvoit jamais soupçonner d'être composé, annonçoit les vertus du dedans, & trahissoit l'envie qu'il avoit de les cacher. On voyoit aisément que son humilité étoit, non pas un discours, mais un sentiment fondé sur la science même, & sa charité agissoit trop souvent pour n'avoir pas quelquefois, malgré toutes ses précautions, le déplaisir d'être découverte. Le desir general d'être utile aux autres étoit si connu en lui, que les témoignages favorables qu'il rendoit en perdoient une partie du poids qu'ils devoient avoir par eux-mêmes.

Le Cardinal Antoine Barberin, grand Aumônier de France, le fit Aumônier du Roi en 1656. car nous avons oublié de le dire, & c'est un point qui n'auroit pas été négligé dans un autre Eloge. Il fut pendant toute sa vie dans une extrême considération auprès de nos plus grands Prélats. Cependant il n'a jamais possédé que de très petits Benefices, ce qui sert encore à peindre son caractère, & pour dernier trait, il n'en a point possédé dont il ne se soit dépouillé en faveur de quelqu'un.

La place d'Anatomiste Pensionnaire qu'il occupoit dans l'Academie a été remplie par M. Litre, & celle d'Anatomiste associé qu'avoit M. Litre a été remplie par M. du Verney le jeune qui étoit Eleve de M. du Hamel.

En même tems le Roy ayant déclaré M. Dalefme Vétéran, parce qu'étant souvent employé par S. M. dans des Ports de Mer, il ne peut faire les fonctions Academiques, sa place de Mechanicien Pensionnaire fut remplie par M. Carré qui étoit Geomettre associé, & celle de M. Carré par M. Guisnée auparavant Eleve de M. Varignon.

F I N.

\* MEMOIRES





# MEMOIRES

DE

## MATHEMATIQUE

ET

## DE PHYSIQUE

### TIREZ DES REGISTRES

*de l'Academie Royale des Sciences.*

De l'Année M. DCCVI.

### OBSERVATIONS

*De la quantité d'eau de pluie qui est tombée à l'Observatoire pendant l'année dernière 1705, & de la hauteur du Thermometre & du Barometre.*

PAR M. DE LA HIRE.



J'AY fait les observations de la quantité <sup>1706.</sup> d'eau de pluie qui est tombée à l'Obser- <sup>9. Janvier.</sup> vatoire pendant toute l'année 1705 de la même maniere que les années précédentes, & comme je l'ay rapporté dans les Memoires que j'en ay donnés. J'ay trouvé la hauteur de l'eau de pluie dans les mois de

1706.

A

Janvier.	5 <sup>lignes <math>\frac{1}{4}</math></sup>	Juillet.	2 <sup>lignes <math>\frac{3}{4}</math></sup>
Février.	8	Aoult.	19
Mars.	7 $\frac{1}{8}$	Septembre.	16 $\frac{1}{8}$
Avril.	23 $\frac{1}{8}$	Octobre.	27 $\frac{7}{8}$
May.	4 $\frac{1}{2}$	Novembre.	13 $\frac{1}{4}$
Juin.	15 $\frac{1}{2}$	Decembre.	23 $\frac{1}{2}$

La quantité d'eau en hauteur a donc été cette année de 166 lignes  $\frac{1}{4}$  ou de 13 pouces 10 lignes  $\frac{3}{4}$ , ce qui n'est qu'un peu plus de deux tiers de ce qu'il en tombe ordinairement, & que j'ai estimé de 19. pouces par la comparaison de plusieurs années. Je n'ay point encore trouvé depuis un assez grand nombre d'années que je fais ces observations, qu'il ait fait une aussi grande secheresse que dans celle-ci; cependant la recolte des grains a été assez abondante, ce qu'on peut attribuer aux grandes pluies du mois d'Avril, qui ont suffisamment humecté la terre pour fournir aux secheresses suivantes.

Les trois mois d'Esté qui fournissent pour l'ordinaire autant d'eau que tout le reste de l'année, à cause des orages & des pluies continuës, n'en ont donné que 37. lignes  $\frac{1}{4}$ , & le mois de Juillet n'a pas fourni 3 lignes d'eau. Aussi ce ne sont pas les grandes pluies de cette saison qui contribuent à la fertilité de la terre; car elles s'élevent en vapeurs presque aussitôt qu'elles sont tombées, & une partie s'écoule sans penetrer fort avant.

Pour les vents ils ont été en Janvier fort inconstans. En Février dans tout le commencement vers l'Est, tirant tantôt au Nord & tantôt au Sud, & à la fin vers l'Oüest. En Mars le vent a été presque toujours à l'Est, passant tantôt au Nord & tantôt au Sud. En Avril le vent dominant a été autour du Sud-Oüest. En May le vent a regné au Nord, en s'écartant quelquefois vers l'Oüest. En Juin dans la premiere moitié, le vent a été comme en May & sans pluie; mais le 14 il a commencé à pleuvoir jusqu'au 17 par un vent de Nord, ensuite Nord-Oüest & Sud-Oüest, & il est tombé 11 lignes d'eau, & le 22, 4 lignes

avec un léger orage : le reste du mois le vent a été au Nord & au Nord-Est. Dans le mois de Juillet le vent dominant a été le Nord , aussi dans tout ce mois il n'a plu que très-peu. En Aoust le vent a été presque toujours à l'Oüest & au Sud-Oüest. En Septembre le vent dominant a été l'Oüest , en s'écartant un peu au Sud & au Nord. En Octobre le vent a été souvent au Nord , en tirant quelquefois à l'Est & à l'Oüest. En Novembre dans la premiere moitié du mois , le vent étoit au Nord & au Nord-Est , & dans l'autre moitié au Sud-Oüest & au Nord-Oüest. En Décembre le vent dominant a été le Sud & le Sud-Oüest avec une très-grande violence , & des especes d'ouragans à deux ou trois reprises : le 3 du mois au soir le vent étoit de Sud très-grand avec du tonnerre , ce qui est rare en Hyver dans ces païs-cy.

Il n'a point neigé pendant toute cette année.

Le Thermometre a esprit de vin & scellé hermetiquement , dont je me sers pour mesurer le froid & la chaleur , m'a montré que le froid du commencement de l'année n'a pas été considerable , puisque ce Thermometre n'est descendu que jusqu'à 25 degrés le 2 Février , & seulement à 30 degrés le 13 Novembre où il a gelé assez fort , & aussi-tôt il est remonté vers les 40 degrés. Il commence toujours à geler dans la campagne quand il est descendu jusqu'à 32. Son état moyen , comme il est au fond des carrieres de l'Observatoire , est à 48 degrés. Ces carrieres sont à 14 toises avant dans terre , & à peu près au niveau de la riviere quand elle est de moyenne hauteur. La plus grande chaleur du matin vers le lever du Soleil , qui est le tems où je fais toujours ces observations , & où l'air est le plus froid de la journée , a été marquée par le Thermometre à 65 degrés  $\frac{1}{2}$  le 18 Aoust ; mais vers les 3 heures après midy où l'air est le plus chaud du jour , le Thermometre étoit monté à 75 degrés à la fin du mois de Juillet & au commencement d'Aoust , & le 6 Aoust il étoit à 80 degrés , quoiqu'il soit à l'ombre & exposé à l'air dans la Tour découverte de l'Observatoire.

re , ce qui marquoit une très-grande chaleur , & je doute qu'elle ait jamais été plus grande dans ce pais-cy. Aussi la plupart de ces Thermometres à esprit de vin se sont cassés , la liqueur qui y est contenuë n'ayant pas eu assez de place pour s'élever dans le haut du tuyau , ce qui n'est pas arrivé au mien à cause que je l'avois fait faire fort long pour le pouvoir exposer au Soleil.

On doit remarquer que la plus grande chaleur de l'après-midy ne répond pas toujours à celle du matin par plusieurs causes particulieres. On voit aussi par ces observations que la chaleur de cette année a été beaucoup plus grande à proportion que le froid ; car le Thermomettre a surpassé son état moyen dans la chaleur de 31 degrés , & il n'est descendu au-dessous dans le froid que de 23 degrés.

Voicy les observations de la pesanteur de l'air qui nous est marquée par le Baromettre. Dans celui dont je me sers ordinairement , & qui est de ceux qu'on appelle simples , & qui est toujours placé à la hauteur de la grande Salle de l'Observatoire , le mercure s'y est élevé au plus haut à 28 pouces 3 lignes  $\frac{1}{2}$  le 28 Février avec un vent foible Nord Nord-Est , & il est descendu au plus bas à 26 pouces 7 lignes  $\frac{1}{2}$  le 20 Decembre avec un vent Oüest Sud-Oüest ; ainsi la difference de hauteur entre le plus bas & le plus haut a été de 1 pouce 7 lignes  $\frac{1}{2}$  , à peu près comme à l'ordinaire.

La grande élévation du mercure dans le tuyau du Baromettre ne nous paroît ordinairement que lorsque le vent est vers le Nord , & au contraire le plus grand abaiffement du mercure n'arrive presque toujours que quand le vent est vers le Sud , & qu'il est violent & avec orage ; cependant il y a des causes particulieres qui peuvent rendre l'air plus pesant ou plus leger , sans que le vent soit vers le Nord ou vers le Sud. C'est pourquoi on ne doit pas trop s'assûrer sur les observations du Baromettre pour juger du tems qu'il doit faire.

Je remarquerai ici en passant qu'il y a des Baromettres

dans lesquels le mercure s'éleve bien plus haut que dans d'autres, dans le même tems & dans le même lieu, quoiqu'ils soient faits avec grand soin. Dans celui dont je me sers ordinairement, & dont je viens de rapporter les observations, le mercure y est toujours plus bas de 3 lignes ; que dans un autre que j'ai aussi, qui est celui où l'on a remarqué la premiere fois de la lumiere dans le vuide du haut du tuyau en agitant le mercure, quoique dans l'autre il y en paroisse aussi. Mais si dans le Barometre où le mercure ne monte pas si haut, l'air grossier n'en a pas été vuide aussi exactement que dans l'autre, à cause peut-être que son tuyau est fort long, il s'ensuit qu'il n'est pas necessaire que le mercure soit exactement purgé d'air pour faire paroître de la lumiere dans le vuide. Enfin après toutes les experiences que nous avons faites sur les Barometres avec differens mercures dans le même tuyau, & avec differens tuyaux & le même mercure, il semble qu'il faudroit croire que les differentes hauteurs de mercure dans les tuyaux du Barometre ne viennent que de la nature du verre dont les pores ne sont pas également ferrés, & que l'air n'est pas seulement composé de deux matieres differentes, l'une toute grossiere & l'autre toute subtile, mais que les particules de la matière grossiere ayant differentes grosseurs jusqu'à être subtile, les pores de quelques verres laissent passer cette matiere moins grossiere, qui par sa pesanteur fait descendre un peu le mercure dans le tuyau. Cette hypothese semble confirmée par l'une des dernieres experiences que M. Amon-ton fit à l'Academie avec un canon de mousquet bien soudé par l'un des bouts au lieu d'un tuyau de verre, où l'on remarqua que le mercure s'arrêta beaucoup plus bas que dans le verre ordinaire, peut-être à cause que les pores du fer sont beaucoup plus grands que ceux du verre.

J'ai observé la declinaison de l'aiguille aimantée de  $90^{\circ} 35'$  vers l'Oüest le dernier jour de Decembre 1705, avec la même aiguille & dans le même lieu où je l'ay

faite depuis plusieurs années, & avec les mêmes circonstances, comme je l'ai marqué dans d'autres Memoires.

## OBSERVATIONS

*De la Pluie & du Vent, faites en l'année 1705  
au Château du Pontbriand situé à deux lieues  
de Saint-Malo en Bretagne.*

1706.  
2. Janvier.

ON a pû voir dans les Memoires de l'année 1704 les observations de la Pluie & du Vent faites au Château du Pontbriand à deux lieues de Saint-Malo en Bretagne. Voici la continuation de ces observations, que M. du Pontbriand a faites avec beaucoup d'exactitude au même lieu durant l'année 1705, & qu'il a envoyées à M. du Torar de l'Academie Royale des Sciences pour être communiquées à l'Academie, & pour être comparées avec les observations faites à Paris par M. de la Hire.

Année 1705.

## JANVIER.

Jours.	Eau de Pluie.	Vents.
3	2 lignes.	Nord Nord-Est.
10	2	S. S. E.
11	1	S. S. O.
12	1	O. N. O.
13	3	N. N. O.
14	1	O. N. O.
17	1	E. N. E.
19	0	E. N. E.

Total 14. lignes.

## DES SCIENCES.

5

## F E V R I E R.

<i>Jours.</i>	<i>Eau de Pluie.</i>	<i>Vents.</i>
5	2 lignes.	Est-Sud-Est.
10	1	N. N. E.
13	0	N. O.
14	2	N. N. O.
16	2	S. S. O.
17	0	S. S. O.
18	2	E. S. E.
25	1	E. N. E.
28	0	E. N. E.

Total 13 lignes.

## M A R S.

<i>Jours.</i>	<i>Eau de Pluie.</i>	<i>Vents.</i>
4	3 lignes.	Nord-Est.
8	0	S. S. O.
10	0	S. S. O.
13	1	S. S. O.
14	0	S. S. E.
24	1	S. E.
25	1	S. E.
26	3	S. S. O.
27	5	S. S. O.
28	0	S. S. O.
29	3	S. E.
30	0	N. E.
31	0	N. E.

Total 23 lignes  $\frac{1}{2}$ .

## A V R I L.

<i>Jours.</i>	<i>Eau de Pluie.</i>	<i>Vents.</i>
1	0 lignes.	Ouest.
2	1	N. O.
3	0	N. O.
4	2	N. O.
5	2	O. N. O.
7	3	O. S. O.

# 8 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

Jours.	Eau de Pluie.	Vents.
8	2 $\frac{1}{4}$ ligne.	O. S. O.
9	1 $\frac{1}{4}$	S. S. O.
10	0 $\frac{1}{4}$	S. S. O.
11	1 $\frac{1}{4}$	N. O.
12	1 $\frac{1}{4}$	N. O.
15	1 $\frac{1}{4}$	N. O.
16	0 $\frac{1}{4}$	S. S. O.
19	1 $\frac{1}{4}$	N. E.
20	0 $\frac{1}{4}$	S. S. E.
24	4 $\frac{1}{4}$	O. E.
25	0 $\frac{1}{4}$	N. O.

Total 26. lignes.

## M A Y.

Jours.	Eau de Pluie.	Vents.
4	3 $\frac{1}{4}$ ligne.	Oüest.
5	0 $\frac{1}{4}$	N. O.
18	4 $\frac{1}{4}$	N. O.
26	0 $\frac{1}{4}$	S. E.
28	0 $\frac{1}{4}$	N. E.

Total 8  $\frac{1}{4}$  lignes.

## J U I N.

Jours.	Eau de Pluie.	Vents.
13	4 $\frac{1}{4}$ ligne.	Sud-Sud-Oüest.
16	0 $\frac{1}{4}$	O. S. O.
17	2 $\frac{1}{4}$	O. S. O.

Total 7  $\frac{1}{2}$  lignes.

## J U I L L E T.

Jours.	Eau de Pluie.	Vents.
2	0 $\frac{1}{4}$ ligne.	Nord.
3	1 $\frac{1}{4}$	N.
6	2 $\frac{1}{4}$	N. O.
10	0 $\frac{1}{4}$	N. O.

Total 4  $\frac{1}{2}$  lignes.

## AOUST



## A O U S T.

<i>Jours.</i>	<i>Eau de Pluie.</i>	<i>Vents.</i>
	2 $\frac{1}{4}$ lignes.	Sud Oüest.
7	3	O. S. O.
21	1 $\frac{1}{2}$	S. O.
23	1	N. O.
24	2 $\frac{1}{2}$	E. S. E.
27	1	O. S. O.
31		

Total 11  $\frac{1}{4}$  lignes.

## S E P T E M B R E.

<i>Jours.</i>	<i>Eau de Pluie.</i>	<i>Vents.</i>
3	2 $\frac{1}{4}$ lignes.	Nord Oüest
4	2 $\frac{1}{4}$	N. N. O.
5	2 $\frac{1}{2}$	O. S. O.
6	3 $\frac{1}{2}$	O. S. O.
8	3	N. O.
10	1 $\frac{1}{4}$	S. O.
15	0 $\frac{1}{2}$	N. O.
23	3	N. N. O.

Total 18 lignes.

## O C T O B R E.

<i>Jours.</i>	<i>Eau de Pluie.</i>	<i>Vents.</i>
6	5 $\frac{1}{2}$ ligne.	Nord-Oüest.
12	1	N. O.
13	1	N. O.
14	0	N. O.
15	2	S. S. O.
16	0 $\frac{1}{2}$	S. S. O.
17	3 $\frac{1}{2}$	S. S. O.
18	6 $\frac{1}{4}$	S. S. O.
19	3	S. S. O.
29	2	S. S. O.
30	3	N. O.
31	3	N. O.

Total 31  $\frac{1}{4}$  lignes.

NOVEMBRE.

Jours.	Eau de Pluie.	Vents.
2	3 lignes	Est.
3	2 $\frac{1}{2}$	N. E.
4	1	N. E.
9	0	N. E.
15	1	E. S. E.
18	1	N. E.
20	1	N. O.
21	0	S. O.
22	0	N. O.
25	3	N. O.
26	0	N. O.
28	0	N. N. O.
29	5	S. O.
30	4	N. O.

Total 26 lignes  $\frac{1}{2}$ .

DECEMBRE.

Jours.	Eau de Pluie.	Vents.
1	1 lignes	Nord.Oüest
3	5	N. O.
4	5	O. S. O.
5	2	N. O.
6	1	S. O.
10	3	S. O.
13	2	S. S. O.
14	1	S. S. O.
15	8	S. S. O.
16	3	N. O.
17	3	N. O.
18	2	N. O.
19	1	O. S. O.
20	7	N. O.
21	3	N. O.
22	2	S. O.
24	5	O. S. O.
25	3	O. S. O.
26	3	O. S. O.
29	4	O. S. O.
	1	S. S. O.

Ce jour 30. il y a  
eu une violence tem-  
pête, qui a causé  
de grands défordres  
dans toute la Breta-  
gne.

30	_____	5	_____	S.S.O.
31	_____	5	_____	S.S.O.

Total 75. lignes.

Total de la quantité de l'eau de pluie tombée  
au Pontbriand durant l'année 1705. 260 lignes.  
Et en l'année 1704. 284 lignes.  
Difference 16 lignes.

## AUTRES OBSERVATIONS

De la Pluie tombée pendant l'année 1705. à Lyon, &  
communiquées à M. Cassini par le P. Fulchiron  
Jesuite.

J	Anvier	_____	7	<sup>lignes.</sup>
	Fevrier	_____	27	<sup>1</sup> / <sub>2</sub>
	Mars	-----	18	<sup>1</sup> / <sub>2</sub>
	Avril	-----	10	<sup>1</sup> / <sub>2</sub>
	May	-----	23	<sup>1</sup> / <sub>2</sub>
	Juin	-----	26	<sup>1</sup> / <sub>2</sub>
	Juillet	----	12	<sup>2</sup> / <sub>4</sub>
	Aouft	----	15	
	Septembre	-----	6	<sup>1</sup> / <sub>2</sub>
	Octobre	-----	47	<sup>1</sup> / <sub>2</sub>
	Novembre	-----	14	<sup>1</sup> / <sub>2</sub>
	Decembre	-----	63	<sup>1</sup> / <sub>2</sub>

1706.  
26 Janvier.

Somme totale . . 272 <sup>1</sup>/<sub>2</sub>, ou 22 pouces 8 lignes <sup>1</sup>/<sub>2</sub>.  
L'année 1704 il plut . . . 15 pouces 4 lignes <sup>1</sup>/<sub>2</sub>.

Difference . . . 7 pouces 4 lignes.

## OBSERVATIONS.

*Du Barometre & du Thermometre faites en différentes Villes pendant l'année 1705.*

PAR M. MARALDI.

1706.  
16 Janvier.

**L**E Barometre dans la Tour Occidentale de l'Observatoire a été dans sa plus grande hauteur les trois derniers jours de Fevrier, qu'il se trouva à 28 pouces 3 lignes  $\frac{1}{2}$  par un vent de Nord & de Nord-Est. La plus petite hauteur à laquelle il soit descendu a été de 26 pouces 8 lignes  $\frac{1}{2}$ , ce qui arriva le 19 Decembre par un vent de Sud & de Sud-Est très-violent avec pluie. La variation de la hauteur du Barometre a été de 1. pouce & 7 lignes.

Le Thermometre de M. Amontons, placé dans la Tour Occidentale de l'Observatoire, a été le 2 & le 3 Fevrier de l'an 1705 à 51 degrés 11 lignes, qui est la plus petite hauteur où il soit arrivé. Par les observations que M. le Marquis Salvago a faites à Gennes avec un Thermometre semblable au nôtre, le 3 de Fevrier fut aussi le jour qu'il s'est trouvé plus bas, ayant été à 52 degrés 10 lignes, presque un degré plus haut qu'à Paris. Par les observations faites à Lyon par le P. Fulchiron, le Thermometre fut aussi le même jour 3 Fevrier au degré le plus bas qu'il soit arrivé durant l'année 1705.

A Paris le Thermometre a été au plus haut degré le 6 d'Aoust, étant monté ce jour-là à 57 degrés 3 lignes par un vent de Sud-Est. Le même jour un Thermometre de M. Cassini qui étoit depuis 35 ans en experience se cassa, la liqueur ayant rempli tout le tuyau. A Gennes le Thermometre de M. Amontons fut le 2 & le 3 Aoust au plus haut degré où il soit arrivé l'année 1705, & il monta à 56 degrés 8 lignes, faisant ces jours-là un vent de Nord; de sorte qu'à Gennes le Thermometre n'est pas monté

cette année aussi haut qu'à Paris, y ayant un demi-degré de différence. A Lyon le Thermometre est monté au plus haut le 8 Aoust deux jours après qu'à Paris. Par les observations que M. Bon a faites à Montpellier avec un Thermometre de M. Amontons, le 30 Juillet le Thermometre fut à 58 degrés 2 lignes, ayant été ce jour-là à la plus grande hauteur qu'il ait eu pendant toute l'année, & à Montpellier il a été presque un degré plus haut qu'à Paris. Le 30 Juillet à Montpellier la plupart des vignes furent brûlées par la grande chaleur, & le même Thermometre ayant été exposé au Soleil pendant 28 minutes de temps, monta au dernier degré, c'est-à-dire à 73 pouces, qui est le même degré où M. Amontons marque le degré de chaleur de l'eau bouillante.

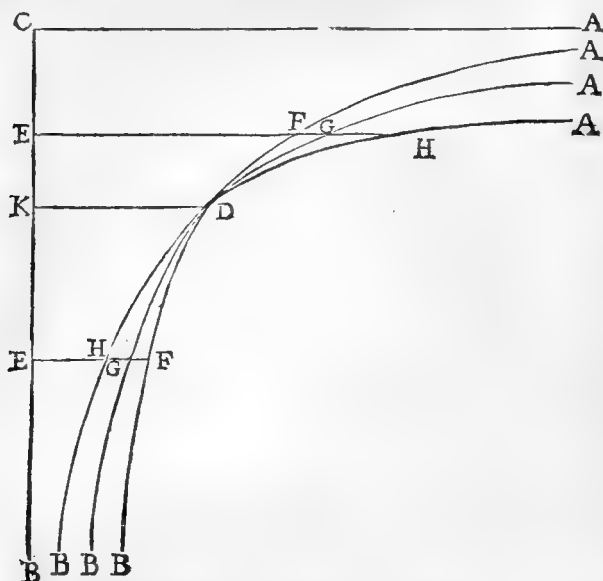
## REFLEXIONS.

*Sur les espaces plus qu'infinis de M. Wallis.*

PAR M. V A R I G N O N.

**M**onsieur Walis cherchant la mesure des Espaces renfermez par des hyperboles & leurs asymptotes, & ayant trouvé pour l'expression de quelques-uns de ces Espaces des grandeurs negatives, a crû qu'ils étoient plus qu'infinis. Mais comme un plus qu'infini m'a toujours paru renfermer une contradiction, cela m'a déterminé à chercher le dénoüement de ce mystere, qui cessera d'en être un, dès que j'aurai fait voir que ce que cet Auteur prend pour l'expression d'un Espace plus qu'infini, n'est pas même celle d'un infini, mais seulement d'un Espace fini, qui est à la verité le complément d'un Espace infini; & qu'ainsi les hyperboles & leurs asymptotes ne renferment point d'Espaces plus qu'infinis, comme cet Auteur l'a pretendu. C'est-là l'éclaircissement qui a été promis dans le Livre de M. Carré sur le Calcul Integral.

1706.  
3. F.v iet.



I. Soient donc tous les genres d'hyperboles  $AFB$ ,  $AGB$ , &  $AHB$ , entre les mêmes asymptotes perpendiculaires  $AC$ ,  $CB$ , dont le degré de la puissance des ordonnées  $EF$ ,  $EG$ ,  $EH$ , soit dans l'une plus haut, dans l'autre le même, & dans la troisième plus bas que celui ( $m$ ) des abscisses  $CE$ . Enforte que le lieu de  $AFB$  soit  $CE^m \times EF^{m+n} = CK^{2m+n}$ ; celui de  $AGB$ ,  $CE^m \times EG^m = CK^{2m}$ ; & celui de  $AHB$ ,  $CE^m \times EH^{m-n} = CK^{2m-n}$ , dans lequel il faut toujours  $m > n$ , autrement ce dernier lieu se changeroit en parabolique dans le cas de  $m < n$ , ou du moins à la ligne droite dans celui de  $m = n$ .

$$\frac{CK^{\frac{2m+n}{m+n}}}{CE^{m+n}}$$

II. Cela posé, l'on aura  $EF = \frac{CK^{\frac{2m+n}{m+n}}}{CE^{m+n}}$ ,  $EG = \frac{CK^{\frac{2m}{m}}}{CE^m}$ , &

$$EH = \frac{CK^{\frac{2m-n}{m-n}}}{CE^{m-n}}. \text{ Donc}$$

$$1^{\circ}. EF. EG :: \frac{CK^{\frac{2m+n}{m+n}}}{CE^{\frac{m}{m+n}}} : \frac{CK^2}{CE} :: \frac{CE}{CE^{\frac{m}{m+n}}} : \frac{CK^2}{CK^{\frac{2m+n}{m+n}}} :$$

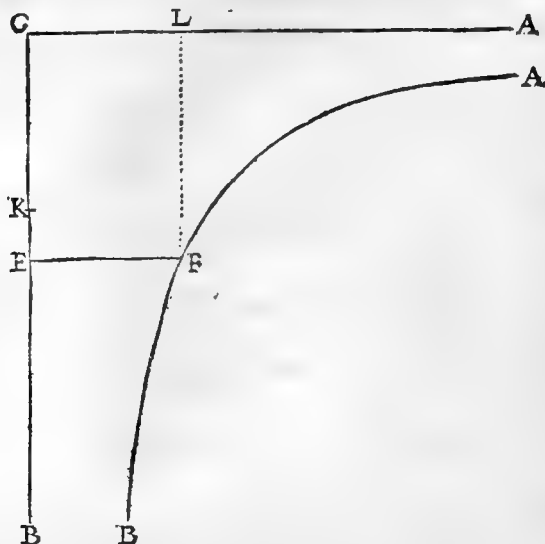
$CE^{\frac{m}{m+n}}. CK^{\frac{n}{m+n}}$ . D'où l'on voit que dans le cas du degré  $(m+n)$  des ordonnées plus grand que celui  $(m)$  des abscisses, l'on aura  $EF < EG$  depuis  $C$  jusqu'en  $K$ , &  $EF > EG$  par-delà  $K$  vers  $B$  à l'infini : de sorte que les hyperboles  $AFB$  &  $AGB$  se couperont à l'extrémité  $D$  de l'ordonnée  $KD$ .

$$2^{\circ} \text{ L'on aura aussi } EG. EH :: \frac{CK^2}{CE} : \frac{CK^{\frac{2m-n}{m-n}}}{CE^{\frac{m}{m-n}}} : \frac{n}{CE^{m-n}}$$

$CK^{\frac{n}{m-n}}$ . D'où l'on voit au contraire que dans le cas du degré  $(m-n)$  des ordonnées moindres que celui  $(m)$  des abscisses, l'on aura toujours  $EH > EG$  depuis  $C$  jusqu'en  $K$ , &  $EH < EG$  par-delà  $K$  vers  $B$  à l'infini : de sorte que les hyperboles  $AHB$  &  $AGB$  se couperont aussi en  $D$ .

III. On voit delà que l'espace  $ACB B G G A$  entre l'hyperbole ordinaire  $AGB$  & ses asymptotes, étant infini de part & d'autre, l'hyperbolique  $ACB B F F A$  sera aussi infini du côté de  $B$  qu'il est le plus ouvert ; & l'hyperbolique  $ACB B H H A$  infini de même du côté de  $A$  qu'il est aussi le plus ouvert.

IV. Mais avant que de chercher la valeur juste de ces espaces, il est bon ( pour moins d'embarras ) de remarquer que les deux derniers reviennent au même genre d'hyperbole, sçavoir à celui dont les coordonnées montent à des puissances différentes ; puisqu'on peut prendre à discrétion celles du plus haut ou du plus bas degré pour les ordonnées de cet Courbe. Par exemple ici, le lieu Voyez la Figure de la page suivante.  $(art. 1.) CE^m \times EF^{m+n} = CK^{2m+n}$  de l'hyperbole  $AFB$ , représentant ses ordonnées  $EF$  à un plus haut degré que ses abscisses  $CE$ , représente de même ses ordonnées  $LF$  à un plus bas degré que les abscisses  $CL$  : De sorte que l'on peut également dire que les ordonnées de l'hyper-



bole  $AFB$  sont d'un plus haut ou d'un plus bas degré que ses abscisses, selon qu'on les choisira pour telles; & ainsi de toute autre hyperbole dont les coordonnées montent à des puissances différentes.

V. Cela étant, l'espace  $BEFB$  pris du côté de  $B$ , sera celui que M. Wallis appelle *plus qu'infini*. Pour en trouver presentement la valeur, soient  $CE = x$ ,  $EF = v$ , &  $CK = a$  constante. L'on aura (*art. 1.*)  $x^{m+n}v^{m+n} = a^{2m+n}$ ,

ou  $v(EF) = \frac{a^{\frac{2m+n}{m+n}}}{x^{\frac{m}{m+n}}}$  pour le lieu de l'hyperbole  $AFB$ ;

ce qui donne l'élément  $v dx = a^{\frac{2m+n}{m+n}} x^{\frac{-m}{m+n}} dx$ , & l'espace

ce  $ACEFA$  ( $\int v dx$ )  $= \frac{m+n}{n} \times a^{\frac{2m+n}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}} = \frac{m+n}{n} \times$

$CK^{\frac{2m+n}{m+n}} \times CE^{\frac{n}{m+n}}$ ; c'est-à-dire, fini du côté de  $A$  par rapport auquel  $CE$  est finie; & seulement infini du côté de  $B$ , puisque cette même  $CE$  n'y sçauoit devenir tout au plus qu'infinie.

VI. Donc



VI. Donc si en prenant  $LE (x)$  pour l'ordonnée de

l'hyperbole  $AFB$ , ( art. 5. )  $x dv = a \frac{2m+n}{m} v^{\frac{m-n}{m}} dv$   
pour l'élément de son espace  $BCLFB$  entre asymptotes ,

cet espace  $(\int x dv)$  se trouve  $= \frac{ma \frac{2m+n}{m} v^{\frac{m-n}{m}}}{-n} = \frac{ma \frac{2m+n}{m}}{-nv^{\frac{n}{m}}}$

négatif, ce n'est pas une marque qu'il soit plus qu'infini, comme l'a dit \* M. Wallis; mais seulement qu'au lieu de cet espace  $BCLFB$  il faut prendre son complément  $ALFA$

$= \frac{ma \frac{2m+n}{m}}{nv^{\frac{n}{m}}}$  positif : ce qui arrive très-souvent dans une

infinité d'autres quadratures. En effet les signes  $+$  &  $-$  n'étant que des marques d'operation, sçavoir d'addition & de soustraction, à faire sur les grandeurs qu'ils affectent, ils n'en changent point du tout la valeur, bien loin de pouvoir les reduire à moins que rien, ainsi qu'il faudroit pour M. Wallis; mil écus que je dois, valent autant que mil écus que j'aurois; 6 à ajouter valent autant que 6 à retrancher, &c. Et si l'on dit que  $+6$  ne sont pas égaux à  $-6$ , cela ne signifie autre chose sinon qu'ajoutant 6 on fait plus que si on les retranchoit, les operations d'addition & de soustraction, exprimées par les signes  $+$  &  $-$ , étant aussi comprises dans cette comparaison. Donc

$\frac{ma \frac{2m+n}{m}}{nv^{\frac{n}{m}}}$  vaut autant que  $\frac{ma \frac{2m+n}{m}}{+nv^{\frac{n}{m}}}$ , c'est à dire, seulement

une espace fini, bien loin d'en signifier un plus qu'infini : Toute la difference, c'est que les espaces exprimés par ces formules, sont renversés l'un par raport à l'autre, comme les expressions négatives le marquent par tout en Geometrie.

VII. Pour prouver encore que la valeur négative

$\frac{ma \frac{2m+n}{m}}{-nv^{\frac{n}{m}}}$  trouvée ( art. 6. ) pour l'espace cherché  $BCLFB$ ,  
1706. C

\* Arith.  
infin. schol.  
prop. 101.  
et prop. 104.  
etc.

n'est point une expression plus qu'infinie de cet espace, mais seulement une valeur finie de son complément *ALFA* à l'égard duquel elle devient positive, en sorte

que *ALFA* soit  $= \frac{ma^{\frac{2m+n}{m}}}{n}$ ; il n'y a qu'à considérer que

si de l'espace fini *ACEFA* trouvé cy-devant (art. 5.)  $= \frac{m+n}{n} \times a^{\frac{2m+n}{m+n}} \times \frac{n}{m+n}$ , l'on retranche le parallelogramme

*CEFL* ( $xv$ ) l'on aura *ALFA*  $= \frac{m+n}{n} a^{\frac{2m+n}{m+n}} x^{\frac{m+n}{m+n}} - xy$  (à cause que le lieu  $x^m y^{m+n} = a^{2m+n}$  de l'art. 5. donne

$$x = \frac{a^{\frac{2m+n}{m}}}{m+n}, \& x^{\frac{m+n}{m}} = \frac{a^{\frac{2m+n}{m}}}{n} \Bigg) = \frac{m+n}{n} \times \frac{a^{\frac{2m+n}{m}}}{n}$$

$$= \frac{a^{\frac{2m+n}{m}}}{n} \times \frac{m+n}{n} = \frac{a^{\frac{2m+n}{m}}}{n} \times \frac{m+n}{n} = \frac{a^{\frac{2m+n}{m}}}{n} \times \frac{m+n}{n}$$

$$= \frac{a^{\frac{2m+n}{m}}}{n} = \frac{ma^{\frac{2m+n}{m}}}{n}, \text{ ainsi que le viens de dire.}$$

Voyez la Figure de la page 14. ci-dessus.

VIII. Après cela le lieu général  $x^m y^p = a^{m+p}$  des hyperboles entre asymptotes (telles que dans la Fig. 1. dont les ordonnées *EF*, *EG*, *EG*, sont ici chacune séparément  $= y$ , & leurs abscisses communes *CE*  $= x$ ) donnant

$\frac{pa^{\frac{m+p}{p}} x^{\frac{p-m}{p}}}{p-m}$  pour l'espace asymptotique terminé par une

de leurs ordonnées ( $y$ ) ; il est aisé de voir,

10. Que lorsque  $p > m$ , comme (art. 2. n. 1.) dans l'hyper-

bole *AFB*, cet espace doit être *ACEFA*  $= \frac{pa^{\frac{m+p}{p}} x^{\frac{p-m}{p}}}{p-m}$

fini, & le tout *ACBBFA* infini lorsque  $x$  (*CE*) est infini. Ce qui prouve que la valeur de cet espace prolongé à

l'infini de part & d'autre , doit être fini du côté de  $A$ , & infini du côté de  $B$ .

2°. Lorsque  $p < m$ , comme ( art. 2. n. 2. ) dans l'hyper-

bole  $AHB$ , la formule générale  $\frac{p a^{\frac{m+p}{p-m}} p x^{\frac{p-m}{p-m}}}{p-m}$  devenant ici négative, au lieu d'exprimer l'espace cherché  $ACEHA$ , elle se change en celle de son complément  $BEHB$ , &

donne ce complément  $BEHB = \frac{p a^{\frac{m+p}{m-p}} p}{m-p}$  positif :

de manière que lorsque  $x$  ( $CE$ ) sera  $= 0$ , tout l'espace  $BCAAHB$  sera infini. Ce qui fait voir aussi que la valeur de cet espace prolongé à l'infini de part & d'autre, doit être fini du côté de  $B$ , & infini du côté de  $A$ , comme dans l'hyperbole  $AFB$  cy-dessus; mais à rebours, ainsi qu'il doit arriver suivant l'art. 4.

3°, Enfin lorsque  $p = m$ , comme ( art. 1. ) dans l'hyper-

bole  $AGB$ , l'expression générale  $\frac{p a^{\frac{m+p}{p-m}} p x^{\frac{p-m}{p-m}}}{p-m}$  des espaces hyperboliques asymptotiques donne le cherché  $ACEGA$  aussi-bien que son complément  $BEGB = \frac{\infty}{0}$ . D'où l'on voit que l'espace  $ACBBGA$  doit être infini de part & d'autre; & par conséquent plus infini (pour ainsi dire) que les précédens  $ACBBFA$  &  $ACBBHA$  qu'on vient de voir ne l'être que par chacun un côté. Donc il s'en faut bien qu'ils ne soient plus qu'infinis: Et c'est tout ce qu'on s'étoit proposé d'examiner ici.



## R E M A R Q U E S

E T

## R E F L E X I O N S

*Sur la nature des Cataractes qui se forment  
dans l'œil.*

PAR M. DE LA HIRE.

1706.  
17 Fevrier.

ON a distingué le *Glaucoma* de la *Cataracte*, en ce que le *Glaucoma* se prend pour une maladie du *CrySTALLIN*, qui devient opaque & de couleur blanchâtre ou verdâtre; mais la *Cataracte* n'est composée que de quelques filets ou toiles qui se forment dans l'humeur aqueuse, & qui peu à peu en s'épaississant empêchent les rayons de la lumière de pénétrer dans l'œil jusqu'à la rétine.

On a toujours jugé que le *Glaucoma* étoit un mal incurable, puisqu'il n'étoit pas possible de rendre au *CrySTALLIN* sa transparence quand il l'avoit perdue: mais pour la *Cataracte* il s'est trouvé des Operateurs assez adroits pour percer l'œil par le côté avec une aiguille, & rompre en tournant fort doucement les especes de membranes qui la forment; & en les rangeant dans la partie basse de l'œil derrière la membrane uvée, rendre à l'œil son usage ordinaire.

C'est-là le sentiment commun qu'on a de ces maladies. Cependant quelques Medecins soutiennent à present que ce ne sont point des pellicules ou membranes qu'on abaisse quand on fait l'opération de la *Cataracte*; mais que c'est le *Cristallin* même qu'on détache du ligament ciliaire qui le soutient, & qu'on le range vers la partie basse de l'œil. Ils disent pour confirmer ce qu'ils avancent, qu'ils ont trouvé le *Cristallin* dérangé & abaissé dans la

dissection de l'œil d'un homme à qui on avoit fait cette operation.

Mais je réponds que s'il étoit possible de déplacer le Crystallin en le détachant du ligament ciliaire , le Glaucoma ne seroit plus une maladie incurable , comme on l'a jugé jusqu'à présent. Et si l'on abaissoit toujours le Crystallin dans cette operation , la Cataracte suivant l'opinion commune ne seroit qu'une maladie imaginaire , puisque sans se mettre en peine de cette membrane ou peau qu'on croit voir dans l'humeur aqueuse , ni de toutes les observations qu'on fait pour juger s'il est tems de l'abaisser , & si elle est assés meure & de nature à être détournée & rompuë avec l'aiguille , on gueriroit toujours ce mal en quelque tems & en quelque circonstance que ce fût en abaissant le Crystallin , & l'on rendroit la vûe au malade.

Mais il semble dans ce doute qu'on accuse les Operateurs de ne sçavoir pas ce qu'ils font , & que croiant abatre des especes de pellicules , ils détachent & abattent le Crystallin. Cependant il y a peu d'apparence qu'ils se trompent tous , hormis quelques-uns , dans le jugement qu'ils font de ces deux maladies de l'œil , & dans cette operation.

Ces jours passés M. Chomel de cette Academie ayant voulu faire avec nous quelques operations sur des yeux de bœuf au sujet des differens sentimens qu'on avoit de la Cataracte , nous ouvrîmes d'abord un de ces yeux pour voir si l'humeur vitrée étoit adherante à la membrane qui renferme le Crystallin , & nous reconnûmes qu'elle s'en détachoit assés facilement. Ensuite dans d'autres yeux nous perçâmes de biais la Sclerotique entre le ligament ciliaire & l'uvée avec une aiguille applatie par le bout , comme font quelques-unes de celles dont on se sert dans les operations ordinaires , & l'ayant poussée jusques dans le Crystallin , nous la tournâmes & nous fîmes en même tems tourner le Crystallin qui y étoit attaché ; car il est d'une consistance assés ferme pour résister à l'effort qu'il falloit faire pour rompre le ligament ciliaire , & pour

coucher le CrySTALLIN dans l'humeur vitrée on dans l'aqueuse : mais nous remarquâmes que l'humeur vitrée résistoit toujours au CrySTALLIN & le soutenoit , quoiqu'il fût couché , en sorte qu'il bouchoit la plus grande partie de la prunelle ; & quand nous voulûmes retirer l'aiguille , le CrySTALLIN qui y étoit attaché suivoit en même tems , & ne quittoit point l'aiguille que par la résistance que lui faisoit la partie interieure de l'œil. Il arrive aussi quelquefois qu'en tournant l'aiguille le ligament ciliaire ne se rompt pas , mais que le corps du CrySTALLIN se sépare de sa membrane , & qu'il tourne au-dedans , en sorte qu'en retirant l'aiguille on déchire cette membrane où elle est percée , & que le CrySTALLIN sort par cette ouverture , & reste entre le ligament ciliaire & l'uvée , & bouche toute l'ouverture de la prunelle , ou la plus grande partie.

On voit par-là qu'on ne pourroit retirer aucun avantage du CrySTALLIN abatu , puisque s'il étoit opaque il intercepteroit toujours les raisons des objets , & il les empêcheroit d'entrer dans l'œil étant trop gros , & ne pouvant pas être assés abaissé pour être caché au-dessous de l'ouverture de la prunelle : car l'humeur vitrée est mucillagineuse & comme de la gomme Adragante fonduë dans l'eau , & de plus on ne pourroit le ranger dans l'humeur aqueuse sans rompre la membrane uvée.

Une des grandes objections qu'on puisse faire contre le sentiment de ceux qui disent que la Cataracte est formée de pellicules qui sont suspenduës dans l'humeur aqueuse , est que ceux à qui on a abatu la Cataracte sont obligés de se servir d'une loupe ou gros verre pour voir distinctement les objets , ce qui ne devoit pas être , si les trois humeurs demeuroident à leur place & dans leur entier : mais on nous a assuré qu'il y avoit des personnes qui voyoient fort bien après l'opération sans se servir de loupe ; & il se peut faire que dans quelque sujets l'humeur aqueuse ne laisse pas d'être encore un peu trouble , quoique les pellicules ne soient plus au-devant de la prunelle , & qu'ils sont obligés de se servir de loupe pour faire passer plus de

rayons dans l'œil , qui ne laissent pas de s'assembler toujours sur la retine si l'on approche l'objet un peu plus près de l'œil.

On fait encore une autre objection contre le même sentiment , & c'est comment il se peut faire que les pellicules qui forment la Cataracte soient toujours placées entre le Crystallin & l'uvée. Mais je répondrois à celle-ci que les parties de l'œil qui fournissent les matieres qui forment les pellicules de la Cataracte , sont aussi entre le Crystallin & l'uvée , & c'est pourquoi elles se doivent toujours trouver dans cet endroit de l'humeur aqueuse.

Cette seconde objection a pû faire naître à quelques-uns une idée de la nature de la Cataracte fort différente des premières. Ils disent que la Cataracte n'est qu'un épaississement des premières enveloppes du Crystallin qui est formé par plusieurs de ces enveloppes à peu près comme un oignon , & que dans l'opération on arrache cette peau opaque de dessus la surface du Crystallin , & qu'alors le Crystallin étant devenu plus mince , il faut suppléer au défaut de sa convexité par celle d'un verre placé entre l'objet & l'œil.

Il est vrai que le Crystallin ayant été séché à l'air , paroît composé de plusieurs peaux qui enveloppent au milieu une espèce de noyau d'une consistance un peu plus dure que le reste : mais quelle main assez adroite & quels outils faudroit-il avoir pour arracher cette peau opaque de dessus le Crystallin ? Et quand cela se pourroit faire , on romproit nécessairement le ligament ciliaire qui seroit attaché à cette peau , & par conséquent tout le corps du Crystallin tomberoit en quelque endroit dans l'humeur aqueuse , & en s'y plaçant de côté détourneroit les rayons & empêcheroit la vision.

On a remarqué que plusieurs personnes à qui on avoit abbatu la Cataracte voyoient très-bien les objets aussi-tôt après que l'opération avoit été faite ; mais que quelques jours après que l'on commençoit à leur débander les yeux , ils ne voyoient plus rien , & qu'ils avoient entièrement

perdu la vue, quoiqu'il ne parût point au dehors que la Cataracte fut remontée. Voici comme il me semble qu'on peut rendre raison de cet accident:

Il est très-difficile qu'en abbattant les pellicules qui forment la Cataracte, surtout si elles sont fort adherentes au dedans de l'œil, que le tranchant de la pointe de l'aiguille ne touche la surface antérieure du CrySTALLIN à cause de sa convexité; & si l'on ouvre un peu la membrane du CrySTALLIN, tout le CrySTALLIN se plisse & se ride, & à cause de ces plis les rayons des objets lumineux ne passent plus directement vers la retine; mais ils s'écartent d'un côté & d'autre, & l'œil ne peut rien appercevoir. Mais le CrySTALLIN touchant l'humeur aqueuse par l'endroit où la membrane aura été blessée, ce plissement n'arrivera pas subitement après le coup, mais quelque tems après: c'est pourquoi on peut voir les objets aussi-tôt après l'opération, & dans la suite on ne les verra plus.

## OBSERVATIONS

Sur les Methodes de Maximis & Minimis, où l'on fait voir l'identité & la difference de celle de l'Analyse des Infiniment petits avec celles de M<sup>rs</sup> Fermat & Hude.

PAR M. GUÍSNEE.

1706.  
30 Fevrier.

UN de mes amis qui demeure en Province, habile homme dans l'ancienne Geometrie & dans l'Algebre ordinaire, à qui j'envoiai il y a quelque tems le Livre des *l'Analyse des Infiniment petits*, m'a prié par une de ses Lettres de lui donner des éclaircissémens sur quelques difficultés qu'il trouve dans la troisième Section, où M. le Marquis de l'Hôpital, l'illustre Auteur de cet Ouvrage, enseigne la methode de résoudre, par le calcul differenciel, les questions de *Maximis & Minimis*.

Voici



Voici ses difficultés dans les termes qu'il les propose.

*Première difficulté.* Lorsque la supposition de  $dy=0$ , & celle de  $dy=\infty$ , donnent chacune une valeur de  $x$ ; pourquoi doit on préférer celle qui est tirée de la supposition de  $dy=0$  à celle qui est tirée de la supposition de  $dy=\infty$ ? Ce qu'observe toujours l'Auteur. Dans le premier Exemple art. 48. où il cherche la plus grande appliquée de la Courbe dont la nature est exprimée par cette Equation  $A$

$$A. x^3 + y^3 = a x y.$$

Ayant différentié l'Equation  $A$ , & tiré de la supposition de  $dy=0$ ,  $x = \frac{1}{3} a^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$ ; il dit que cette valeur de  $x$  résout la question, & il ne fait aucune mention ni de la supposition de  $dy=\infty$ , ni de la valeur de  $x$  qu'on en tire, qui est  $x = \frac{1}{3} a^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}}$ , quoique cette dernière valeur soit autant réelle que la première.

*Seconde difficulté.* Comment connoître celle des valeurs de  $x$  qu'il faut choisir, lorsque l'une ou l'autre supposition de  $dy=0$ , ou  $=\infty$ , où toutes les deux en donnent plusieurs différentes?

*Troisième difficulté.* De quelle manière doit-on s'assurer, si l'appliquée qui répond à une valeur de  $x$  tirée ou de la supposition de  $dy=0$ , ou de celle de  $dy=\infty$ , est un *Maximum* ou un *Minimum*, lorsque la Courbe n'est point décrite & qu'on n'en connoît point la figure, ce que je suppose toujours?

*Quatrième difficulté.* Lorsqu'une appliquée, qui répond à une valeur de  $x$  tirée de l'une ou de l'autre supposition de  $dy=0$  ou  $=\infty$ , rencontre une Courbe en deux ou plusieurs points; comment déterminer celui d'entre ces pointes où la tangente est parallèle à l'axe? Car ce n'est qu'en ce cas qu'une appliquée est un *Maximum* ou un *Minimum*.

*Cinquième difficulté.* Lorsqu'une appliquée, qui répond à une valeur de  $x$  tirée de la supposition de  $dy=0$ , ou  $=\infty$ , rencontre une Courbe en un point où la tangente n'est parallèle à aucun des axes conjugués; cette appli-

„ quée n'est alors ni un *Maximum* ni un *Minimum*, puisque  
 „ d'un côté il y en a de moindres, & de l'autre de plus gran-  
 „ des. De quelle adresse doit-on user pour le remarquer?

Quoique ces difficultés ne soient point insurmontables à ceux qui entendent l'Algebre commune, & les principes des infiniment petits, & qu'il y ait bien de l'apparence qu'elles ont paru si legeres à M. le Marquis de l'Hôpital, qu'il ne s'est pas voulu donner la peine de les lever; peut-être néanmoins que le nombre de ceux qui n'en sont pas capables merite qu'on leur en donne l'éclaircissement.

Je le mettrai ici à peu près de la maniere que je l'ai envoyé à nôtre Geometre, après avoir fait quelques observations sur les differens rapports qui se rencontrent entre les differences ( $dx$  &  $dy$ ) des coordonnées des Courbes, sur les differens *Maxima & Minima*, & sur quelques autres circonstances qui ont rapport aux questions de *Maximis & Minimis*.

## OBSERVATION I.

I. En supposant ce qui est démontré dans l'Analyse des infiniment petits art. 47. qu'aux points des lignes courbes où les tangentes sont paralleles aux axes conjugués des mêmes Courbes, le rapport des differences de leurs coordonnées est toujours infini. On observera.

Fig. I.

1°. Que dans toutes les Courbes comme  $AMB$ , qui rencontrent un de leurs axes  $AB$  en deux points  $A$  &  $B$ , où les tangentes  $AF$ ,  $BG$  sont paralleles aux ordonnées  $PM$  ( $AP, x$ ;  $PM, y$ ), le rapport de  $dx$  à  $dy$  croît depuis l'Infiniment petit en  $A$ , où  $x=0=y$ , jusqu'à devenir Infiniment grand en  $D$ , où la tangente  $DF$  est parallele à  $AB$ , & où  $x$  ( $AE$ ) &  $y$  ( $ED$ ) sont toutes deux réelles; & diminué ensuite depuis l'infiniment grand en  $D$ , jusqu'à devenir Infiniment petit en  $B$ , où  $x$  ( $AB$ ) est réelle & finie, &  $y=0$ .

Fig. II.

2°. Que dans les Courbes  $HMI$  qui ont deux asymptotes  $AH$ ,  $AI$ , & dont les coordonnées sont  $AP, x$ ;  $PM, y$ ; le rapport de  $dx$  à  $dy$  croît depuis l'infiniment petit du

côté de  $H$ , où  $AP$  devient nulle ou  $= 0$ , &  $PM$  devient  $AH$  infinie, jusqu'à devenir Infiniment grand du côté de  $I$ , où  $AP$  devient  $AI$  infinie, &  $PM = 0$ .

3°. Que dans les Courbes  $AMI$  qui touchent un de leurs axes en  $A$ , qui ont une asymptote  $BI$ , parallèle à l'autre, & dont les coordonnées sont  $AP, x$ ;  $PM, y$ ; le rapport de  $dx$  à  $dy$  diminue depuis l'Infiniment grand en  $A$ , où  $x = 0$  &  $y = 0$ , jusqu'à l'Infiniment petit du côté de  $I$ , où  $AP(x)$  devient  $AB$  finie, &  $PM(y)$  devient  $BI$  infinie, étant asymptote à la Courbe, c'est à dire, une tangente infinie. Fig. III.

4°. Qu'entre les Courbes  $AMI$  qui s'étendent à l'infini vers  $I$ , en s'éloignant toujours de leur axe  $APB$ , il y en a où les tangentes infinies sont parallèles à leur axe  $APB$  (telles sont toutes les paraboles), & où par conséquent le rapport de  $dx$  à  $dy$  croît depuis l'Infiniment petit en  $A$ , où  $AP$  &  $PM$  deviennent nulles ou  $= 0$ , jusqu'à l'Infiniment grand du côté de  $I$ , où  $AP$  &  $PM$  deviennent toutes deux infinies. Fig. IV.  
V.  
Fig. IV.

Il y en a d'autres où les tangentes infinies  $CDI$  rencontrent leur axe  $AP$  en un point  $C$ , qui n'est éloigné de leur sommet  $A$  que d'une distance finie  $AC$  (telles sont les hyperboles) & où par conséquent le rapport  $dx$  à  $dy$  croît depuis l'Infiniment petit en  $A$ , où  $AP$  &  $PM$  deviennent nulles, jusqu'à devenir égal (ayant mené  $AD$  parallèle à  $PM$  qui rencontre la tangente infinie  $CDI$  en  $D$ ) au rapport de  $CA$  à  $AD$ , au point touchant, où  $AP$  &  $PM$  deviennent infinies. Fig. V.

## OBSERVATION II.

II. En nommant toujours les coordonnées des Courbes  $x$  &  $y$ , & partant leurs différences  $dx$  &  $dy$ , l'on observera que, quoique les rapports qui se rencontrent entre  $dx$  &  $dy$ , dans tous les differens points des Courbes puissent varier à l'infini, l'on n'en peut néanmoins distinguer que de trois genres differens dans toutes les suppositions

possibles; de finis, d'infinis, & d'indéterminés: car soit en general  $dx \cdot dy : : m \cdot n$ , ou  $\frac{dx}{dy} = \frac{m}{n}$

1°. Si l'on suppose que  $m$  &  $n$  soient des grandeurs finies, le rapport de  $dx$  à  $dy$  sera un rapport fini.

2°. Si l'on suppose  $m = 0$ , & que par la supposition  $n$  ne devienne point aussi  $= 0$ , ce qui arrive quelquefois, l'on aura  $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{n}$ , c'est à dire, que le rapport de  $dx$  à  $dy$  sera Infinitement petit.

3°. Si l'on suppose  $n = 0$ , & que par la supposition  $m$  ne devienne point aussi  $= 0$ , l'on aura  $\frac{dx}{dy} = \frac{m}{0}$ , c'est à dire que le rapport de  $dx$  à  $dy$  sera Infinitement grand.

4°. Si l'on suppose  $m = 0$ , & que par la supposition  $n$  devienne aussi  $= 0$ , ou au contraire, l'on aura  $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$ , c'est à dire, que le rapport de  $dx$  à  $dy$  sera indéterminé: car  $\frac{0}{0}$  peut être égal à une quantité quelconque  $p$ , puisque  $p$  multipliée par le denominateur zero produit le numérateur zero.

Personne n'ignore qu'il ne se rencontre entre les différences ( $dx$  &  $dy$ ) des coordonnées des Courbes, des rapports finis & infinis dans differens points des mêmes Courbes: mais on ne sçait peut être pas si generalement qu'il s'y rencontre quelquefois certains points où le rapport de  $dx$  à  $dy$  est indéterminé; c'est-pourquoi j'ai jugé à propos de le démontrer ici.

#### THEOREME.

III. *Le rapport des differentes ( $dx$  &  $dy$ ) des coordonnées des Courbes est indéterminé dans tous les points d'intersection (qui seront dans la suite appellés Nœuds) de deux rameaux, où les tangentes ne sont point paralleles aux coordonnées, ou, ce qui est la même chose, aux axes conjugués, soit que l'on suppose  $dx$  ou  $dy = 0$ .*

FIG. VI.

Soit la Courbe  $KADBL$  qui a un nœud en  $D$ , dont les axes conjugués sont  $AB$ ,  $AC$ , & les coordonnées  $AP$  ou  $AQ$ ,  $x$ ;  $PM$  ou  $QN$ ,  $y$

Il faut démontrer que, si les tangentes au point  $D$  ne sont point parallèles aux axes conjugués  $AB$ ,  $AC$ ; les différences  $dx$  &  $dy$  deviendront toutes deux égales à zéro au point  $D$ , par la supposition de l'une des deux  $= 0$ .

## DÉMONSTRATION.

Par un point quelconque  $M$  pris sur le rameau  $AD$ , soient menées les droites  $FMN$  parallèle à  $AB$ , qui rencontrera le rameau  $BD$  en  $N$ ;  $MP$ ,  $NQ$  &  $DE$  parallèles à  $AC$ . Si l'on suppose présentement que le point  $M$  s'approche de plus en plus à l'infini du point  $D$ ,  $MN = PQ$  deviendra enfin  $dx$ , &  $OD$ ,  $dy$ ; de sorte que, lorsque par la supposition de  $MN$ , ou  $OD = 0$ , le point  $M$  tombera en  $D$ , les points  $O$  &  $N$  tomberont aussi en  $D$ , & par conséquent  $MN$  &  $OD$  ( $dx$  &  $dy$ ) seront nulles ou  $= 0$ ; parceque le point d'intersection  $D$  est un point Mathématique; l'angle  $MDN$  étant d'une grandeur finie. Ce qui n'arriveroit pas de même si les rameaux  $AD$ ,  $BD$  se touchoient en  $D$ : car  $MN$  devenant nulle,  $OD$  demeureroit égale au petit côté de l'atouchement, & par conséquent infinie par rapport à  $MN$ . Il est donc constant que dans les nœuds le rapport de  $dx$  à  $dy$  est indéterminé ou  $= \frac{0}{0}$ , par la supposition de  $dx$  ou de  $dy = 0$ . Ce qu'il falloit démontrer.

## COROLLAIRE.

IV. Il est clair que  $ED$  n'est ni un *maximum* ni un *minimum*, puisque  $PS > ED$ , &  $PN < ED$ ; & que  $GD$  n'est aussi ni un *maximum* ni un *minimum*, puisque  $EN > GD$ , &  $FN < GD$ .

## PROBLÈME.

V. L'Equation qui exprime la nature d'une Courbe dont les coordonnées sont  $x$  &  $y$ , & l'une de ces trois choses  $\frac{dy}{dx}$ ,  $x$ , ou  $y$  étant exprimée en termes connus, par supposition ou autrement, exprimer les deux autres aussi en termes connus, ou montrer que la supposition est impossible.

## S O L U T I O N.

L'on a par l'hypothese l'équation qui exprime la nature de la Courbe ; que je nomme  $A$  ; en différentiant l'équation  $A$  , il en vient une autre , que je nomme  $B$  , dont un des membres est  $\frac{dx}{dy}$  , & l'autre une fraction qui renferme au moins une partie des constantes , & au moins une des variables (  $x$  ou  $y$  ) de l'équation  $A$ . Or puisque l'on suppose que l'une de ces trois choses  $\frac{dx}{dy}$  ,  $x$  , ou  $y$  , est exprimée en termes connus ; cette expression étant substituée dans l'une ou dans toutes les deux équations  $A$  &  $B$  , il n'y restera que deux choses inconnues : c'est pourquoi , par les regles de l'Algebre commune , on aura en termes connus l'expression de l'une & de l'autre. *Ce qu'il falloit premierement démontrer.*

Si l'une ou l'autre de ces expressions renferme quelque quantité imaginaire , ou quelque contradiction ; le problème sera impossible dans la supposition que l'on aura faite. *Ce qu'il falloit en second lieu démontrer.*

VI. Si l'on suppose  $dx = 0$  , l'équation  $A$  & le numérateur de l'équation  $B$  fourniront les valeurs cherchées de  $x$  & de  $y$ .

VII. Si l'on suppose  $dx = \infty$  , ou ce qui revient au même ,  $dy = 0$  , l'équation  $A$  & le dénominateur de  $B$  donneront les valeurs de  $x$  & de  $y$ . Ces deux articles sont expliqués dans l'Analyse des Infiniment petits sect. 3.

VIII. Si l'on suppose  $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$  , l'équation  $A$  & le numérateur , ou le dénominateur de  $B$  , indifferemment , donneront ( art. 6. & 7. ) les valeurs cherchées de  $x$  & de  $y$ . Les exemples que nous allons apporter , & ceux qu'on trouvera dans la suite éclairciront ce que nous venons de dire.

## E X E M P L E. I.

IX. Soit supposé  $\frac{dx}{dy} = \frac{b}{c}$  , & l'équation  $A$ .

$$A \quad 2ax - \frac{1}{2}xx = yy.$$

qui se rapporte à l'hyperbole équilatère  $AMI$ , dont le centre est  $C$ , le demi-axe traversant  $CA = a$ , les coordonnées  $AP = x$ ,  $PM = y$ ; il faut trouver en termes connus les valeurs de  $x$  & de  $y$ . Fig. V.

L'on a, en prenant les différences de l'équation  $A$ , l'équation  $B$ ,

$$B. \frac{dx}{dy} = \frac{y}{a+x} = (\text{hyp.}) \frac{b}{c},$$

d'où l'on tire l'équation  $C$ ,

$$C. y = \frac{ba + bx}{c},$$

& mettant cette valeur de  $y$  dans l'équation  $A$ , l'on en tirera (en supposant  $c > b$ ), l'équation  $D$ ,

$$D. x = -a + \frac{a^2}{\sqrt{cc - bb}} = AP.$$

& substituant encore la valeur de  $x$  prise en  $D$ , dans  $A$ , ou dans  $C$ , l'on aura l'équation  $E$ ,

$$E. y = \pm \frac{ba}{\sqrt{cc - bb}}.$$

Les deux équations  $D$  &  $E$  font connoître que le rapport de  $dx$  à  $dy$  est réel & fini si  $c > b$ ; que c'est un rapport d'égalité, si  $c = b$ , enfin qu'il est imaginaire ou impossible, si  $c < b$ , c'est à dire que dans l'hyperbole équilatère  $dx$  ne surpasse jamais  $dy$ .

Si l'on veut  $\frac{c}{b} = \frac{5}{4}$ , les équations  $D$  &  $E$  deviendront celles-ci  $F$  &  $G$

$$F. x = -a + \frac{5}{3}a$$

$$G. y = \pm \frac{4}{3}a.$$

### EXEMPLE II.

X. Soit supposé  $y = \frac{3}{10}a$ , & l'équation  $A$ ,

$$A. ax - xx = yy.$$

qui se rapporte au cercle  $AMB$ , dont le centre est  $E$ , le diamètre  $AB = a$ , les coordonnées  $AP = x$ ,  $PM = y$ ; il s'agit de trouver la valeur de  $x$ , & le rapport de  $dx$  à  $dy$  en termes connus. Fig. I.

L'on a en prenant les differences de l'équation  $A$ , celle-ci  $B$ ,

$$B. \frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a-2x},$$

& mettant pour  $y$  dans l'équation  $A$  sa valeur  $\frac{3}{10}a$ , l'on aura l'équation  $C$ ,

$$C. x = \frac{1}{2}a \pm \frac{2}{5}a = AP,$$

& substituant encore pour  $y$  dans l'équation  $B$  sa valeur  $\frac{3}{10}a$ , & celle de  $x$  prise en  $C$ , l'on en tirera  $\frac{dx}{dy} = \frac{3}{4}$ .

On trouvera dans la suite des Exemples pour le cas où le rapport de  $dx$  à  $dy$  est infini ou indéterminé, outre que les questions résolues dans la troisième Section de l'Analyse des Infiniment petits, sont autant d'exemples particuliers pour les cas où le rapport de  $dx$  à  $dy$  est infini.

*XI. Usage des trois differens genres de rapports qui se trouvent entre les differences des coordonnées des Courbes.*

Les rapports finis de  $dx$  à  $dy$  ne servent pas seulement à trouver en general les tangentes dans tous les points des lignes Courbes, comme il est enseigné dans la seconde Section de l'Analyse des Infiniment petits; mais encore en particulier les tangentes dans tel point déterminé qu'on voudra, soit que ce point soit déterminé par l'expression connue de l'une ou de toutes les deux coordonnées, ou par le rapport donné de  $dx$  à  $dy$ .

Soit proposé, par exemple, de trouver une tangente au cercle, au point où  $y = \frac{3}{10}a$ , l'équation au cercle  $ax - xx = yy$  se changera en celle-ci  $x = \frac{1}{10}a$ , en mettant pour  $y$  sa valeur  $\frac{3}{10}a$ . Or (Anal. des Infin. petits Sect. 2.) en nommant la sous-tangente  $f$ , l'on a  $f = \frac{2yy}{a-2x}$ ; mettant donc dans cette équation pour  $y$  sa valeur  $\frac{3}{10}a$ , & pour  $x$   $\frac{1}{10}a$ , il viendra  $f = \frac{2}{5}a$  pour la sous-tangente cherchée.

Si



Si au lieu de  $y = \frac{3}{10}x$  l'on avoit  $\frac{dx}{dy} = \frac{2}{4}$ , l'expression générale de la soultangente  $f = \frac{y dx}{dy}$  deviendrait  $f = \frac{2}{4}y$ , d'où l'on tire  $y = \frac{4f}{3}$ . L'on a aussi l'équation au cercle  $ax - xx = yy$ , & en prenant les différences, & mettant pour  $dx$  & pour  $dy$  leurs proportionnelles 3. & 4, il viendra  $y = \frac{3a-6x}{8}$ . L'on a donc trois équations  $y = \frac{4f}{3}$ ,  $ax - xx = yy$ , &  $y = \frac{3a-6x}{8}$ , d'où ayant fait évanouir les inconnues  $x$  &  $y$ , l'on en tirera  $f = \frac{9}{10}a$  pour la soultangente cherchée au point où  $dx : dy :: 3 : 4$ .

XII. Les rapports infiniment petits de  $dx$  à  $dy$ , c'est-à-dire, la supposition de  $dx = 0$ , ou de  $dy = \infty$ , servent à trouver tous les points des Courbes où les tangentes sont parallèles à l'axe des  $y$ , ou, ce qui revient au même, à trouver tous les *Maxima* & *Minima* de  $x$ .

XIII. Les rapports infiniment grands de  $dx$  à  $dy$ , c'est-à-dire, la supposition de  $dx = \infty$ , ou de  $dy = 0$ , servent à trouver tous les points des Courbes où les tangentes sont parallèles à l'axe des  $x$ , ou, ce qui revient au même, tous les *Maxima* & *Minima* de  $y$ . Ces deux derniers articles sont démontrés dans l'Analyse des Infiniment petits Section 3.

XIV. Les rapports indéterminés de  $dx$  à  $dy$ , c'est-à-dire,  $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$ , servent à trouver les nœuds des Courbes, ou les points d'intersection de deux rameaux, où les tangentes ne sont parallèles à aucun des axes conjugués; & en même tems à distinguer ces nœuds d'avec les points où les tangentes sont parallèles aux axes conjugués: car, comme (art. 8.) les uns & les autres se trouvent de la même manière, c'est-à-dire, ou par la supposition de  $dx = 0$ , ou par celle de  $dy = 0$ , on pourroit aisément les confondre & prendre, comme on a déjà fait, pour des *Maxima* ou *Minima*, les cordonnées qui déterminent un nœud, quoique (art. 4. elles ne soient ni *Maxima*, ni *Minima*,

& pour cette raison nous les appellerons dans la suite *faux Maxima* ou *faux Minima*, à cause qu'ils se trouvent de la même manière que les autres que nous appellerons *vrais Maxima & Minima*.

Il ne s'agit donc plus que de donner une règle pour ne se point méprendre dans la distinction des *faux Maxima* ou *Minima* d'avec les vrais. La voici, & personne, que je sçache, ne s'en est encore avisé.

*Règle pour distinguer les faux Maxima & Minima  
d'avec les vrais.*

XV. Lorsque dans l'une & dans l'autre supposition de  $dx=0$  (qui est la même chose que  $dy=\infty$ ), & de  $dx=\infty$  (qui est la même chose que  $dy=0$ ), l'on trouvera, pour chacune des deux coordonnées  $x$  &  $y$ , les mêmes valeurs en termes finis ou nuls; on sera assuré que la Courbe, dont la nature est exprimée par l'équation sur laquelle on opere, à un nœud au point où les coordonnées ont les valeurs trouvées. Ce qui est évident: car puisque  $dx$  &  $dy$  sont (art. 3. dans les nœuds toutes deux  $=0$ ; la supposition de  $dx=0$  & celle de  $dx=\infty$ , qui est la même que  $dy=0$ , doivent également donner des valeurs de  $x$  & de  $y$  pour les déterminer.

Lorsque l'une de ces suppositions donne des valeurs pour  $x$  & pour  $y$  finies (*Observ. I.*) nulles, ou infinies, différentes de celles que donne l'autre supposition; ces valeurs exprimeront alors de véritables *Maxima & Minima*,

On trouvera des Exemples qui éclairciront la Règle.

### OBSERVATION III.

XVI. On peut, ou plutôt on doit distinguer deux sortes de questions de *Maximis & Minimis*. La première où il s'agit de trouver tous les points des Courbes où les tangentes sont parallèles aux axes conjugués; & alors les valeurs correspondantes des coordonnées peuvent être (*Observ. I.*), finies, nulles, ou infinies.

La seconde où il s'agit de trouver le plus grand ou le

moindre état où se puissent trouver certaines grandeurs, qui dans de certaines circonstances croissent ou diminuent jusqu'à un certain point, après quoi elles commencent à diminuer si elles alloient en augmentant, ou à croître si elles alloient en diminuant. Comme lorsqu'on cherche le point où il faut couper une ligne droite afin que le rectangle des deux parties soit plus grand que si on la coupoit en tout autre point.

De même lorsqu'on cherche qu'elle doit être la situation du gouvernail d'un Vaisseau afin que l'eau fasse sur lui un plus grand effort que dans toute autre situation, & qu'en vertu de cet effort le Vaisseau puisse virer le plus promptement qu'il soit possible.

#### R E M A R Q U E.

XVII. Il semble que M. le Marquis de l'Hôpital n'a eu en vûe que les questions de *Maximis & Minimis* de la seconde sorte : car dans les exemples qu'il apporte, ou il ne propose que des questions de cette sorte, ou il ne cherche que la position des plus grandes & des moindres appliquées réelles & finies, qui déterminent la plus grande ou la moindre largeur des Courbes.

#### O B S E R V A T I O N IV.

XVIII. Toutes les questions de *Maximis & Minimis*, sont des problèmes déterminés, comme ceux de la Geometrie ordinaire, que l'on résout avec deux inconnues : car dans les premiers il s'agit de trouver sur les Courbes certains points fixes, où le raport de  $dx$  à  $dy$  est infini, c'est-à-dire, de trouver les valeurs des coordonnées qui déterminent ces points. Dans les seconds il s'agit de trouver les points d'intersection de deux lignes droites ou Courbes qui ont une axe commun, c'est-à-dire, les valeurs des coordonnées communes à ces deux lignes qui déterminent ces points.

Or quand, dans la recherche des *Maxima & des Minima*, l'on a supposé  $dx$  ou  $dy = 0$ , la question est réduite

à l'état où est un problème déterminé de la Geometrie commune, où l'on a employé deux inconnues, & qu'on a trouvé les deux équations qui en doivent donner la solution : car on a aussi deux équations, celle qui exprime la nature de la Courbe, & celle qu'on tire de la supposition de  $dx$  ou de  $dy=0$  : ces deux équations renferment deux inconnues ; il ne s'agit donc plus pour achever de résoudre la question, que de trouver, par les regles de l'Algebre commune, toutes les valeurs de ces deux inconnues de la même maniere que si c'étoit un problème déterminé de la Geometrie commune.

Toute la difference qu'il y a entre ces deux sortes de problèmes, c'est que dans ceux de la Geometrie ordinaire on n'admet que des valeurs finies & réelles des deux inconnues qu'on a employées pour les résoudre : au lieu que les questions de *Maximis & Minimis*, & particulièrement celle de la premiere sorte, sont (*Observ. 1.*) également résolues, soit que les valeurs des inconnues soient finies, nulles, ou infinies.

Les imaginaires, ou les contradictions font connoître l'impossibilité, ou absoluë, ou en partie, des uns & des autres.

*Eclaircissements sur les methodes de Maximis & Minimis.*

XIX. Il suit en general de tout ce que nous venons de dire, que l'on n'est point assuré d'avoir un véritable *Maximum* ou un véritable *Minimum* de la premiere sorte (on suppose que les Courbes ne sont point décrites.)

1<sup>o</sup>. Que l'on n'ait les valeurs des deux coordonnées ( $x$  &  $y$ ) qui le déterminent, en termes finis, nuls, ou infinis, soit dans la supposition de  $dy=0$ , ou dans celle de  $dx=0$ , qui est le même que  $dy=\infty$ .

2<sup>o</sup>. Que ces deux valeurs ne soient tirées que de la supposition de  $dy=0$ , ou que de celle de  $dy=\infty$  ; car si on les pouvoit tirer de l'une & de l'autre supposition, elles détermineroient (*art. 15.*) un nœud, ou un faux *Maximum* ou *Minimum*.

XX. Lorsqu'on trouvera plusieurs differentes valeurs

Voyez une  
addition à  
cet article à

de l'une des coordonnées ( $x$  ou  $y$ ) finies, nulles, ou infinies dans chacune des suppositions de  $dy = 0$  ou  $= \infty$ , & que les valeurs correspondantes de l'autre ne renfermeront ni imaginaires ni contradictions; il y aura autant de *Maxima* ou *Minima* vrais ou faux que l'on aura trouvé de valeurs différentes pour chacune des coordonnées. On distinguera les vrais d'avec les faux par la règle que nous avons donnée art. 15.

XXI. Il y a un certains cas qui sert à reconnoître certains *Maxima* infinis, que personne que je sçache n'a encore remarqué; c'est lorsque l'un des termes de la fraction  $= \frac{dx}{dy}$  ne renferme aucune inconnue, on peut être divisé par un viseur constant: car alors dans la supposition de  $dx$  ou  $dy = 0$ , ce terme de la fraction  $= \frac{dx}{dy}$  qui ne renferme aucune inconnue, ou ce diviseur constant devient  $= 0$ . Or une grandeur constante, & par conséquent finie, ne peut être égale à zero ou prise pour zero, que lorsqu'elle est comparée à des grandeurs infinies; il faut donc que lorsque, dans l'une ou l'autre de ces suppositions, l'on trouve une grandeur constante  $= 0$ , il y ait un *Maximum* infini, pourvu que la substitution ne donne ni imaginaires ni contradictions. On en trouvera des Exemples parmi ceux que nous allons apporter.

XXII. Il n'en est pas tout-à-fait de même des questions de *Maximis* & *Minimis* de la seconde sorte, que de celles de la première. Ce sont des problèmes déterminés qui ne peuvent avoir qu'une seule solution, une même grandeur ne pouvant être un *Maximum* ou un *Minimum* dans différens états, & dans les mêmes circonstances; il faut donc nécessairement que les expressions de ces sortes de grandeurs, qui ne doivent renfermer qu'une seule inconnue, que je nomme  $x$ , étant égalées à une autre inconnue, que je nomme  $y$ , deviennent des équations à des Courbes tellement situées à l'égard de l'axe des  $x$ , qu'il ne s'y puisse trouver qu'un seul point où le rapport de  $dx$  à  $dy$  étant infini, l'appliquée  $y$  qui le détermine soit réelle

& finie. De sorte que si l'on trouve dans la supposition de  $dy=0$  une valeur de  $x$  nulle ou finie, & que la valeur correspondante de  $y$  soit réelle & finie; cette valeur de  $x$  résoudra nécessairement le problême, & alors il sera inutile de passer à la supposition de  $dy=\infty$ . Mais si dans la supposition de  $dy=0$ , on ne trouve pour  $y$  aucune valeur réelle & finie qui réponde aux valeurs de  $x$ , ce qui arrive rarement, il faudra passer à la supposition de  $dy=\infty$ . Ce que M. le Marquis de l'Hôpital a toujours observé, & qui fait voir qu'il n'a considéré que les questions de *Maximis & Minimis* de la seconde sorte, comme on a déjà remarqué.

Voici les Exemples dont nous avons déjà parlé. Ils serviront à éclaircir tout ce que nous avons dit des questions de *Maximis & Minimis* de l'une & de l'autre sorte.

## E X E M P L E S.

Pour les questions de *Maximis & Minimis* de la première sorte.

## I.

XXIII. Soit l'équation  $A$ ,

Fig. V.  $A. yy = 2ax + xx,$

qui se rapporte à l'hyperbole équilatère  $AMT$ , dont le centre est  $C$ , le demi-axe traversant  $CA=a$ , l'abscisse  $AP=x$ , l'appliquée  $PM=y$ , & dont il faut trouver tous les *Maxima & Minima*, ou plutôt tous les points où les tangentes sont parallèles aux axes conjugués.

L'on a en prenant les différences l'équation  $B$ ,

$$B. \frac{dy}{dx} = \frac{x+a}{y}.$$

Et en supposant  $dy=0$ , l'on a  $x+a=0$ , d'où l'on tire  $x=-a$ , qui (*art. 19.*) ne fait encore rien connoître: mais en mettant cette valeur de  $x$  dans l'équation  $A$ , l'on en tire  $y=\sqrt{-aa}$ , qui est une valeur imaginaire. Et parce qu'il ne s'est trouvé aucun diviseur qui ait pu donner une autre valeur de  $x$ , il suit que dans l'hyperbole équilatère il n'y a aucun point où la tangente soit paral-

lele à l'axe des  $x$ . Ce qui est évident d'ailleurs (*art. 1. num. 4.*) La supposition de  $dy = \infty$ , ou de  $dx = 0$  donne  $y = 0$ , qui ne fait encore rien connoître: mais en mettant cette valeur de  $y$  dans l'équation  $A$ , l'en en tirera  $x = 0$  &  $x = -2a$ , pour les valeurs de  $x$  qui répondent à celle de  $y = 0$ . Et comme ces valeurs ont les qualités requises (*art. 19.*), il suit que les tangentes aux points  $A$ , ou  $x = 0 = y$ , &  $B$ , ou  $y = 0$  &  $x = -2a$ , sont parallèles aux ordonnées  $PM$ .

## II.

XXIV. Soit l'équation  $A$ .

$$A. y - a = a^{\frac{1}{2}} \times a - x^{\frac{1}{2}}.$$

qui exprime la nature de la Courbe  $MDM$ , dont les coordonnées sont  $AP$ ,  $x$  &  $PM$ ,  $y$ ;  $AE = ED$ ,  $a$ , il faut trouver tous les points de cette Courbe où les tangentes sont parallèles aux coordonnées  $AP$  &  $PM$ . Fig. VII.

L'on a en prenant les différences l'équation  $B$ ,

$$B. \frac{dy}{dx} = \frac{2\frac{1}{2}a}{3\sqrt{a-x}}.$$

La supposition de  $dy = 0$  donne  $2\sqrt{a} = 0$ , d'où l'on tire  $a = 0$ , qui montre (*art. 21.*) qu'il y a deux *Maxima* infinis de  $y$ , ou deux tangentes infinies parallèles à l'axe  $AP$  des  $x$ : car en mettant pour  $a$  dans l'équation  $A$  sa valeur zero, elle deviendra  $axx = y$ , qui contient les deux termes où  $x$  &  $y$  ont le plus de dimensions, les autres étant nuls par rapport à eux, à cause de la multiplication par  $a$ , que l'on regarde comme zero, qui y a un plus grand nombre de dimensions que dans le terme  $axx$ . Or l'on tire de cette dernière équation  $x = +\frac{\sqrt{y^2}}{a}$ , ou  $x = +\frac{\sqrt{y^2}}{a}$ .

dans la supposition présente de  $a = 0$ , qui montre que  $x$  &  $y$  sont infinies, qualités convenables (*Observ. I.*) aux *Maxima* de la première sorte, & qu'il y a deux *Maxima* de  $y$ .

La supposition de  $dy = \infty$  donne  $x = a = AE$ , qui ne fait encore rien connoître: mais en mettant pour  $x$  dans l'équation  $A$  sa valeur  $a$ , l'on en tire  $y = a = ED$ , qui montre (*art. 19.*) que  $ED$  est tangente au point  $D$ .

Cet exemple est celui de l'article 49 de l'Analyse des Infiniment petits, d'où l'on doit nécessairement conclure que M. le Marquis de l'Hôpital ne regardoit que les *Maxima* & *Minima* de la seconde sorte : car quoiqu'il sçût bien que la Courbe *MDM*, qui est une seconde parabole cubique, avoit une tangente infinie parallèle à l'axe *AP*; il a néanmoins dit que l'on ne pouvoit rien tirer de  $2dx \sqrt{a} = 0$ , d'où nous venons de tirer cette tangente infinie : parce qu'il comptoit ne rien tirer, quand il ne tiroit pas un *Maximum* ou un *Minimum* réel & fini, tel que sont ceux de la seconde sorte.

## III.

XXV. Soit l'équation *A*,

Fig. IV.

$A. x^3 - 4ax^2 + 4a^2xx - 6ayxx + 12a^2yx - 8a^3y + aayy = 0$ , qui exprime la nature de la Courbe *KADBL*, dont les coordonnées sont *AP* = *x*, *PM* = *y*, *AB* = *2a*; il s'agit de trouver tous les *Maxima* & *Minima* de cette Courbe.

L'on a en prenant les différences l'équation.

$$B. \frac{dy}{dx} = \frac{2x^2 - 6axx + 4a^2x - 6ayx + 6aay}{3axx - 6a^2x + 4a^3 - aay}$$

La supposition de  $dy = 0$  donne  $y = \frac{x^2 - 1axx + 2a^2x}{3ax - 3a^2}$ , d'où l'on tire, en divisant par  $x - a = 0$ , les deux équations *C* & *D*.

$$C. x = a = \frac{1}{2} AB.$$

$$D. y = \frac{xx - 2ax}{3a}$$

La valeur de *x* prise dans l'équation *C*, étant substituée dans l'équation *A*, donnera l'équation *E*,

$$E. y = a = \frac{1}{2} AB.$$

Et la valeur de *y* prise dans l'équation *D*, & substituée dans *A*, donnera  $x^3 - 4ax^2 + 7a^2x - 6a^3 = 0$ , qui étant divisée, 1°. par  $x - a = 0$ ; 2°. par  $x - 2a = 0$ , l'on aura les équations *F* & *G*.

$$F. x = 0, \text{ en } A.$$

$$G. x = 2a = AB.$$

Et le quotient sera  $xx - 2ax + 3a^2$ , qui ne donne que des imaginaires.

Mais



Mais la valeur de  $x$  prise en  $F$  étant mise dans l'équation  $A$ , donne les équations  $H \& I$ ,

$$H. y = 0 \text{ en } A.$$

$$I. y = 8a = 4AB.$$

Et la valeur de  $x$  prise en  $G$  & substituée dans  $A$ , donne  $K \& L$ .

$$K. y = 0 \text{ en } A.$$

$$L. y = 8a = 4AB.$$

En supposant presentement  $dy = \infty$ , ou  $dx = 0$ , l'on aura  $3axx - 6aax + 4a^3 - aay = 0$ , ou, en divisant par  $a = 0$ ,  $3xx - 6ax + 4aa - ay = 0$ , d'où l'on tire  $y = \frac{3xx - 6ax + 4aa}{a}$ , qui étant substituée dans  $A$ , l'on en tirera, outre les imaginaires, l'équation  $N$ ,

$$N. x = a = \frac{1}{2}AB.$$

Et par consequent l'équation  $O$ ,

$$O. y = a = \frac{1}{2}AB.$$

Le diviseur constans  $a = 0$  indique deux *Max.* infinis.

Voilà tout ce qu'on peut tirer de l'équation proposée. Il n'y a plus qu'à distinguer les faux *Maxima* & *Ninima* d'avec les vrais; & les uns & les autres d'avec ceux qui ne sont ni de l'une ni de l'autre espece.

Les équations  $C$  &  $E$  tirées de la supposition de  $dy = 0$ , & les équations  $N$  &  $O$  tirées de la supposition de  $dx = 0$ , font connoître (*art. 15.*) qu'il y a un nœud ou un faux *Maximum* ou *Minimum* dans la Courbe proposée au point  $D$ , qui est déterminé par  $x = a = y = \frac{1}{2}AB = ED$ .

XXVI. Si les substitutions des valeurs de  $x$  prises dans les équations  $F$  &  $G$  n'avoient donné chacune qu'une seule valeur de  $y$ , elles n'auroient déterminé que des *Maxima* ou des *Minima*: mais parceque chacune en a donné deux  $H \& I$ ,  $K \& L$ ; il suit qu'il y a deux appliquées qui rencontrent la Courbe en deux points, l'une en  $A$  où  $x = 0$ , & l'autre en  $B$  où  $x = 2a$ , & ces appliquées sont en chaque point  $= 0$  &  $= 8a$ ; c'est pourquoi pour s'assurer si c'est au point  $A$  ou  $B$  ou  $y = 0$ , ou aux points où  $y = 8a$  que le rapport de  $dy$  à  $dx$  est infini, ou s'il est par

tout infini ; il faut chercher ( art. 5. & 10. ) le rapport de  $dy$  à  $dx$  aux points où ces appliquées rencontrent la Courbe, & l'on trouvera qu'il est infini au point  $A$ , où  $x=0=y$ , & au point  $B$ , où  $x=2a$  &  $y=0$ , & qu'il est comme 12 à 1, tant au point où  $x=0$  &  $y=8a$ , qu'au point où  $x=2a$  &  $y=8a$  ; ce qui fait voir que l'axe  $AB$  touche la Courbe aux points  $A$  &  $B$ , & que  $y=8a$  n'est ni un *Maximum* ni un *Minimum*.

Si l'on substitue les valeurs de  $x$  & de  $y$  prises dans les équations  $C$  &  $E$ , qui déterminent le nœud  $D$ , dans l'équation  $B$  ; elle se changera en celle-ci,  $\frac{dx}{dy} = \frac{0}{0}$ , qui est un rapport indéterminé.

Si pour le déterminer on y applique l'article 163. de l'Analyse des Infinitement petits, on trouvera  $\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{2}}{1}$ .

XXVII. L'équation  $A$  étant proposée sous la forme  $P$ ,

$$P. x = a + \sqrt{2ay \pm \sqrt{aa + ay}},$$

exprimera le rameau  $KAD$ , s'il y a  $-\sqrt{aa + ay}$  ; elle exprimera le rameau  $DBL$ , s'il y a  $+\sqrt{aa + ay}$  ; de sorte que si l'on veut trouver en particulier les *Maxima* & *Minima* de chaque rameau, l'on aura en différentiant l'équation  $P$ , celle-ci  $Q$ ,

$$Q. \frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{2ay + 2yy}}{2\sqrt{aa + ay} + \sqrt{2ay}}.$$

Et la supposition de  $dy=0$  donnera  $y=0$  &  $y=-a$ , & mettant zero première valeur de  $y$  dans l'équation  $P$ , l'on en tirera  $x=0$  pour le rameau  $KAD$ , &  $x=2a$  pour le rameau  $DBL$ , qui sont les mêmes valeurs qu'on a trouvées par le moyen de l'équation générale. Mais si l'on substitue  $-a$  seconde valeur de  $y$  dans l'équation  $P$ , l'on ne trouvera que des imaginaires.

La supposition de  $dy=\infty$  donne  $a=0$ , qui indique deux *Maxima* infinis, &  $y=-2a$  qui rend la valeur correspondante de  $x$  imaginaire.

I V.

XXVIII. Soit l'équation  $A$ ,

$$A. y = \frac{a-x\sqrt{x}}{\sqrt{1a-x}},$$

qui exprime la nature de la Courbe  $KBCAMBL$ , dont FIG. VIII  
 les coordonnées sont  $AP = x$ ,  $PM = y$ , & l'axe  $AB = a$ .  
 Il est question de trouver tous les *Maxima* & *Minima* de cette Courbe.

L'on aura, en prenant les différences, cette équation,  
 $\frac{dy}{dx} = \frac{a^3 - 4aax + 4axx - x^3}{2a - xx \sqrt{2a - xx} - xx \sqrt{x}}$ , & en divisant le numérateur & le dénominateur par leur commun diviseur  $a - x$   $= 0$ , il viendra l'équation B,

$$B. \frac{dy}{dx} = \frac{aa - 3ax + xx}{2a - xx \sqrt{2ax - xx}}.$$

Mais le commun diviseur  $a - x = 0$  donne C,

$$C. x = a.$$

Et mettant cette valeur de  $x$  dans l'équation A, l'on en tire l'équation D,

$$D. y = 0.$$

Or il est clair, à cause du commun diviseur, que l'on auroit trouvé dans l'une & l'autre supposition de  $dy = 0$  & de  $dx = 0$  les valeurs de  $x$  & de  $y$  qui sont en C & D; c'est-pourquoy (*art. 15.*) il y a un nœud en B, où  $x = a$  &  $y = 0$ .

En substituant  $a$  &  $0$  valeurs de  $x$  & de  $y$  dans l'équation B, l'on trouvera  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x}$ , qui est un rapport d'égalité. Si l'on suppose  $dy = 0$  dans l'équation B, l'on en tirera E.

$$E. x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a\sqrt{5}.$$

Et substituant cette valeur de  $x$  dans l'équation A, l'on en tirera l'équation F,

$$F. y = \pm \frac{1}{2}a\sqrt{10\sqrt{5}-22}.$$

Et parceque la supposition de  $dy = 0$  ne donne aucune autre valeur de  $x$ , il suit qu'il n'y a dans toute la Courbe que les points D & C déterminés par  $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a\sqrt{5} = AE$ , & par  $y = \pm \frac{1}{2}a\sqrt{10\sqrt{5}-22} = ED = EC$ , où les tangentes soient paralleles à l'axe  $AB$  des  $x$ .

La supposition de  $dy = \infty$  donne les deux équations G & H,

$$G. x = 0.$$

$$H. x = 2a.$$

Et mettant ces deux valeurs de  $x$  dans l'équation  $A$ , l'on aura les deux valeurs correspondantes de  $y$  &  $K$ ,

$$I. y = 0.$$

$$K. y = \infty.$$

Les équations correspondantes  $G$  &  $I$  montrent que la tangente en  $A$  est parallèle aux ordonnées  $PM$ . Et les équations  $H$  &  $K$  font voir qu'ayant prolongé  $AB$  en  $G$  en sorte que  $BG = AB$ , la ligne  $IGH$  menée par  $G$  parallèle à  $PM$  sera asymptote aux rameaux  $BK$ ;  $BL$ .

L'équation  $E$  s'est présentée dans cet état  $x = \frac{1}{2}x \pm \frac{1}{2}aV5$ ; mais parce que  $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}aV5$  excède  $2a$ , & que l'on voit par l'équation  $A$  que lorsque  $x$  excède  $2a$ ,  $y$  est imaginaire, on l'a mise dans l'état où elle est en  $E$ , qui est le seul qui répond à l'équation  $F$ .

### EXEMPLES.

*Pour les questions de Maximis & Minimis de la seconde sorte.*

#### I.

### PROBLÈME.

Fig. IX.

XXIX. Une ligne  $AB$  étant coupée par le milieu en  $C$ , il la faut couper au un autre point  $D$ , en sorte que le rectangle  $AD \times DB$  soit plus grand que tous ses semblables.

### SOLUTION.

Ayant supposé le Problème résolu & nommé la donnée  $AC$ , ou  $CB$ ,  $a$ ; & l'inconnue  $CD$ ,  $x$   $AD$  sera  $a - x$ ; &  $DB$ ,  $a + x$ ; & les qualités du Problème donneront  $aa - xx$  qui doit être un *maximum*. En égalant cette expression à  $ay$ , l'on a  $aa - xx = ay$ ; donc en prenant les différences l'on a  $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{a}$ , & supposant  $dy = 0$ , l'on a  $x = 0$ , qui étant substitué dans l'équation primitive donne  $y = a$ ; & par tant (*art. 22.*)  $x = 0$  résout le Problème.

## II.

## PROBLÈME.

XXX. Trouver quelle doit être la situation du gouvernail d'un Vaisseau, afin que l'eau agisse sur ce gouvernail avec plus de force que dans toute autre situation, & que par conséquent le Vaisseau puisse virer le plus promptement qu'il soit possible.

## SOLUTION.

Soit  $AB$ , la quille du Vaisseau;  $BD$ , le gouvernail dans une situation quelconque;  $EC$ , un filet d'eau parallèle à  $AB$ . Il est clair que l'eau fera le même effort contre le gouvernail  $BD$ , soit que l'eau étant en repos, le Vaisseau se meuve de  $B$  vers  $A$  avec une certaine vitesse, ou que le Vaisseau étant en repos, l'eau se meuve de  $E$  vers  $C$  avec la même vitesse. Fig. X.

Supposons donc que le vaisseau étant en repos le filet d'eau  $EC$  frappe le gouvernail  $BD$  avec une vitesse constante & uniforme que je nomme  $a$ .

Soient menées par  $C$  les lignes  $CH$  perpendiculaires au gouvernail  $BD$ , qui rencontre en  $H$  la quille  $AB$  prolongée;  $CI$  perpendiculaire à  $AB$ .

En prenant  $BC$ , que je nomme aussi  $a$ , pour le sinus total;  $IC$  fera le sinus de l'angle d'incidence  $BCE$ , ou  $CBI$  du filet d'eau  $EC$  sur le gouvernail  $BD$ ; &  $BI$  le sinus de l'angle  $BCI = IHC$ . Nommant donc  $IC$ ,  $x$ ; &  $BI$ ,  $z$ ; il est clair que la somme des efforts de tous les filets d'eau comme  $EC$ , qui pousseroient  $CI$  qui leur est perpendiculaire sera  $ax$ ; & nommant encore  $fg$  la somme des forces dont le gouvernail est poussé selon  $CH$  en vertu de  $ax$ ; &  $ay$  la somme des forces dont la quille est poussée selon  $CI$  en vertu de  $fg$ , qui est ce que l'on cherche; l'on aura par les loix de la Mécanique  $ax.fg (:: BC. IC) :: a.x$ , &  $fg.ay (:: CH. CI :: CB. BI) :: a.z$ ; & en multipliant retenu par terme ces deux analogies, l'on aura  $fgax$ .

$fgay :: aa.x^7$ , d'où l'on tire  $\frac{xxz}{a} = ay$ , ou  $\frac{\sqrt{aax^4 - x^6}}{a} = ay$ , en mettant pour  $z$  sa valeur  $\sqrt{aa - xx}$ : Et parceque  $ay$  doit être un *Maximum*, il faut prendre les différences de cette équation, d'où l'on tirera  $\frac{dy}{dx} = \frac{2.aax^3 - 3x^5}{aa\sqrt{aax^4 - x^6}}$ . Et supposant  $dy = 0$ , l'on a  $2aax^3 - 3x^5 = 0$ , d'où l'on tire  $x = 0$ , &  $x = a\sqrt[3]{2}$ . Et mettant zero premiere valeur de  $x$  dans l'équation primitive, l'on en tire  $y = 0$ ; d'où il suit (*art. 22.*) que  $x = 0$  ne résout point le problème; mais si l'on substitué  $a\sqrt[3]{2}$  seconde valeur de  $x$  dans la même équation primitive, l'on en tirera  $y = a\sqrt[3]{2}$ , qui fait voir (*art. 22.*) que  $x = a\sqrt[3]{2}$  résout la question; & il est inutile de passer à la supposition de  $dy = \infty$ .

## A VERTISSEMENT.

Il me semble en avoir dit assez pour qu'il ne se rencontre plus de difficultés sur ce qui regarde les questions de *maximis & minimis*, soit que les équations soient affectées de signes radicaux, ou qu'elles en soient delivrées; & partant que les difficultés proposées par nôtre Geometre ne doivent plus passer pour telles après le détail que je viens de faire sur toute cette matiere. Voici néanmoins en peu de mots les réponses qu'on y peut faire. L'on remarquera qu'elles appartiennent aux question de *Maximis & Minimis* de la premiere sorte: car il n'y en a point à faire sur celles de la seconde sorte après ce que nous avons dit.

*Réponse à la premiere difficulté.* Si c'est un *maximum* que l'on cherche, on choisira la valeur de  $x$  qui répond à la plus grande valeur de  $y$ , soit qu'elle soit tirée de la supposition de  $dy = 0$ , ou de celle de  $dy = \infty$ . Au contraire, si l'on cherche un *Minimum*.

*Réponse à la seconde difficulté.* Elle est la même que la réponse à la difficulté précédente.

*Réponse à la troisieme difficulté.* Elle est quelquefois aisée à lever par la seule inspection des termes de l'équation. Autrement il faut assigner à  $x$  une valeur un peu plus gran-

de ou moindre que celle qui répond au *Maximum* ou *Minimum* dont il s'agit, & la valeur correspondante de  $y$  décidera la question.

*Réponse à la quatrième difficulté.* Elle résoluë, art. 26.

*Réponse à la cinquième difficulté.* C'est alors un nœud, ou un faux *Maximum* ou *Minimum*. On s'en assurera par l'article 15.

### REMARQUES.

XXXI. On pourroit encore trouver les *Maxima* & *Minima* des Courbes, ou en faisant les sou tangentés, ou les souperpendiculaires infinies ou nulles, pourvû qu'en ce dernier cas les coordonnées fussent à angles droits : mais parce que ces methodes allongent plutôt le calcul que de l'abreger, on ne s'y arrête point.

XXXII. Il y a une methode qui seroit, sans contredit, la plus simple de toutes, si elle étoit generale : mais elle ne s'étend facilement qu'aux équations ou les deux inconnuës  $x$  &  $y$ , ou au moins l'une des deux à deux dimensions. Si les deux inconnuës sont au second degré, l'on trouvera tous les *Maxima* & *Minima* de l'une & ne l'autre : mais s'il n'y en a qu'une, on ne trouvera que les *Maxima* & *Minima* de l'autre.

La methode est d'extraire les racines de l'équation qui exprime la nature de la Courbe, de la maniere qu'on extrait les racines des équations du second degré, & d'égaliser à zero la quantité qui se trouve affectée des signes  $\pm$ .

Soit, par exemple, l'équation  $xx = ax - yy$ . L'on a en extrayant les racines  $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - yy}$ , & faisant  $\sqrt{\frac{1}{4}aa - yy} = 0$ , l'on a  $x = \frac{1}{2}a$ , qui détermine un *Maximum* de  $y$  : car en substituant  $\frac{1}{2}a$  valeur de  $x$  dans l'équation primitive, ou en se servant de  $\sqrt{\frac{1}{4}aa - yy} = 0$ , l'on aura  $y = \frac{1}{2}a$ .

Si l'on met presentement l'équation primitive en cet état  $yy = ax - xx$ , l'on en tirera  $y = \pm \sqrt{ax - xx}$ , ou en supposant  $\sqrt{ax - xx} = 0$ ,  $y = 0$  ; & substituant cette valeur de  $y$  dans l'équation primitive, ou se servant de

$\sqrt{ax - xx} = 0$ , parce que  $x$  n'y excède pas deux dimensions, l'on en tirera  $x = 0$  &  $x = a$ , pour les valeurs de  $x$  qui répondent à  $y = 0$ , & ces valeurs sont les mêmes que celles que l'on trouveroit par les methodes ordinaires.

Soit encore l'équation  $yy = \frac{aaa - 2cax + x^3}{2a - x}$ ; l'on a en extrayant les racines  $y = \pm \frac{a - x\sqrt{x}}{\sqrt{2a - x}}$ , & par la supposition

de  $\frac{a - x\sqrt{x}}{\sqrt{2a - x}} = 0$ , l'on a  $y = 0$ . Et substituant 0 valeur de  $y$

dans l'équation primitive, ou se servant de  $\frac{a - x\sqrt{x}}{\sqrt{2a - x}} = 0$  l'on en tire  $x = 0$  &  $x = a$  qui répondent à  $y = 0$ , pour les *Maxima* & *Minima* de  $x$ . Il en est ainsi des autres.

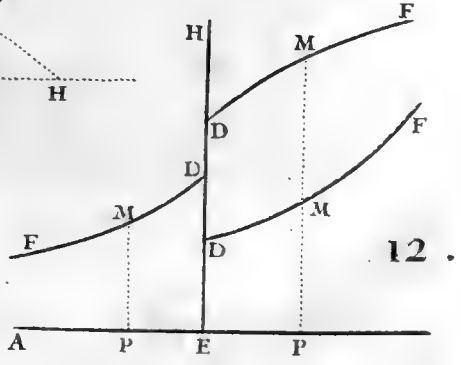
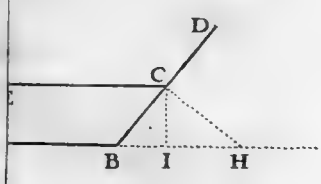
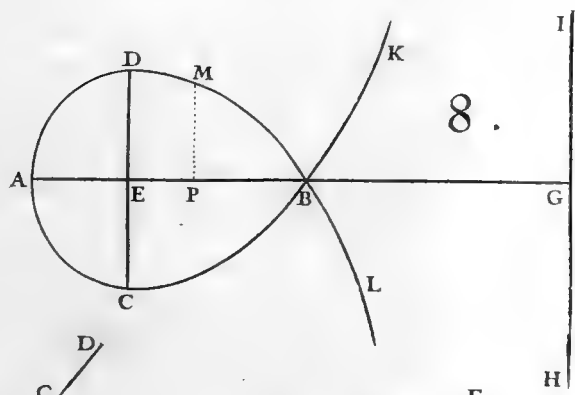
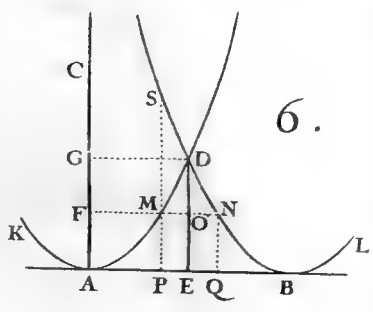
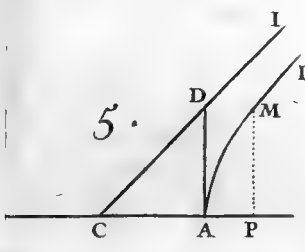
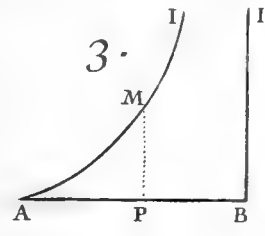
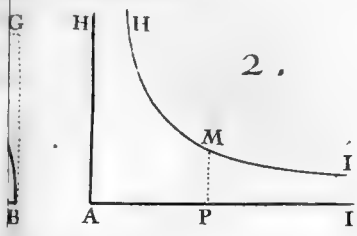
Il est vrai qu'il n'est pas facile par cette methode de distinguer les *Maxima* d'avec les *Minima*, ni les vrais d'avec les faux.

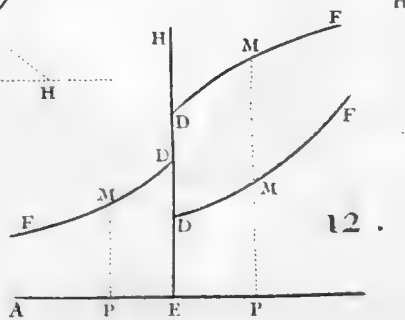
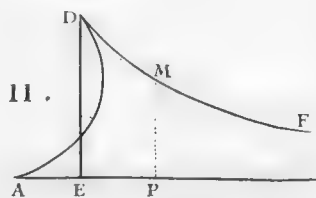
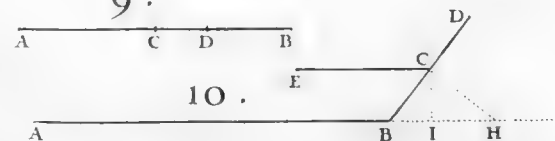
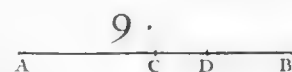
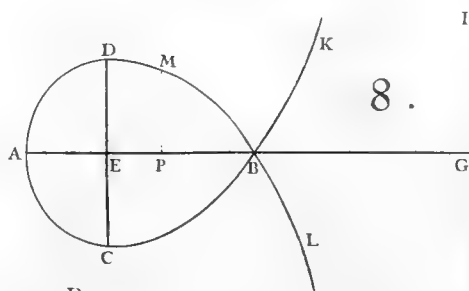
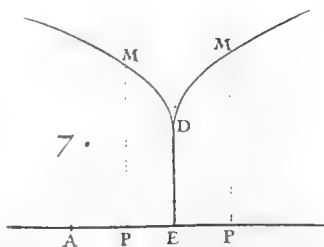
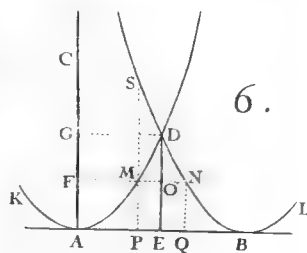
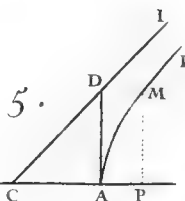
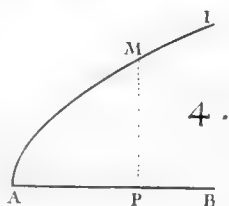
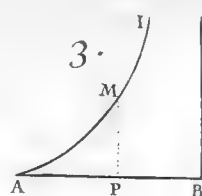
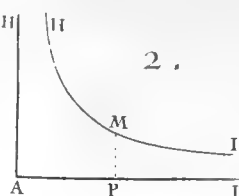
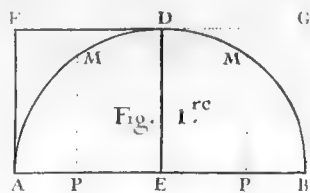
La verité de cette methode est facile à démontrer: car les racines d'une équation sont égales, lorsque leur difference est nulle; & le rapport de  $dx$  à  $dy$  est (*art. 3.*) infini ou indéterminé au point où il y a égalité de racines.

XXXIII. Il y a aussi des Geometres qui prennent pour *Maxima* & *Minima* les plus grandes & les moindres appliquées des Courbes, quoiqu'aux points où ces appliquées rencontrent ces Courbes, le rapport de  $dx$  à  $dy$  ne soit point infini; & que par consequent les tangentes en ces points ne soient point paralleles aux coordonnées. Telle est l'appliquée  $ED$ , qui rencontre la Courbe  $AMF$  au point de rebroussement  $E$ , & ainsi des autres de cette sorte. On trouvera donc ces sortes d'appliquées de la même maniere que l'on trouve les points de rebroussement.

Telle est aussi l'appliquée  $ED$ , qui rencontre la Courbe  $DF$  au point  $D$ , de la ligne  $DH$ , qui termine la Courbe, & qui fait avec elle un angle oblique en  $D$ . L'on déterminera ces sortes de *Maxima* & *Minima*, en cherchant sur l'axe  $AP$  le point  $E$ , qui sépare les ordonnées réelles  $PM$  d'avec les imaginaires qui sont au-delà de  $EH$  par rapport à  $P$ .







Il ne nous reste plus qu'à démontrer l'identité de la méthode de l'Analyse des Infiniment petits avec celles de *Messieurs Fermat & Hude* ; ce qui est facile. En voici la démonstration.

### DEMONSTRATION.

*De l'identité de la methode de l'Analyse des Infiniment petits avec celle de M. Hude.*

XXXIV. Il est clair, 1°. que le numerateur de la fraction  $\frac{dy}{dx}$ , que l'on trouve en prenant la difference d'une équation, contient tous les termes de cette équation où l'inconnuë  $x$  se trouve, & n'en contient aucun de ceux où  $x$  ne se trouve point.

2°. Que chacun des termes de ce numerateur  $y$  est multiplié, en vertu de la differentiation, par l'exposant de la puissance de  $x$ , où cette inconnuë est élevée dans chacun de ceux de l'équation primitive d'où il est tiré.

3°. Que les puissances de  $x$ , dans ce numerateur, sont plus basses de l'unité que dans l'équation primitive, à cause du changement de  $x$  en  $dx$ , & de la division par  $dx$ .

Or il n'est pas moins évident, 1°. que lorsqu'on applique la methode de *M. Hude* à une équation regardée par rapport à l'inconnuë  $x$  ; celle qui en résulte & qui doit être égale à zero, contient tous les termes de l'équation proposée où l'inconnuë  $x$  se trouve, & n'en contient aucun de ceux où  $x$  ne se rencontre point.

2°. Que chacun des termes de cette équation résultante est multiplié, en vertu de la methode, par l'exposant de  $x$ , où cette inconnuë est élevée dans chacun de ceux de l'équation proposée d'où il est tiré.

3°. Que les puissances de  $x$ , dans l'équation résultante, sont plus basses de l'unité que dans l'équation proposée, à cause de la division par  $x$  ordonnée par la methode.

Donc il n'y a nulle difference entre le numerateur de la fraction  $\frac{dy}{dx}$  trouvée en prenant les differences de l'é-

uation proposée, & l'équation  $= 0$  tirée par la methode de M. Hude de la même équation proposée, regardée par raport à l'inconnuë  $x$ , & particulièrement après qu'on a supposé  $dy = 0$ .

On fera tous les mêmes raisonnemens sur le denoininateur de la fraction  $= \frac{dy}{dx}$ , & sur l'équation  $= 0$ , l'un & l'autre tirés de la même équation, regardée par raport à l'inconnuë  $y$ , & l'on trouvera le dénominateur entierement semblable à cette équation.

## E X E M P L E S.

Soit l'équation  $A$ ,

$$A. \quad x^4 - 2ax^3 + aaxx - 2aayx + aayy = 0 \\ - 2ayxx$$

L'on aura en prenant les differences de l'équation  $B$ ,

$$B. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 - 6axx + 2aax - 4ayx - 2aay}{2axx + 2aax - 2aay}$$

En appliquant la methode de M. Hude aux puissances de  $x$  dans l'équation  $A$ , il en résulte l'équation  $C$ ; qui est le numerateur de  $B$ . Et en appliquant la même methode aux puissances de  $y$ , l'on en tire l'équation  $D$ , qui est le dénominateur de  $B$ .

$$x^4 - 2ax^3 + aaxx - 2aayx + aayy = 0 \\ - 2ayxx$$

$$4. \quad 3. \quad 2. \quad 1. \quad 0.$$

$$C. \quad 4x - 6axx + 2aax - 2aay = 0 \\ - 4ayx$$

$$aayy - 2aaxy + x^4 = 0 \\ - 2axxy - 2ax^3 \\ + aaxx$$

$$2. \quad 1. \quad 0.$$

$$D. \quad 2. aay - 2aax = 0 \\ - 2axx$$

L'identité de la methode de N. Fermat, avec celle de l'Analyse des Infiniment petits, est par elle même assez

manifeste pour qu'il ne soit point besoin de s'arrêter à la démontrer.

Il est donc évident que toutes ces methodes doivent necessairement produire le même effet pour les Courbes Geometriques, & seulement lorsque les équations sont délivrées des signes radicaux.

*Difference des mêmes methodes.*

Mais il faut demeurer d'accord que la methode de l'Analyse des infiniment petits a bien des avantages par dessus les autres. Elle n'est point arrêtée par les signes radicaux, où les autres n'ont point de prise: elle s'étend aux lignes Mechaniques avec la même facilité qu'aux Geometriques, & fournit des solutions generales où les autres methodes n'en donnent que de particulieres, &c.

*Faites à corriger dans les Memoires de 1704.*

Pag. 29. lig. 19. & 20. au lieu de  $y$ , lisez  $z$ .

Dans la Figure qui appartient à ce Memoire effacez la ligne  $HA$ , & lisez  $HC$ .

## R E M A R Q U E S

*Sur les Coquillages à deux coquilles, & premierement  
sur les Moules.*

PAR M. POUPART.

**L**Es Moules sont des especes de petits poissons renfermés entre deux coquilles, qui sont ordinairement convexes & concaves. 1706.  
20 Fevrier.

Il y a des Moules de Mer & des Moules de riviere. Celles-cy sont divisées en différentes especes; & il sera parlé dans la suite de quelques-unes, à mesure que l'occasion s'en presentera.

Les unes & les autres s'ouvrent , se ferment , marchent & il y en a qui voltigent sur l'eau. Elles sortent toutes à moitié de leurs coquilles , elles y rentrent , elle- répandent leur lait , elles respirent ou plutôt elles puisent l'eau avec leurs oüies , & se cachent dans la sable , ou dans la glaïse des rivières.

*De la maniere dont les coquilles.*

Il y a del'apparence que les Coquillages sont les premiers poissons que les hommes ont connu , & se sont avisez de manger ; car il s'est passé beaucoup de tems avant qu'on ait inventé la ligne , l'hameçon , les rertz , les nances , & tous les instrumens necessaires à la pêche des autres poissons. Mais pour ce qui est des coquilles , la mer les jette sur le bord , ainsi il n'a fallu dès le commencement du monde que se baïsser pour les prendre. Cependant l'on n'a point encore scû de quelle maniere elles s'ouvrent , quoique même un habile Anatomiste de Hollande l'ait cherchée avec beaucoup de soin , comme il paroît dans un Traité qu'il a donné l'Anatomie de la Moule. Cela fait voir que les choses les plus simples & les moins cachées sont quelquefois les plus difficiles à découvrir. Voici comme la chose arrive.

Toutes especes de Moules , & même tous les Coquillages à deux coquilles , ont un ligament coriaïse qui tient liées les deux coquilles ensemble à la partie postérieure & plus épaisse , qu'on appelle talon ; & c'est par le moyen du ressort que fait ce ligament que les deux coquilles s'ouvrent. Ce ligament est d'autant plus admirable , qu'il a deux effets qui paroissent d'abord fort opposez ; car c'est lui qui joint & affermit les deux coquilles ensemble , & qui les fait aussi ouvrir par son ressort. Cela se fait ainsi.

Lorsque les Moules ou autres Coquillages ferment leurs coquilles par la contraction de leurs muscles , le ligament qui est entre les bords de ce qu'on appelle talon est comprimé & reste en cet état pendant que les muscles sont racourcis : mais quoique ce ligament soit assez dur , il a

pourtant quelque chose de spongieux ; de sorte qu'il arrive qu'en se gonflant il pousse les deux coquilles , & les fait un peu ouvrir quand les muscles se relâchent.

Plusieurs coquilles de différentes especes ont des ligamens differens. Le ligament des Moules de riviere est une espece de charuiere qui est attachée par le derriere sur le bord des deux coquilles , & passe au dehors. S'il étoit renfermé entre les bords des coquilles , il couvrirait & rendroit inutile le ginglime des coquilles qui en ont un , & dont nous parlerons bien-tôt ; & celles qui n'ont point de ginglime ont les bords trop minces pour pourvoir contenir tout entier ce ligament.

Le ligament à ressort des Moules de mer est different de celui des Moules de riviere , en ce qu'il n'est pas attaché au derriere des coquilles , mais en partie entre les bords , & qu'il ne paroît nullement au dehors , mais il excède un peu au dedans de la cavité de la coquille , d'autant que les bords ne sont pas assez épais pour le renfermer tout entier. Pour suppléer un peu à ce défaut , il est entouré de deux cordons qui sont fortement attachez sur les bords interieurs de la coquille à laquelle ils donnent de l'épaisseur. Ces cordons sont durs , trouez , & ils paroissent ajoûtez à la coquille , & d'une matiere differente. Apparemment que les routes qui sont gravées dans ces cordons ne sont pas inutiles , mais je ne sçai point encore leur usage. Celui des cordons est de donner de l'épaisseur aux bords de la coquille , afin qu'ils puissent mieux comprimer le ligament à ressort qui est entre-deux ; ce que ne pourroient pas si bien faire les bords de la coquille , parce qu'ils sont trop minces , & la compression étant foible il ne se feroit point de ressort , ou bien il s'en feroit si peu qu'il ne seroit pas suffisant pour faire ouvrir la Moule.

Le ligament à ressort qui fait ouvrir les coquilles de l'huître , est fort different de celui des Moules de mer & de riviere ; il n'entre pas dans la cavité de la coquille comme fait celui des Moules de mer , & il ne s'étend pas en dehors comme celui des Moules de riviere ; mais il est ren-

fermé dans le talon entre les deux coquilles , où il y a assez d'espace pour le contenir.

Sa figure est propre à faire ressort ; c'est une espece de croissant dont le dos qui est la partie la plus épaisse est tourné du côté de la cavité de la coquille : la plus mince qui sont ses cornes regarde le dehors , & le milieu du croissant est rempli d'une matiere fongueuse. Les coquilles trouvant plus de résistance en pressant sur la partie la plus épaisse , le ressort en doit être plus grand du côté que les coquilles se doivent ouvrir.

Il est bon de remarquer que ce ligament ne va pas jusqu'à la pointe du talon ; il laisse un petit vuide en cet endroit , afin que les coquilles ayent la liberté de s'ouvrir.

La matiere du ligament à ressort des huîtres n'est pas tout à fait la même que celle des Moules de mer & de riviere , elle est plus coriassée & moins sèche. Le ligament de celles de mer & de riviere est roide , sec , & si fragile que si on le laisse quelque tems hors de l'eau , il se casse pour peu qu'on ouvre ou qu'on ferme la Moule ,

Il est nécessaire que ce ligament soit sec ; car étant toujours dans l'eau , il se seroit si fort amolli qu'il auroit entièrement perdu son ressort. Mais il ne s'amolir que comme un cuir fort , de sorte qu'il se courbe & se redresse sans se casser dans le tems de l'accourcissement & du relâchement des muscles , & même alors on peut ouvrir la Moule toute entiere sans que le ligament se casse.

Ce seroit une chose curieuse d'examiner les ligamens qui font ouvrir toutes les differentes especes de coquilles ; je ne doute point qu'on ne trouvât en plusieurs quelque choses de particulier. Je dis cela en faveur de ceux qui aiment à développer les moindres mysteres de la nature , à la curiosité desquels il est juste de laisser quelques choses à observer.

#### *De la maniere dont les Moules se ferment.*

Toutes les Moules se ferment par la contraction de deux gros muscles fibreux qui sont enterieurement atta-



chez à chaque bout des coquilles ; mais ces muscles sont trop connus pour en parler davantage. J'ajouterai seulement ici que les coquilles se ferment si exactement, qu'à peine l'eau en peut sortir. Voici comme cela se fait.

Toutes les especes de Moules ont leurs coquilles bordées tout-au-tour d'une membrane qu'on pourroit appeler épyderme, parceque c'est une continuité de la couche extérieure des coquilles. Ces membranes s'appliquent si exactement l'une contre l'autre quand elles sont mouillées, que la moindre goutte d'eau ne sçauroit sortir de la Moule.

Il auroit été difficile que les bords des coquilles qui sont durs, minces, tranchans, fragiles & d'une matiere sèche eussent été travaillés si uniment qu'ils eussent pû empêcher l'eau de sortir sans cette petite précaution.

Outre cette membrane il y a tout-au-tour du bord intérieur de chaque coquille un ligament. Ces ligamens ; qui portent l'un contre l'autre que les coquilles se ferment, empêchent encore que l'eau ne sorte, & même que les coquilles ne se cassent sur les bords pendant la grande contraction des muscles.

Les coquilles de quelques especes de moules ne sont pas seulement affermie ensemble par la contraction des muscles, ni par le ligament à ressort dont avons parlé ; elles le sont encore par de longues rainures ou canelures qui reçoivent des languettes tranchantes dans toute leur longueur. Il y a au bout de ces rainures, immédiatement sous le talon, une cheville dentelée qui entre dans une cavité aussi dentelée de l'autre coquille, & cette cavité a sur ses bords deux petites éminences dentelées qui entrent en deux petites cavitez de l'autre coquille qui sont aussi dentelées ; de sorte que les dentelures des épi-  
pheses & des cavitez se reçoivent mutuellement comme celles des os du crane.

Mais ce ginglime ne se trouve pas dans toutes les especes de Moules. Celles de mer, la grande espece qui naît dans les étangs, & qui croît jusqu'à un pied de long : celle

que j'appelle crêtée, à cause qu'elle a exterieurement une éminence vers le talon en forme de crête, n'ont point cette articulation.

*Du mouvement progressif des Moules.*

La structure des Moules est telle, qu'il semble qu'elles ne devroient avoir de mouvement que celui qu'elles reçoivent de l'agitation des eaux. Cependant elles marchent toutes, & quelques-unes voltigent sur la superficie de l'eau. Voici comme elles marchent. Etant couchées sur le plat de leurs coquilles, elles en sortent en partie en forme de langue, avec laquelle elles font de petits mouvemens à droit & à gauche pour creuser le sable ou la glaise des rivières. En creusant de la sorte elle baissent insensiblement d'un côté, & se trouvent sur le tranchant de leurs coquilles le dos ou talon en haut. Elles avancent ensuite peu à peu leur tête pendant une ou deux minutes, & ensuite elles l'appuient pour attirer leurs coquilles à elles, comme font quelquefois les limaçons aquatiques. Elles réitérent ce mouvement tant qu'elles veulent marcher, & de cette maniere elles font des traces irregulieres qui ont quelquefois jusqu'à trois ou quatre aunes de long, dans lesquelles elles sont à moitié cachées.

On voit pendant l'esté plusieurs de ces traces dans les rivières où il y a beaucoup de Moules, & l'on ne manque jamais de trouver une Moule au bout de chaque route. C'est ainsi que ces petits poissons cherchent leur vie, & qu'ils se promènent çà & là en labourant la terre avec le tranchant de leurs coquilles, marchant toujours le talon en devant.

Ces routes creuses servent d'appui aux Moules pour les soutenir sur le coupant de leurs coquilles, & en fouissant la terre çà & là, elles attrappent apparemment quelques frayes de poisson, ou autres petits alimens dont elles vivent.

Il semble qu'il auroit mieux été que la pointe de la coquille eût marché avant le talon, parce qu'étant mince

& tranchante elle étoit plus propre à fendre la terre , comme fait le soc de la charuë dont la pointe marche toujours devant.

Je n'ay pas remarqué qu'il y ait de muscles qui attirent les Moules hors de leurs coquilles : cela me fait croire qu'elles n'en sortent qu'en se gonflant d'eau. Elles s'en remplissent en si grande quantité , que j'en ay tiré une demie-verrée de la grande espee qui croît dans les étangs.

Ce que je trouve de bien considerable dans la marche des Moules , c'est que par son moïen elles peuvent se rencontrer & fraïer ensemble.

Je n'ay point trouvé d'œufs dans les Moules ; mais on trouve pendant l'esté beaucoup de lait & de glaire dans une même Moule : cela me fait conjecturer qu'elles pourroient bien être androgines.

La grosse glande de la Moule crêtée est toute remplie d'un lait fort blanc au mois de Septembre. Ce que je trouve d'admirable dans ce lait , c'est qu'il se caille aussi-tôt qu'on le jette dans l'eau. Cetté coagulation me fait conjecturer que les Moules ne jettent pas leur lait dans l'eau , car il deviendroit inutile pour la generation. Je croirois donc plutôt qu'une Moule insinué son lait dans une autre Moule dans le tems de la propagation. Il y a de l'apparence que la même chose arrive aux autres poissons , & vulgairement qu'ils le font.

Pour voir ce lait il faut couper par la moitié la grosse glande de la Moule crêtée , qui fait la meilleure & la plus solide partie de la Moule ; alors on en verra sortir une si grande quantité , qu'il semble qu'elle se fond toute entiere. Il faut cueillir ce lait avec la lame d'un couteau , & le jeter dans l'eau pour le voir à l'instant coaguler en petits grumeaux.

### *Du voltigement d'une espee de Moule.*

Aristote dit qu'on lui a rapporté qu'il y a une grande espee de coquille qui voltige. Je viens de remarquer que

Ce Philosophe n'a pas été trompé; car j'ay vû par hazard que la grande espee de Moule d'étang dont j'ay parlé voltigeoit sur la superficie de l'eau. Voici comme la chose peut arriver.

Ces grandes especes de Moules ont des coquilles qui sont fort legeres, très-minces, & si grandes qu'elles en peuvent battre la superficie de l'eau, comme les oiseaux font l'air avec leurs aîles. Il y a au dos de ces coquilles un grand ligament à ressort en maniere de charniere, & au dedans deux gros muscles qui les ferment. C'en est assez pour voltiger, car il suffit pour cela que ces ressorts agissent promptement l'un après l'autre, & qu'elles frappent l'eau avec assez de force & de vitesse. Ce qui favorise encore ce mouvement; c'est que le ginglime qui se trouve dans les autres coquilles qui ne voltigent point, ne se rencontre pas dans celles-ci, il seroit embarrassant.

*De la maniere dont les Moules s'enterrent dans le sable.*

Lorsque les Moules sentent le froid, elles s'enterrent dans le sable. Pour cela elles sortent en partie de leurs coquilles en forment de langue, qu'elles traînent lentement à droit & à gauche pour remuer le sable, dont elles se trouvent toutes couvertes en moïn d'une demie-heure de tems.

*De la maniere dont les Moules rentrent dans leurs coquilles.*

Les Moules peuvent rentrer dans leurs coquilles, par le moïen d'une membrane musculieuse dont la grosse glande que nous avons dit sortir de la coquille en forme de langue est toute envelopée. Quand cette membrane se contracte, la glande qui de sa nature est molle & flasque, devient une petite masse dure & ridée après qu'on l'a maniée, comme il arrive aux limaçons après qu'on les a touchés.

*De l'éjaculation du lait.*

Il y a de l'apparence que c'est par la contraction de la

membrane musculeuse , dont nous venons de parler, que le lait sort de la grosse glande par de petits trous ou canaux qu'on y remarque lorsqu'elle est gonflée d'eau ; car si on la comprime , on en voit sortir l'eau qui darde fort loin par petits filets.

### *De la sortie des excremens.*

Pour ce qui est de la sortie des excremens, je croy qu'elle se fait par la contraction des muscles circulaires de l'intestin , qui sont en grand nombre & par paquets. Pour les voir il faut couper l'intestin tout du long , ôter ses excremens , & le bien déployer. On remarquera vers la base de la glande , à laquelle l'intestin est attaché , plusieurs gros troussaux de fibres qui vont tout-au-tour de l'intestin , toujours en diminuant de leur grosseur à mesure qu'ils s'éloignent de leur origine.

### *De la respiration des Moules.*

Les Moules respirent l'eau à peu près comme font les poissons : cela paroît par un petit mouvement circulaire qui se fait dans l'eau proche le talon de la coquille. Mais elles ne rejettent pas l'eau à chaque fois qu'elles la puissent comme font les poissons : elles s'en remplissent pendant une minute ou deux , & puis elles la rejettent tout-d'un coup par l'autre bout de la coquille. Elles recommencent à puiser l'eau pendant quelque tems , elles la rejettent comme auparavant ; & elles continuent toujours de la même manière. On voit par-là que les Moules respirent l'eau un peu d'une autre manière que les poissons ; car ceux-ci la rejettent à chaque fois qu'ils la puissent. C'est dans les Moules crêtées que j'ay remarqué cette respiration.

Elles étoient couchées à plat à moitié dans l'eau sur un beau sable. Si elles étoient toutes cachées dans l'eau , on ne pourroit observer ni la petite circulation de l'eau qui se fait proche le talon , ni l'expulsion de l'eau qui se fait tout d'un coup par l'autre bout de la coquille , parceque ces mouvemens ne se pourroient faire sur la superficie de l'eau.

Il y a de l'apparence que ces poissons s'étant tous remplis d'eau , ils contractent subitement leurs muscles pour rapprocher leurs coquilles l'une de l'autre afin de comprimer leur corps , & en chasser l'eau tout d'un coup. Il semble que les Moules ne respirent pas toujours ; car j'en avois mis dans de grands bassins pour les observer souvent & plus commodément que dans la riviere ; elles s'ouvroient de tems en tems , mais je n'appercevois point qu'elles respiraissent l'eau.

### *Des maladies des Moules.*

J'ay remarqué que les Moules de riviere sont sujettes à diverses maladies , comme sont la mousse , la gale , la gangrene , & même la sphacelle.

Lorsque les moules vieillissent , il s'amassent insensiblement sur leurs coquilles une espece de chagrin , qui est une mousse courte semblable à celle qui naît sur les pierres. Cette mousse pourroit bien être la premiere cause des maladies qui arrivent aux Moules ; parceque ses racines entrant peut-être dans la substance des coquilles ces petites ouvertures donnent issuë à l'eau qui les dissout peu à peu.

On voit quelquefois sur les coquilles certaines longues plantes filamenteuses & fines comme de la soye. Cette chevelure , que les Botanistes appellent Alga , peut causer les mêmes maladies que la mousse. Outre cela elles incommodent beaucoup les Moules , parcequ'elles les empêchent de marcher facilement ; & quand ces plantes s'attachent aux coquilles par un bout , & à quelques pierres par l'autre , les Moules ne peuvent plus marcher.

Il forme des tubercules sur la superficie intérieure de la coquille , qu'on pourroit appeller des gales. Elles naissent apparemment de la dissolution de la coquille , qui venant à se gonfler , souleve & détache la feuille intérieure , comme font les chairs qui naissent sous la lame extérieure de l'os altéré & la font exfolier. On trouve quelquefois de ces tubercules qui sont aussi gros que des pois , qu'on prendroit pour des perles.

Fig. 4.

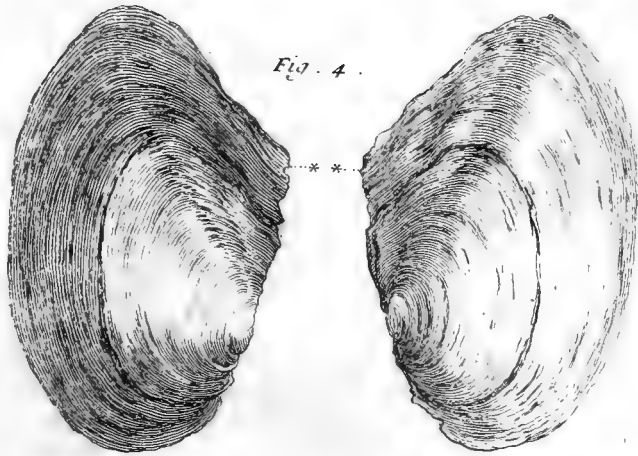


Fig. 5.

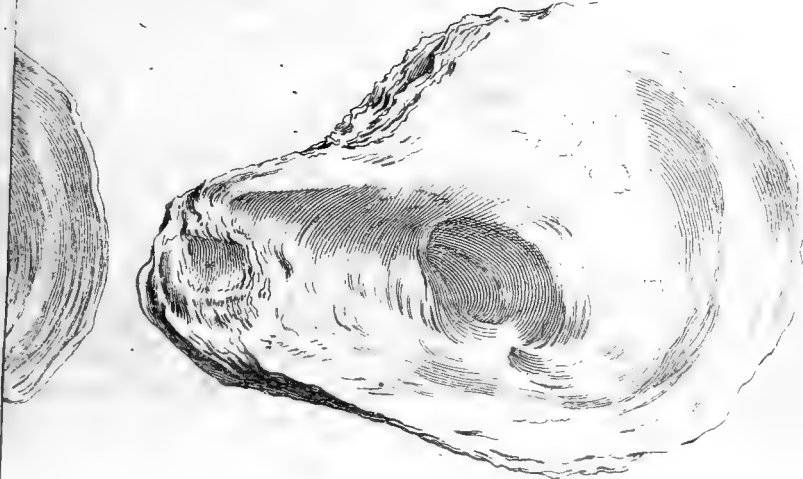


Figure 1



Fig. 2

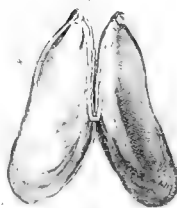


Fig. 4

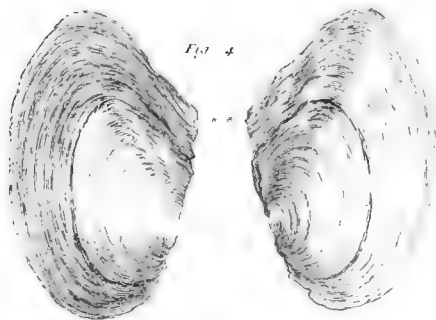


Fig. 5

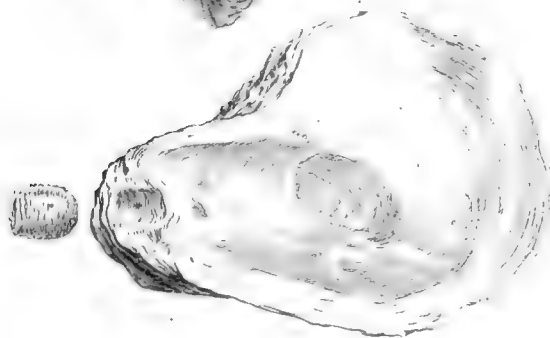


Fig. 6

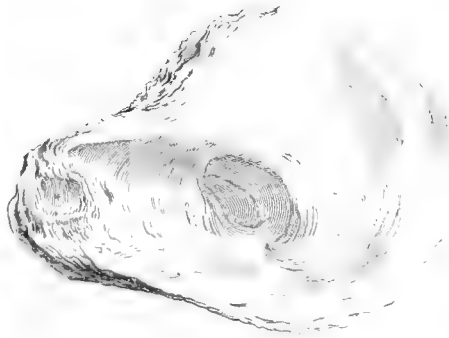




Figure 3.



*Figure 3.*



Les coquilles se dissolvent quelquefois peu à peu, & deviennent molles comme des membranes qu'on peut arracher par pieces. Cela pourroit faire croire que les coquilles sont des membranes endurcies, comme sont les os qui en certaines maladies deviennent aussi mous que du drap.

### EXPLICATION DES FIGURES.

1. **M**oule de riviere, dont le ligament a ressort \*, qui fait ouvrir la Moule, est attaché exterieurement au talon de la coquille.
2. Moule de mer, dont le ligament a ressort \*, qui fait ouvrir la coquille, ne paroît qu'interieurement vers son talon.
3. Huître, dont le ligament a ressort \*, qui la fait ouvrir, est caché entre les deux coquilles de l'Huître.
4. Moule, que j'ay appelée crêtée, parcequ'elle a une avance \* au talon en forme de crête.
5. Routes que font les Moules, & qu'elles laissent après elles quand elles font leur mouvement progressif dans la glaise ou dans le sable des rivières.

## LES HYPOTHESES.

### DU MOUVEMENT

### DE JUPITER.

PAR M. MARALDI.

**N**ous avons cherché les hypotheses du mouvement de Jupiter par la même methode que nous avons trouvé l'année dernière celles de Saturne. Nous avons calculé plusieurs observations faites dans l'opposition de Jupiter avec le Soleil, que nous avons comparées aux Tables de Kepler qui sont en usage depuis long-tems, & à celles

1706.  
20 Fevrier.

de M. Bouillaud qui en a expliqué le fondement. Cette comparaison nous a fait connoître que pour bien représenter ces observations, il falloit ajouter 5 minutes & demi à l'Epoque du moyen mouvement établie par M. Bouillaud. Après cette correction nous avons examiné la situation de l'Aphelie & du Perihelie de Jupiter par des observations les plus propres qu'il est possible pour cette recherche, comme sont celles qui se rencontrent proche de ces termes, Jupiter étant en opposition avec le Soleil. Par ces sortes d'observations faites en 1673, nous avons trouvé l'Aphelie de Jupiter en  $8^{\circ} 48'$  de Libra. Par d'autres observations faites l'an 1690 proche du Perihelie, on trouve la situation en  $9^{\circ} 42'$  d'Aries; & supposant l'Aphelie opposée au Perihelie, l'Aphelie sera en  $9^{\circ} 42'$  de Libra. Les observations de l'année 1696 donnent l'Aphelie en  $9^{\circ} 48'$  de Libra, un degré plus avancé de 24 ans auparavant; & enfin les observations de l'année 1702 montreroient seulement le Perihelie en  $9^{\circ} 27'$  d'Aries, & par conséquent l'Aphelie en  $9^{\circ} 27'$  de Libra.

Nous n'avons pas lieu de supposer réelle toute cette variation que nous trouvons dans la situation de l'Aphelie, parcequ'elle peut venir en partie de la grande difficulté de la déterminer au juste; car une erreur de deux minutes qu'il est souvent difficile d'éviter, tant dans le choix de l'Epoque, que dans les observations, à cause du grand nombre d'elemens qu'il faut employer, peut faire varier d'un demi-degré la situation de l'Aphelie.

Parmi ces différentes déterminations, nous avons choisi celle qui résulte des observations des années 1690 & 1696, comme plus uniformes & plus propres à représenter au juste la plupart des observations. Cette détermination donne le lieu de l'Aphelie pour le commencement de l'année 1701. en  $9^{\circ} 53'$  de Libra.

Pour déterminer la plus grande inégalité de Jupiter, nous avons comparé le calcul tiré des mêmes Tables avec les observations faites proche des moyennes distances, & nous avons connu que pour bien représenter ces différen-

tes observations il falloit faire la plus grande équation de Jupiter tantôt de  $5^{\circ} 34' 55''$ , tantôt de  $5^{\circ} 35' 25''$ , & quelquefois de  $5^{\circ} 35' 15''$ , à laquelle nous nous arrêtons, comme étant moyenne entre les extrêmes avec lesquelles elle s'accorde dans la minute ; ainsi suivant cette détermination il faudra augmenter de 3 minutes & demi la plus grande équation de Jupiter déterminée par Kepler, & d'une minute celle qui a été déterminée par M. Bouillaud.

La moyenne distance de Jupiter au Soleil, en parties de l'orbe annuel, a été calculée par un grand nombre d'observations faites lorsque Jupiter étoit en quadrature avec le Soleil, qui est la conjonction la plus favorable. Ces différentes observations faites en différentes parties de l'orbe de Jupiter, ne donnent pas toujours pour la moyenne distance de Jupiter au Soleil la même proportion précisément, y ayant souvent des différences considérables ; mais en prenant un milieu entre ces différences, nous avons déterminé la proportion de cette moyenne distance de 519220, dont la moyenne distance du Soleil à la Terre est 100000.

Pour trouver les nœuds de Jupiter, nous avons calculé plusieurs observations faites en différentes années proche de ses nœuds, & qui sont les plus propres pour cette recherche. Par ces observations faites l'an 1681 à la fin de Septembre lorsque la latitude de Jupiter étoit méridionale, & par les observations faites vers le commencement d'Octobre lorsque la latitude étoit Septentrionale, on trouve que Jupiter arriva à son nœud le deux d'Octobre de la même année. Ayant calculé pour ce temps-là, à l'aide des hypothèses fondées sur les observations précédentes, le lieu excentrique de Jupiter qui étoit aussi pour lors le lieu de son nœud vu du Soleil, nous le trouvons en  $6^{\circ} 55'$  de Cancer. Par d'autres observations de l'année 1693 faites durant plusieurs jours avant & après l'arrivée de Jupiter au nœud, on connoît qu'il s'y trouva le 14 d'Aouût au matin, lorsque Jupiter étoit en  $14^{\circ} 42'$  de Can-

cer. Ce lieu réduit au Soleil donne le nœud de Jupiter vu du Soleil en  $7^{\circ} 4'$  de Cancer ; de sorte qu'il y a une différence de 40 minutes dans cette détermination faite par les observations de différentes années. Si on prend un milieu, on pourra déterminer le lieu du nœud boreal de Jupiter pour l'année 1693 en  $7^{\circ} 20'$  de Cancer. Cette détermination s'accorde à celle qui résulte des observations faites proche de la conjonction de Jupiter avec le Soleil, de l'année 1705 Jupiter étant fort proche de son nœud. Par ces observations faites au méridien 9 jours avant & 12 jours après sa conjonction avec le Soleil, nous trouvons que Jupiter arriva au nœud le 18 Juin, d'où l'on trouve que son nœud boreal est en  $7^{\circ} 17'$  de Cancer.

Les occasions les plus favorables pour trouver l'inclinaison de Jupiter à l'Ecliptique, sont celles qui se sont présentées les années 1673, 1690 & 1702, lorsque Jupiter étant en opposition avec le Soleil, étoit en même temps près des limites des plus grandes latitudes. Par les observations que M. Cassini fit le 2 Avril 1673, nous avons calculé le lieu de Jupiter en 13 degrés de Libra, avec une latitude Septentrionale de  $1^{\circ} 37' 15''$ . Par la proportion des distances du Soleil à la Terre, & du Soleil à Jupiter, on trouve la parallaxe de latitude de  $17' 55''$ , qui étant ôtée de la latitude observée, donne la latitude réduite au Soleil de  $1^{\circ} 19' 20''$ . Mais dans la même observation Jupiter étoit à 6 degrés de distance de ses limites, à laquelle il convient 25 secondes, qui étant ajoutées à la latitude de Jupiter réduite au Soleil, donnent l'inclinaison de l'orbite de Jupiter à l'Ecliptique de  $1^{\circ} 19' 45''$ .

Par les observations de l'année 1690 faites dans l'opposition de Jupiter avec le Soleil, & à 3 degrés près des limites de Jupiter avec la latitude australe observée de  $1^{\circ} 39' 40''$ , on calcule la même inclinaison de Jupiter de  $1^{\circ} 19' 40''$ , comme par les observations de l'année 1673 ; ainsi cette inclinaison paroît assés bien déterminée.

Pour ce qui regarde le moyen mouvement de Jupiter & le mouvement de son Apogée, nous ne savons point de

de moyen plus propre pour le trouver, qu'en comparant les observations recentes avec les plus anciennes, & principalement celles des conjonctions de Jupiter avec les étoiles fixes qui sont censées les plus exactes. Parmi ces observations il y en a une celebre de la conjonction de Jupiter avec une étoile fixe de la constellation de l'Ecreville appelée *Afinus australis*, dont le temps marqué par Ptolémée se rapporte à l'année 241 avant l'Epoque de J. C. L'autre observation est celle que M. Bouillaud a tirée d'un manuscrit de la Bibliothèque du Roy, & qui fut faite l'année 508 de J. C. Or on peut représenter ces deux observations avec autant de précision qu'on peut attendre des observations faites à la vûe simple & sans instrumens, en se servant du moyen mouvement de Jupiter & du mouvement de l'Apogée comme ils ont été déterminés par M. Bouillaud, & en y employant les autres éléments de l'Apogée & de la plus grande équation tels que nous les venons de déterminer.

Il restoit à trouver le mouvement des nœuds de Jupiter. Nous les avons cherchés en comparant le lieu du nœud déterminé par les observations recentes avec celui qui résulte des observations anciennes dont nous avons examiné les circonstances. Nous avons employé à cette recherche la conjonction rapportée cy-dessus de Jupiter avec l'étoile de l'Ecreville : mais il faut remarquer qu'au lieu de 4 minutes de latitude meridionale que tous les Catalogues donnent à cette étoile, suivant nos observations elle en a une Septentrionale de 3 minutes & demi.

La conjonction de Jupiter avec cette étoile faite à la vûe simple peut avoir eu quelque peu de latitude, à cause que les rayons de Jupiter peuvent empêcher de voir si ces conjonctions sont précises ; mais nous ne sçaurions mieux faire que de la supposer telle qu'elle a été rapportée : ainsi nous supposerons que Jupiter ait eu la même latitude que l'étoile. Cette latitude vûe de la Terre étant réduite au Soleil par les hypotheses ordinaires sera de 4' 0", laquelle jointe à l'inclinaison de l'orbite de Jupiter,

donne la distance de Jupiter au nœud dans cette observation de  $2^{\circ} 52'$  : mais à cause que la latitude étoit Septentrionale, Jupiter avoit passé le nœud. C'est pourquoi si l'on ôte cette distance du lieu de Jupiter vû le Soleil calculé par les hypothèses, on trouve le nœud boreal de Jupiter en  $24^{\circ} 43'$  des Gemeaux pour l'année 241 avant J. C. Mais par les observations de l'année 1693, nous avons trouvé ce nœud en  $7^{\circ} 20'$  du Cancer ; donc en 1934 ans ce nœud aura eu un mouvement suivant la suite des signes de  $12$  degrés 37 minutes. Par les Tables de M. Bouillaud on trouve le mouvement des nœuds de Jupiter dû à cet intervalle de 13 degrés 14 minutes, seulement 37 minutes plus grand que celui que nous venons de trouver.

### *Les hypothèses du mouvement de Mars.*

Les observations de Mars faites à l'Observatoire Royal par M. Cassini confirment la plûpart des hypothèses de cette Planete que Kepler a établies sur les observations de Tycho, ce que nous avons reconnu ayant comparé un grand nombre de ces nouvelles observations avec les lieux de cette Planete calculez sur ces principes ; car elles s'accordent assez souvent ensemble, les plus grandes différences que nous y avons trouvées en quelques endroits n'ayant été que de 6 à 7 minutes.

Quoyque ces différences ne soient pas bien considérables par rapport aux grandes difficultez qu'il y a à parvenir à la dernière précision dans des recherches qui dépendent de plusieurs principes, nous n'avons pas laissé d'examiner de quelle maniere on pourroit les corriger. Nous avons commencé cette recherche en comparant les calculs avec les oppositions de Mars au Soleil près des moyennes longitudes de Mars ; parceque ces endroits sont plus propres pour déterminer la plus grande équation des Planetes. Parmi ces observations il y en a de celles qui se rencontrent dans l'orbe de Mars où l'équation est soustractive, & d'autres qui ont été faites dans des parties opposées.



où l'équation est additive. Dans cette comparaison nous avons trouvé entre les calculs & les observations une différence de deux minutes & demi, dont les calculs retardoient à l'égard des observations, & qui étoit à peu près la même dans des situations opposées de Mars. Cette différence uniforme nous a fait juger qu'elle venoit de l'Epoque, à laquelle il falloit ajouter ces deux minutes & demi, & qu'ainli la plus grande équation de Mars qui en résulte n'étoit pas différente de celle qui avoit été déterminée par Kepler; ce que nous avons ensuite vérifié par diverses autres comparaisons.

Après avoir fait cette correction, on trouvoit que les Tables ne representoient pas bien encore les observations faites près de l'Aphelie & du Perihelie, & qu'il y avoit entre les Tables & les observations une différence de quelques minutes; d'où il étoit aisé de juger que cette différence venoit de la situation qui n'étoit pas exactement déterminée dans les Tables Rudolphines pour le temps de ces observations: car on peut avancer ou reculer l'Aphelie pour ôter cette différence, sans que ce changement fasse varier sensiblement la plus grande équation.

On corrige donc cette différence en faisant l'Aphelie 20 minutes moins avancé qu'il n'est dans ces Tables.

En faisant ces corrections à l'Epoque & à l'Aphelie, nous representons à une minute près dix oppositions observées en différentes parties de l'orbe de Mars assez éloignées les unes des autres, ce qui confirme aussi la distribution de la premiere inégalité de la maniere qu'elle a été calculée par Kepler. Cela revient à peu près à l'hypothese elliptique simple, en y employant une équation qui commence de l'Aphelie & du Perihelie, & augmente de côté & d'autre jusqu'à la distance de 45 degrés, où elle est plus grande & monte à ces endroits environ à 8 minutes.

Il est fort difficile de déterminer si l'Epoque, & la situation de l'Aphelie, que nous venons de trouver un peu différentes de ce qui avoit été déterminé par Kepler, vient de quelque petite erreur des observations ou de la ma-

niere de les employer , ou enfin du moyen mouvement de Mars & de celui de son Aphelie , qui est peut-être un peu different de celui qui est supposé par Kepler , & ce n'est que par une suite d'observations de plusieurs siècles que l'on se peut éclaircir sur ce point.

Parmi les différentes observations que nous avons pour la détermination des nœuds de Mars , nous nous contenterons presentement de rapporter celle de l'année 1700. Le 2 de May à 32 minutes après minuit nous déterminâmes la latitude Septentrionale de Mars de  $0^{\circ} 11' 38''$  , & le 10 du même mois à  $11^h 53'$  la latitude meridionale de Mars se trouva de  $0^{\circ} 11' 3''$ . Donc la variation de la latitude en 8 jours fut de  $22' 41''$  , & parce que proche du nœud la latitude change à peu près à proportion du temps , comme il paroît aussi par d'autres observations faites entre le 2 & le 10 de May , nous trouvons que Mars arriva au nœud le 6 de May à 15' après midy. L'arrivée de Mars au nœud précéda d'un jour & presque 17 heures l'opposition de la même Planete avec le Soleil , qui arriva en  $8^{\circ} 6'$  du Scorpion ; ainsi nous avons calculé le nœud austral de Mars vû du Soleil en  $17^{\circ} 13'$  du même signe , & par conséquent le nœud boreal en  $17^{\circ} 13'$  du Taureau. Les Tables Rudolphines le donnent pour ce temps-là en  $17^{\circ} 50'$  du même signe à 37 minutes près de nos observations.

Nous avons cherché l'inclinaison de l'orbite de Mars à l'Ecliptique par les observations de l'année 1687, cette Planete étant en opposition avec le Soleil à un degré près des limites de sa plus grande latitude. Par les observations que nous fîmes le 7 Aoust , on trouva que Mars avoit une latitude Meridionale de  $6^{\circ} 50' 40''$ . Cette latitude vûe de la Terre étant réduite à la latitude vûe du Soleil par la proportion des distances du Soleil à la terre & de Mars au Soleil , donne l'inclinaison de l'orbite de Mars à l'Ecliptique de  $1^{\circ} 50' 45''$ . Dans les Tables Rudolphines cette inclinaison a été déterminée de  $1^{\circ} 50' 30''$  à 15 secondes près de celle que nous venons de déterminer , ce qui est une difference insensible.

## RECHERCHE DE LA PARALLAXE

*de Mars.*

Depuis l'année 1672 il n'y a point eu d'occasion plus favorable pour chercher la parallaxe de Mars, que celle qui s'est présentée le mois de Septembre & d'Octobre de l'année 1704. Cette Planete s'est trouvée alors en opposition avec le Soleil, près de son Perigée periodique, & dans une situation du Ciel où on la pouvoit observer à différentes heures de la même nuit au meridien & à une distance considerable du meridien, qui sont des circonstances qui rendent plus sensible la parallaxe de Mars, qui ne monte qu'à peu de secondes.

Nous avons profité d'une observation si rare, & nous nous sommes servis d'une excellente Lunete de 12 pieds, qui avoit au foier commun de l'objectif & de l'oculaire les fils qui se croisent à angles de 45 degrés, & qui sont tres-commodes pour déterminer la difference d'ascension droite & de declinaison entre deux étoiles peu éloignées en declinaison. Nous nous sommes servis d'une Lunete de cette longueur plutôt que d'une plus courte, pour avoir à son foier le mouvement apparent des étoiles plus sensible, ce qui sert à déterminer plus précisément le temps de leur arrivée aux fils, & nous avons placé cette Lunete sur une machine parallatique.

*Premiere Observation.*

Le 27 Septembre Mars s'étant trouvé près du parallele d'une étoile fixe de la cinquième grandeur qui n'est point marquée dans les Cartes celestes, & qui suivant nos observations est située en  $5^{\circ} 50'$  d'Aries avec une latitude meridionale de  $8^{\circ} 8'$ , nous observâmes le temps que Mars & cette étoile passerent par le meridien. Mars y arriva l'horloge marquant

12<sup>h</sup> 1' 32"

&amp; l'étoile y fut à

12 19 47

Donc la difference du passage entre Mars &amp;

l'étoile fut de

0. 18 15

*Seconde Observation.*

Le 28 Septembre ayant dressé la Lunete posée sur la machine parallatique, ensorte que le centre de Mars par son mouvement à l'Occident parcouroit précisément un des fils qui sont au foier de la Lunete, ce fil representoit le parallele de Mars, un autre fil qui est perpendiculaire au premier represente un cercle horaire, auquel Mars arriva l'horloge marquant

6<sup>h</sup> 58' 35"

Ayant laissé la Lunete immobile dans cette situation, l'étoile par son mouvement à l'Occident arriva au premier fil oblique à

7 17 36

Elle toucha le fil perpendiculaire auquel on avoit observé Mars à

7 17 46

& passa par le second fil oblique à

7 17 56

de sorte que la difference de declinaison entre Mars & l'étoile, qui est égale au passage de l'étoile entre un des fils oblique & le fil perpendiculaire, étoit de 10" de temps du parallele de l'étoile, dont Mars étoit plus Septentrional. La difference d'ascension droite qu'on trouve en comparant l'arrivée de Mars & de l'étoile au même fil perpendiculaire fut de

0 19 11

à l'instant que Mars arriva au fil.

*Troisième Observation.*

Le même jour 28. Septembre Mars arriva au meridien l'horloge marquant

11 56' 8"

l'étoile y arriva à

12 15 35

La difference d'ascension droite en temps entre

Mars & l'étoile fut de

0 19 27

*Comparaison de la premiere & de la troisième Observation.*

En comparant la difference d'ascension droite entre Mars & l'étoile observée au meridien le 27 Sep. de

0<sup>h</sup> 18' 15"

avec la différence observée le jour suivant au meridian de

$0^h 19' 27''$

on trouve le mouvement retrograde de Mars en  $23^h 55'$

de  $0.1.12$

Le Ciel qui fut couvert le 29 & le 30 au passage de Mars par le meridian, ne nous permit pas de continuer ces observations pour connoître au juste les variations qui sont arrivées d'un jour à l'autre au mouvement de Mars par rapport à l'étoile fixe : mais d'autres observations faites le 29 Septembre hors du meridian & au commencement d'Octobre, nous ont fait connoître que le mouvement de Mars étoit assez uniforme, & que la variation qui lui arrivoit d'un jour à l'autre dans cette situation n'étoit pas sensible ; c'est pourquoi nous pouvons supposer que le mouvement de Mars entre le 27 & le 28 Septembre étoit proportionnel au temps, & qu'en raison d'une minute & 12 secondes en  $23^h 55'$  le mouvement retrograde de Mars en ascension droite a été 3 secondes de temps par heure.

### *Comparaison de la seconde & de la troisième Observation.*

Le 28 Septembre à  $11^h 56'$  la différence d'ascension droite entre Mars & l'étoile fut de  $19' 27''$ . Entre le temps de la seconde observation & le temps de la troisième faites le 28 Septembre il y eut  $4^h 58'$ , auquel intervalle il est dû 15 secondes de temps pour le mouvement retrograde de Mars en ascension droite, qui étant ôtées de  $19' 27''$  différence d'ascension droite entre Mars & l'étoile observée au meridian, il reste  $19' 12''$  différence d'ascension droite entre Mars & l'étoile à  $6^h 58'$  du 28 Septembre ; mais par la seconde observation nous l'avons trouvée à la même heure de  $19' 11''$  ; donc la différence entre l'observation & le calcul est d'une seconde. Cette différence est causée par la parallaxe de Mars, parce que l'observation ayant été faite dans l'hémisphère Oriental du Ciel, & l'étoile étant Orientale à l'égard de Mars, la parallaxe qui le fait,

baïſſer & approcher del'étoile doit diminuer la différence d'afcenſion droite, comme on la trouve par l'obſervation.

*Continuation des mêmes Obſervations.*

Le premier Octobre à  $6^h\ 33'$  la différence d'afcenſion droite en temps entre Mars & l'étoile fut obſervée par le moyen de la Lunette poſée ſur la machine parallatique de

$0^h\ 22'\ 41''$

Et à  $11^h\ 40'$  du même jour, Mars étant au meridien, cette différence fut

$0\ 22\ 57$

La différence de temps entre la première obſervation faite à  $6\ 33'$ , & la ſeconde faite à  $11^h\ 40'$  eſt  $5^h\ 7'$ , pendant leſquelles nous trouvons que le mouvement de Mars retrograde a été de

$0\ 0\ 15$

ſui étant ôtées de

$0\ 22\ 57$

donne la différence d'afcenſion droite qui aura été à  $6^h\ 33'$  entre Mars & l'étoile, ſ'il n'y eut point eu de parallaxe de

$0\ 22\ 42$

l'obſervation donne cette différence de

$0\ 22\ 41$

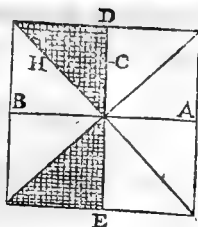
La différence qui eſt dûe à la parallaxe eſt d'une ſeconde, comme nous avons trouvé par la comparaïſon des obſervations précédentes.

De cette parallaxe obſervée nous avons conclu la parallaxe horizontale de Mars de  $24''$  d'un grand cercle, en faiſant les analogies & les calculs que M. Caſſini enſeigne dans le Traité de la Comete de l'année 1680.

Nous fîmes des ſemblables obſervations depuis le 26 d'Octobre juſqu'à la fin du même mois, lorſque Mars ſe trouva entre deux petites étoiles qui n'étoient viſibles qu'avec la Lunete. Comme ces étoiles diſparoïſſoient lorſqu'on éclairoit l'objectif pour voir les fils placés à ſon foyer qui ſervent à déterminer la différence d'afcenſion droite & de déclinaïſon entre Mars & ces deux étoiles, nous rendîmes ces fils ſenſibles ſans lumière par le moyen de deux triangles opaques compris entre deux fils, l'un perpendiculaire, l'autre oblique, comme on voit dans cette Figure.

Ayan

Ayant placé Mars qui parcouroit le fil *AB*, on comptoit le temps que Mars & l'étoile arrivoient à la section *DE*, ce qui donnoit la différence d'ascension droite ; & marquant le tems que l'étoile se cachoit en *C* & paroissoit en *H*, on avoit comme par les fils la différence de déclinaison. Nous nous sommes servis de ce Micrometre pour déterminer la situation des petites étoiles qui composent les nebuleuses ; & nous nous en servons aussi commodément dans plusieurs autres observations, lorsque l'air étant agité par le vent ne permet pas d'éclairer l'objectif pour voir les fils qui sont à son foyer.



Par les observations que nous fîmes au meridiem depuis le 26 jusqu'à la fin d'Obobre, on trouve le mouvement apparent de Mars fort inégal, parce que cette Planete étoit près de sa station en ascension droite, laquelle par nos observations arriva le 29 Octobre. Ce mouvement inégal d'un jour à l'autre est cause qu'on ne le peut pas bien distribuer par les différentes heures du jour pour avoir la différence d'ascension droite à l'égard de l'étoile, & la comparer à celle qui a été observée immédiatement loin du meridiem ; ce qui peut-être en partie cause de la différente parallaxe que nous trouvons en differens jours. Car par les observations du 26 Octobre faites avant & après le passage de Mars par le meridiem à une intervalle de 9 heures 4 minutes, nous n'y trouvons qu'une seconde de tems de parallaxe, ce qui donne 12 secondes de parallaxe horizontale ; & par les observations du 28 Octobre dans une intervalle semblable de 8 heures, nous trouvons environ une seconde & trois quarts de parallaxe, qui font 24 secondes d'un grand cercle de parallaxe horizontale ; de sorte qu'il y a une différence de 12 secondes entre l'une & l'autre. Si on prend un milieu entre ces deux extrêmes, on aura 18 secondes de parallaxe horizontale.

Dans cette dernière observation Mars étoit plus éloigné de la terre qu'il n'étoit dans l'opposition précédente,

& le rapport de ces distances étoit comme 51 à 40. Si on réduit par leur moïen la parallaxe de 18 secondes à celle que Mars auroit eu dans l'opposition, on aura la parallaxe horizontale de Mars dans l'opposition de 23 secondes, ce qui s'accorde à une seconde près à celle que nous observâmes deux fois différentes.

Suivant les hipothèses Astronomiques Mars dans la dernière opposition étoit un peu plus éloigné de son Périgée periodique, & par conséquent plus distant de la Terre qu'il n'étoit dans l'opposition de l'année 1672. Si on a égard à cette distance, on trouvera un accord que nous n'aurions osé espérer entre la parallaxe de Mars qui a été observée dernièrement, & celle qui fut déterminée l'an 1672 par M. Cassini, tant par les observations faites à Paris par cette methode, que par la comparaison des observations faites à Paris & à Cayenne; ainsi les autres connoissances que l'on a conclu de cette parallaxe, comme sont la parallaxe horizontale du Soleil, sa distance à la Terre, & la distance des autres Planetes seront les mêmes que celles qui furent déterminées par M. Cassini.

*Observations des Taches dans Mars pour verifier  
sa révolution autour de son axe.*

Dans les mêmes circonstances de la plus petite distance de Mars à la Terre, nous avons observé avec une Lunete de 34 pieds de Campani les Taches de Mars, qui nous ont servi à verifier la révolution autour de son axe, qui suivant la découverte de M. Cassini est d'environ  $24^h 40'$ .

Les Taches que l'on voit avec des grandes Lunetes sur le disque de cette Planete ne sont pas pour l'ordinaire trop bien terminées, & elles changent souvent de figure non-seulement d'une opposition de Mars avec le Soleil à l'autre, qui est le temps le plus propre pour ces observations, mais elles changent aussi d'un mois à l'autre. Nonobstant ces changemens il ne laisse pas d'y avoir des Ta-



ches d'une assez longue durée pour pouvoir être observées pendant un espace de temps suffisant à déterminer leurs révolutions.

Parmi les différentes Taches que nous avons vû dans Mars l'an 1704, nous en avons remarqué une en forme de bande vers le milieu de son disque à peu près comme une des bandes de Jupiter. (*Fig. 1.*) Elle n'environnoit pas tout le globe de Mars, mais elle étoit interrompue comme il arrive quelquefois aux bandes de Jupiter, & occupoit seulement un peu plus de l'émisphere de Mars; ce que l'on reconnut en observant cette Planete à différentes heures de la même nuit, & aux mêmes heures de différents jours. Cette bande n'étoit pas par tout uniforme; mais environ à 90 degrés de son extrémité précédente dans la révolution de Mars, elle faisoit un coude avec une pointe tournée vers son émisphère Septentrional. C'est cette pointe assez bien terminée contre l'ordinaire des Taches de cette Planete qui nous a servi à vérifier sa révolution.

Nous vîmes la bande dès les premières observations que nous fîmes avec la grande Lunete au mois d'Aoust, lorsque le disque de Mars qui s'approchoit de la terre commençoit à paroître assez grand; cependant nous n'aperçûmes la pointe dont nous venons de parler qu'au mois d'Octobre suivant. Elle arriva au milieu du disque de Mars le 14 d'Octobre à 18<sup>h</sup> 24'. Le 15 elle y arriva à 11<sup>h</sup> 9'.

Le 16 à 7 heures du soir proche des deux poles de la révolution de Mars, on voyoit deux Taches claires (*Fig. 3.*) qui ont été observées plusieurs fois depuis cinquante ans. Outre ces deux Taches claires, on en voyoit une obscure vers le bord Oriental, qui étoit l'extrémité de la bande qui commençoit à entrer dans l'émisphere de Mars exposé à la terre. Le même jour à 9<sup>h</sup> 5' l'extrémité de cette bande avoit déjà passé le milieu de Mars, & la bande se voyoit continuée jusqu'au bord Oriental, (*Fig. 2.*) où l'on voyoit une marque de la Tache adhérente à la bande, qui arriva ensuite au milieu de Mars à 11<sup>h</sup> 38'. On continua les jours suivans les

mêmes observations de la bande interrompue, qui n'étoit pas si avancée dans l'émisphère apparent aux memes heures que les jours précédens, & nous observâmes aussi que la Tache principale arriva le 17 Octobre au milieu de Mars à  $12^h 18'$ . Par la comparaison de ces observations les retours de la même Tache au milieu de Mars ne paroissent pas précisément égaux, & il y a quelque minute d'heure de difference, ce que nous attribuons à la difficulté de déterminer exactement le temps de son arrivée au milieu, dans lequel on hesite souvent un peu. Mais en comparant l'observation du 14 Octobre avec celle du 17, entre lesquelles il y a trois révolutions, on trouve le retour de la Tache au milieu de l'émisphère apparent de Mars de  $24^h 38'$ .

On connoîtra mieux cette periode par la comparaison des observations de la Tache plus éloignées entr'elles, comme sont celles que nous fîmes le 22 Novembre, auquel jour après avoir reconnu qu'à  $7^h$  l'extremité de la bande étoit avancée dans le disque de Mars, nous observâmes que la Tache arriva au milieu à  $11^h 5'$ .

Si on compare cette dernière observation avec celle qui fut faite le 14 Octobre à  $10^h 24'$ , on trouve entre ces deux observations 39 jours &  $41'$ , qui étant partagez par 38, nombre des révolutions dûes à cette intervalle, donne un jour & 39 minutes pour chacune, à une minute près de celle qui a été déterminée par M. Cassini. Ces periodes sont telles qu'elles résultent des observations immediates, & sont presque les plus courtes qu'on puisse trouver, à cause que le mouvement que Mars a fait durant cette intervalle n'a pas été considerable. Si de ces periodes apparentes on en vouloit conclure les periodes moïennes, ces dernières se trouveroient un peu plus longues que les apparentes; mais nous negligons ces équations, aussi-bien que la difference qu'il peut y avoir entre l'arrivée de la Tache au milieu de Mars, lorsque son disque paroïssoit rond comme dans l'observation du mois d'Octobre, & l'arrivée de la même Tache au milieu de Mars lorsqu'il

n'étoit plus rond, mais sensiblement ovale, comme dans la dernière observation du 22 Novembre, à cause de sa distance à l'opposite du Soleil.

Nous avons crû qu'il étoit inutile de tenir compte de ces équations, parceque nous n'esperons pas d'arriver à la précision qu'on peut attendre dans cette détermination, à cause des changemens qui sont arrivez aux Taches que nous avons observées. Car la pointe adhérente à la bande que nous observâmes pendant plusieurs jours vers le milieu d'Octobre, étoit fort diminuée le 22 Novembre; en sorte qu'on ne l'auroit pas jugée la même, si la distance à l'extrémité de la bande qui la précédoit & qui étoit la même que dans les observations précédentes, ne l'avoit pas fait reconnoître. Après le 22 de Novembre nous ne pûmes pas continuer les observations de la Tache pour voir le changement qui lui est arrivé dans la suite, à cause du temps couvert qui dura près d'un mois, après lequel temps Mars étoit trop éloigné de la terre pour pouvoir bien distinguer les Taches; mais les observations faites le mois de Septembre précédent nous donnent lieu de croire qu'il y a eu des changemens considérables: car en prenant pour Epoque des retours de la Tache l'observation du 14 Octobre, & supposant qu'avant cette Epoque ses retours au milieu de Mars soient à peu près égaux à ceux qui l'ont suivie, on trouve que la Tache auroit dû paroître au milieu du disque de Mars depuis le 4 jusqu'au 10 de Septembre à peu près aux mêmes heures que vers le milieu d'Octobre. Cependant parmi les observations que nous fîmes avec soin en ce temps-là à diverses heures de la nuit, on ne vit aucune marque de cette Tache, quoiqu'on distinguât fort bien la bande à laquelle on a remarqué depuis la pointe. Dans le commencement de Septembre, au lieu de cette pointe, nous observâmes au milieu de Mars une autre Tache séparée de la bande vers le Septentrion, & cette Tache avoit disparu lorsqu'on remarqua la pointe; ce qui nous donne lieu de croire que la Tache qui au commencement de Septembre étoit sepa-

rée de la bande, peut avoir eu un mouvement particulier du Septentrion vers la partie meridionale de Mars, par lequel elle s'est approchée à la bande, & y a formé la pointe que nous observâmes vers le milieu d'Octobre, & le 22 de Novembre qu'elle parut diminuée. Ces changemens ont quelque ressemblance à ceux qui ont été observés par M. Cassini dans les Taches de Jupiter, & à ceux mêmes qui s'observent quelquefois dans les Taches du Soleil.

## REFLEXIONS

*Sur les observations envoyées à Monsieur le Comte de Pontchartrain par le Pere Laval Professeur Royal d'Hydrographie.*

P A R M. C A S S I N I.

1706.  
13 Mars.

**L**A situation de l'Observatoire de Marseille en vûe de l'horizon de la mer, donne au Pere Laval la commodité d'observer les variations horizontales qu'on attribue communément aux réfractions des rayons visuels.

Celles qu'il a faites jusqu'à present étant corrigées par la regle que nous avons donnée à l'occasion des observations faites à la montagne de Nôtre-Dame de la Garde de Toulon, font voir l'une portant l'autre que l'horizon de la mer est éloigné de l'Observatoire de sept petites lieues, & que l'Observatoire est élevé sur la surface de la mer de 175 pieds.

C'est une chose qui meriteroit d'être examinée par le nivellement fait depuis l'Observatoire jusqu'à l'eau de la mer.

Nous avons remarqué que l'horizon apparent de la mer se voit souvent plus bas que l'horizon veritable qui ne se distingue point toujours. Car il y a déjà de l'horizon ve-

Fig. 2 .

Fig. 3 .

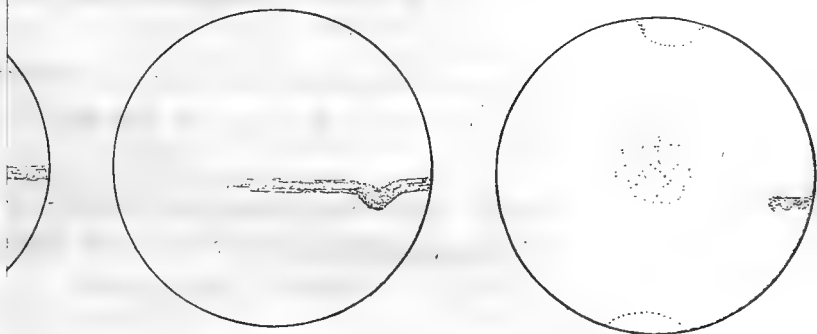


Fig 1<sup>re</sup>  
mide

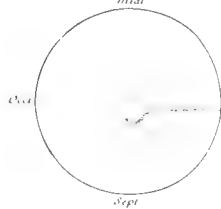
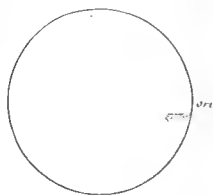


Fig 2



Fig 3



visible une lisière de la surface de la mer qu'on ne distingue point du Ciel. On en juge par le sommet de quelques îles que l'on découvre au-delà de l'horizon, qui semblent quelquefois être élevées dans le Ciel sur l'horizon apparent de la mer, sur laquelle elles font une reflexion qui forme une image de la montagne renversée contiguë à celle de la montagne vûë directement. Ces deux images en forment une totale, qui est divisée en deux parties égales, & semblables par la véritable ligne horizontale qu'on ne distingue que par cette apparence.

La variation de la bassesse apparente de l'horizon observée jusqu'à présent par le Pere Laval ne monte qu'à une minute & demie, la plus petite ayant été de 13 minutes & demie, & la plus grande de 15 minutes; ce qu'il y a de particulier est que la plus grande bassesse a été observée quand la mer étoit plus grosse. La grosse mer devoit plutôt contribuer à faire paroître l'horizon de la mer plus haut; il est vrai qu'à une si grande distance l'élevation de la mer par la tempête ne seroit point sensible; ainsi la diversité de la hauteur apparente de l'horizon se devoit attribuer plutôt aux divers temperamens de l'air qui y causent les refractions.

Nous avons vû quelquefois le matin le Soleil commencer de paroître sur l'horizon un peu élevé sur la surface de la mer, de figure ovale, longue selon la ligne horizontale: elle s'élargissoit peu à peu en haut & en bas, & se divisoit en deux par la ligne horizontale jusqu'à ce que la partie supérieure se détachoit de l'inférieure, l'une & l'autre partie s'arrondissant, & formant enfin comme deux Soleils, dont l'un se détachoit de l'autre & s'en éloignoit sur la ligne commune perpendiculaire à l'horizon, jusqu'à ce que l'inférieure que nous supposons causée par la reflexion sur la mer cessoit de paroître. Le Pere Laval a observé une fois au coucher du Soleil sa figure en forme de bonnet détaché de tout l'horizon apparent: cette apparence peut avoir été causée à peu près de la même manière que nous venons d'expliquer celles que nous avons observées autrefois.

La plus grande déclinaison du Soleil que le P. Laval a trouvé en été par les observations des hauteurs meridien-  
 nes du Soleil, corrigées par nos Elemens des refractions  
 & des parallaxes, approche fort de celle que nous avons  
 déterminée par les observations faites il y a 50 ans, de 23  
 degrés & 29 minutes. Par les observations d'hiver le P.  
 Laval l'a trouvée plus petite d'une demi-minute, ce qui  
 peut être attribué à quelque petite difference de refra-  
 ction dans la hauteur meridienne du Soleil, qui pourroit  
 être un peu plus grande ou moins reguliere en hiver. Ce  
 sont des observations très-utiles qui ne devoient jamais  
 être négligées. Cette petite difference peut venir aussi en  
 partie des divisions des instrumens, qui ne sont pas si fines  
 que dans une multitude de degrés on ne puisse douter de  
 quelques secondes. Dans un instrument de quatre pieds  
 de rayon, cinq secondes n'occupent que la 48<sup>e</sup> partie d'u-  
 ne ligne qui n'est pas bien sensible. Dans les plus grands  
 instrumens on apperçoit dans le Soleil & dans les autres  
 astres un petit tremblement qu'on peut attribuer aux di-  
 vers degrés de la temperature de l'air par où ses rayons  
 passent, ce qui laisse quelques petits doutes dans les ob-  
 servations. Les observations proches de l'horizon sont su-  
 jettes à des variations par les diverses temperatures de l'air  
 comme il paroît par l'usage des Lunetes, qui dans les  
 grandes chaleurs font voir une apparence de bouillonne-  
 ment dans les objets éloignez.

Les objets vus ensemble par un rayon horizontal ne se  
 voyent pas toujours de même. On voit de la même fenê-  
 tre & du même point un moulin éloigné, caché en partie  
 derriere un bâtiment proche, quelquefois tout élevé sur  
 le même bâtiment, & quelquefois comme plongé au-des-  
 sous & caché entierement. Ainsi l'épreuve que l'on fait  
 des instrumens par la direction de leurs axes à un objet  
 éloigné, n'est pas toujours exempte de quelque petite  
 erreur : un rayon visuel qui passe par le même milieu n'é-  
 tant pas toujours droit ni toujours courbe de la même ma-  
 niere, sa courbure variant suivant les diverses temperatu-  
 res de l'air interposé.

Quant



Quant aux observations des Eclipses du premier Satellite de Jupiter que le Pere Laval a continué de faire le plus souvent que le temps lui a permis, il admire leur conformité aux calculs inferés dans le Livre de la Connoissance des Temps, qu'on a pris soin de faire en employant les corrections que j'ai données il y a huit ans, lesquelles consistent à ôter 4 minutes de temps à l'Epoque, à ôter aussi une seconde à 25 révolutions du premier Satellite, & augmenter la premiere inégalité de la 30<sup>e</sup> partie. Ces corrections réduisent très-souvent leurs calculs à la même minute que les observations le donnent, ce qui est une grande confirmation des Elemens sur lesquels les calculs sont fondés. Ces Elemens dépendent non-seulement du mouvement propre du Satellite, mais aussi du mouvement de Jupiter & de ses inégalités, du mouvement du Soleil, de la situation des nœuds du Satellite, & de ceux de Jupiter, de l'inclinaison mutuelle de leurs orbites, enfin des hypotheses qu'on employe à déterminer l'équation du temps.

Ils sont en assez grand nombre pour laisser lieu de douter si quelques erreurs imperceptibles auxquels chacun d'eux est exposé, comme sont tous les Elemens de l'Astronomie, ne feroit pas quelque erreur assez considerable pour demander de nouvelles corrections en peu de temps. On y est toujours attentif pour tâcher de perfectionner la Theorie de plus en plus; mais jusqu'à present on peut se contenter de l'état où elle est, n'y ayant pas d'autres Planetes si bien réglées, dont on puisse déterminer les Phenomenes long-temps avant, dans un temps si précis que les Eclipses de ce premier Satellite de Jupiter dans son ombre.

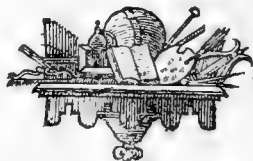
On n'est pas encore si content des hypotheses des autres Satellites, leur seconde inégalité est fort differente de celle du premier; de sorte qu'on ne les scauroit aucunement attribuer à la même cause, à laquelle il parut d'abord qu'on pourroit attribuer la seconde inégalité du premier Satellite, qui est que la lumiere du Soleil qui va

au Satellite & se reflechit à la terre , employe un temps considerablement plus long à faire ce chemin quand Jupiter & ses Satellites est beaucoup éloigné de la terre vers les conjonctions avec le Soleil , que quand il en est plus proche comme dans les oppositions.

Ayant comparé les observations des Eclipses du premier Satellite de Jupiter faites à Marseille avec celles que nous avons faites en même temps à Paris , la difference des meridien qui en résulte est  $12' 10''$  ; ayant choisi le milieu entre les differences qui se sont trouvées , qui est à quelque seconde près la même qu'on avoit trouvé les années précédentes.

Le P. Laval a fait un grand nombre d'observations de Venus à son passage par le meridiem , d'où il a calculé son ascension droite & sa declinaison qui se trouvent conformes à celles que nous avons déterminées par les observations faites en même temps à Paris. Il a fait aussi quelques observations de Mercure au meridiem , après que nous lui avons communiqué celles que nous y avons faites. Nous avons eu le temps favorable pour observer Venus au meridiem au jour de sa conjonction avec le Soleil.

Le P. Laval a aussi observé les Taches du Soleil qui ont paru pendant l'année 1705 , & il en a déterminé la situation dans le disque du Soleil suivant la methode que nous prariquons de concert.



## SUITE DE L'ETABLISSEMENT

## DE QUELQUES NOUVEAUX

## GENRES DE PLANTES.

PAR M. TOURNEFORT.

## G A L E.

**L**E Piment royal est un genre de Plante dont les piés qui fleurissent ne grainent pas, & dont les piés qui grainent ne fleurissent point. Ceux qui fleurissent portent des chatons *A* composez de petites feuilles disposées sur un pivot, creusées ordinairement en bassin & coupées à quatre pointes. Parmi ces feuilles naissent les étamines *B* chargées chacune d'un sommet *C*. Les fruits naissent sur des piés differens de ceux-ci, & ces fruits sont des grapes *D* chargées de semences *E*.

1706.  
17. Mars.

Les especes de Piment royal sont :

*Gale frutax odoratus* Septentrionalium *J. B.* 1. part. 2. 225.

*Rhus Myrtifolia*, *Belgica C. B. pin.* 414.

*Gale Lulitana*, foliis amplioribus incanis.

## O R O B A N C H O I D E S.

*L'Orobanchoides* est un genre de Plante à fleur *AB* en rose, composée ordinairement de huit feuilles, dont quatre *C* sont pliées en goutiere & creusées en sabot à leur base : les autres quatre sont toutes simples *D*. Du milieu de ces feuilles s'éleve un pistile *E*, qui dans la suite devient un fruit *F* oblong, divisé en quatre loges *G*, lequel s'ouvre de la pointe à la base en autant de parties. Ces loges sont remplies d'une semence très-mennue *H*.

Les especes de ce genre sont :

*Orobanchoides nostras*, flore oblongo flavescente. *Orobanche Verbasculi odore* *D. Plot. Raii Hist.* 1229. *Pluk. Phytog. Tab.* 209. fig. 5.

Orobanchoides Canadensis, flore oblongo, cernuo. *Orobanche Virginiana*, flore pentapetalo cernuo D. Banister Pluk. Phytog. Tab. 209, fig. 7.

## TERNATEA.

La Ternatée est un genre de Plante à fleurs *AB* légumineuses, dont l'étendart *C* cache presque les ailes *DE* & la feuille inférieure *F*, ainsi que le pistile *G*. Ce pistile devient une gousse *H*, qui s'ouvre dans la longueur en deux cosSES *IK*, lesquelles renferment les graines *L* assez rondes. Il faut ajouter au caractère de ce genre les feuilles rangées comme par paires sur une côte terminée par une seule feuille.

Les especes de ce genre sont :

Ternatea flore simplici cæruleo. *Flos clitoridis Ternatensis* Breyn. Cent. 1. 76.

Ternatea flore pleno, cæruleo. *Phaseolus Indicus*, *Glycyrrhiza foliis*, flore amplo cæruleo, pleno H. Amstel. Tom. 1. 47.

Ternatea flore simplici albido.

Ce genre porte le nom d'une des Isles Moluques appelée *Ternate*, d'où la graine de l'espece à fleur simple est venuë.

## LUFFA.

La *Luffa* est un genre de Plante dont les fleurs sont des bassins divisez en cinq parties jusques vers leur centre. Sur la même Plante on trouve quelques unes de ces fleurs *A* qui sont nouées, & quelques-autres *B* qui ne le sont pas. Celles qui sont nouées tiennent à un embryon *C*, qui devient un fruit *D* semblable à un Concombre, mais ce fruit n'est pas charnu. On ne voit sous la peau *EF* qu'un tissu de fibres qui forment un admirable raizeau *G*, & qui laissent trois loges dans la longueur du fruit *HIK*, lesquelles renferment plusieurs graines *L* presque ovales.

Je ne connois qu'une espece de ce genre :

*Luffa Arabum*. *Cucumis Egyptius reticulatus* seu *Luffa Arabum* Vesling. in P. Alp. 48.

## DIERVILLA.

La Dierville est un genre de Plante dont la fleur *AB* est une espece d'entonnoir à pavillon découpé en cinq parties, & terminé par un tuyau *C*, lequel est articulé avec le pistille *D*. Le calice *E* est oblong, chargé de cinq feuilles à son extrémité. Lorsque la fleur est passée, il devient un fruit *F* pyramidal, partagé en quatre loges *G* remplies de graines *H* assez menues.

Je ne connois qu'une espece de ce genre, que M. Dierville Chirurgien du Pont-l'Evêque, fort éclairé dans la connoissance des Plantes, a apportée d'Acadie.

*Diervilla Acadiensis*, fruticosa, flore luteo.

## CHELONE.

La Tortuë est un genre de Plante à fleur en masque *AB*, dont la levre supérieure *C* est voutée en dos de Tortuë. L'inférieure *D* est découpée en trois parties. Le derrière de la fleur est retreci en tuyau, dont l'ouverture *E* reçoit le pistille *F*, qui devient un fruit *G* arrondi, oblong, partagé en deux loges *H*, *I*, remplies de semences *K* bordées d'un petit feuillet.

Je ne connois qu'une espece de ce genre, qui a été apportée d'Acadie par M. Dierville.

*Chelone Acadiensis*, flore albo.

## VALANTIA.

La *Valantia* est un genre de Plante dont les fleurs *AB* sont des bassins partages ordinairement en quatre parties; quelquefois en trois. Le calice *C* devient un fruit *D E* membraneux, semblable en quelque maniere au pied d'un oiseau qui tient dans ses serres une graine *F* de la forme d'un petit rein.

Je ne connois qu'une espece de ce genre.

*Valantia quadrifolia*, verticillata. *Rubia quadrifolia*, verticillato semine J. B. 3. 719. *cruciata muralis*, minima, Romanica Col. part. 1. 297.

Cegenre porte le nom d'un des plus habiles Botanistes de ce liecle , M. Vaillant Secrétaire de M. le premier Medecin.

## LAVATERA.

La *Lavatera* a la fleur tout à fait semblable à celle de la Mauve, mais le pistile devient un fruit *A* d'une structure toute differente. C'est une espece de bouclier *B* membraneux, enfoncé sur le devant, garni en dessous *C* d'un rang de semences disposées en maniere de cordon, de la forme d'un petit rein *D* sans envelope, attachées par leur échancre à un petit filet.

Je ne connois qu'une espece de ce genre, à qui j'ai donné le nom de Messieurs Lavater Medecins de Zurich, très-habiles dans la connoissance de l'Histoire naturelle.

*Lavatera Althææ folio & facie, flore rubro.*

## METHONICA.

La Superbe est un genre de Plante dont la fleur *A* est en Iys composée de six feuilles rangées autour du même centre. Le pistile *B* devient un fruit *C* ovale, divisé dans sa longueur en trois loges *D*, qui renferment des semences *E* assez rondes. Il faut ajouter au caractère de ce genre la racine *F* charnuë taillée en équierre, & les feuilles *G* terminées par une main *H*.

Je ne connois qu'une espece de ce genre.

*Methonica Malabarorum* H. L. Bar. 688. *Lilium Zeylanicum*, *superbum* H. Amstel. Tom. 1. 69.

## CONYZOIDES.

La *Conyzoides* est un genre de Plante à fleurs à fleurons, semblables à celles de la Conyze : mais elle differe de ce genre par ses semences qui n'ont point d'aigrette.

Les especes de *Conyzoides* sont,

*Conyzoides* flore flavescente, cernuo. *Aster cernuus* Col. part. 1. 252.

*Conyzoides Orientalis*, *Verbasci folio.*

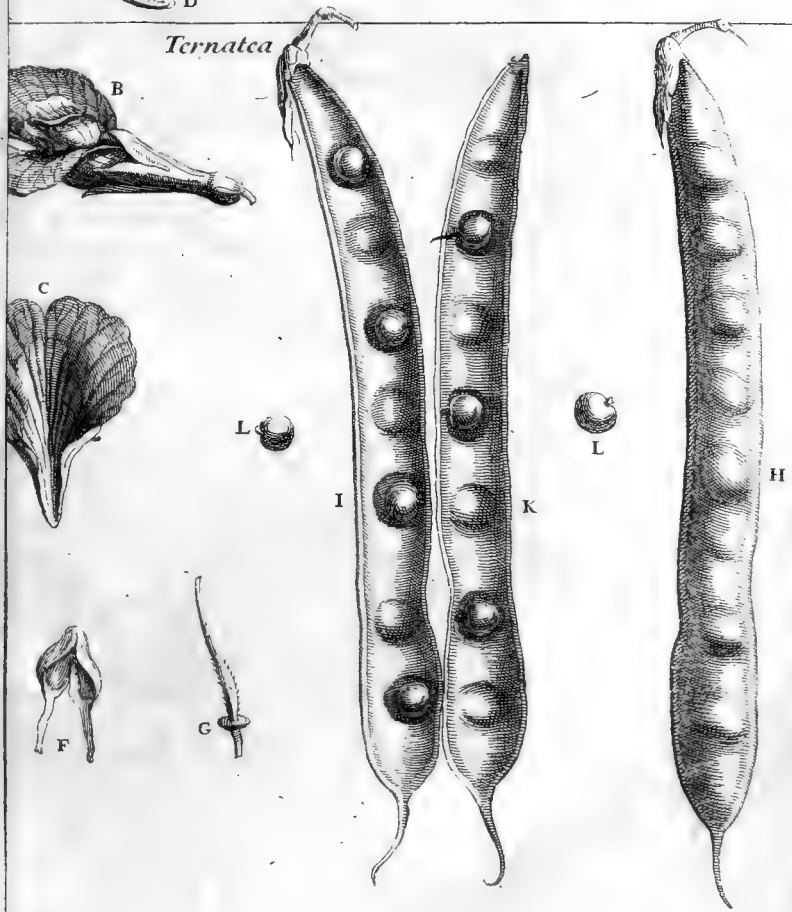
*Gale*



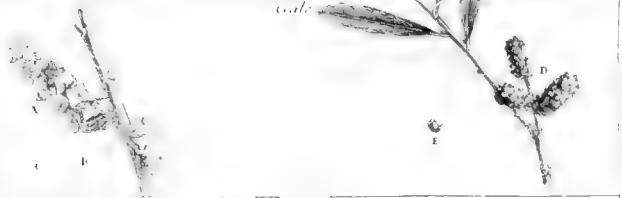
*Orobanchoides*



*Ternatea*



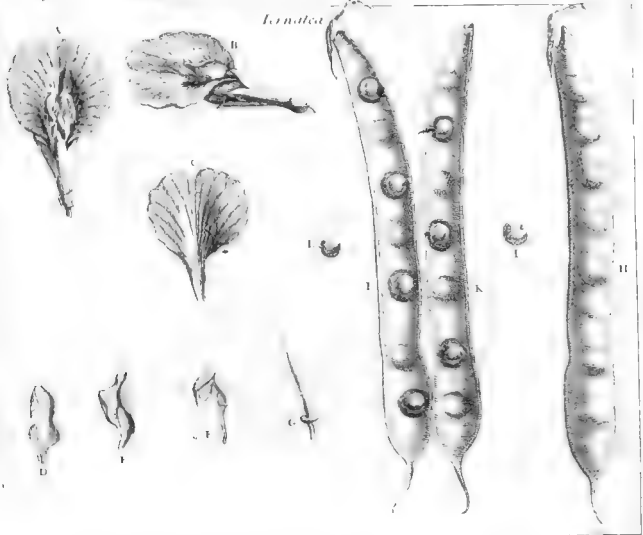
*Gal.*



*Orchanchoules*

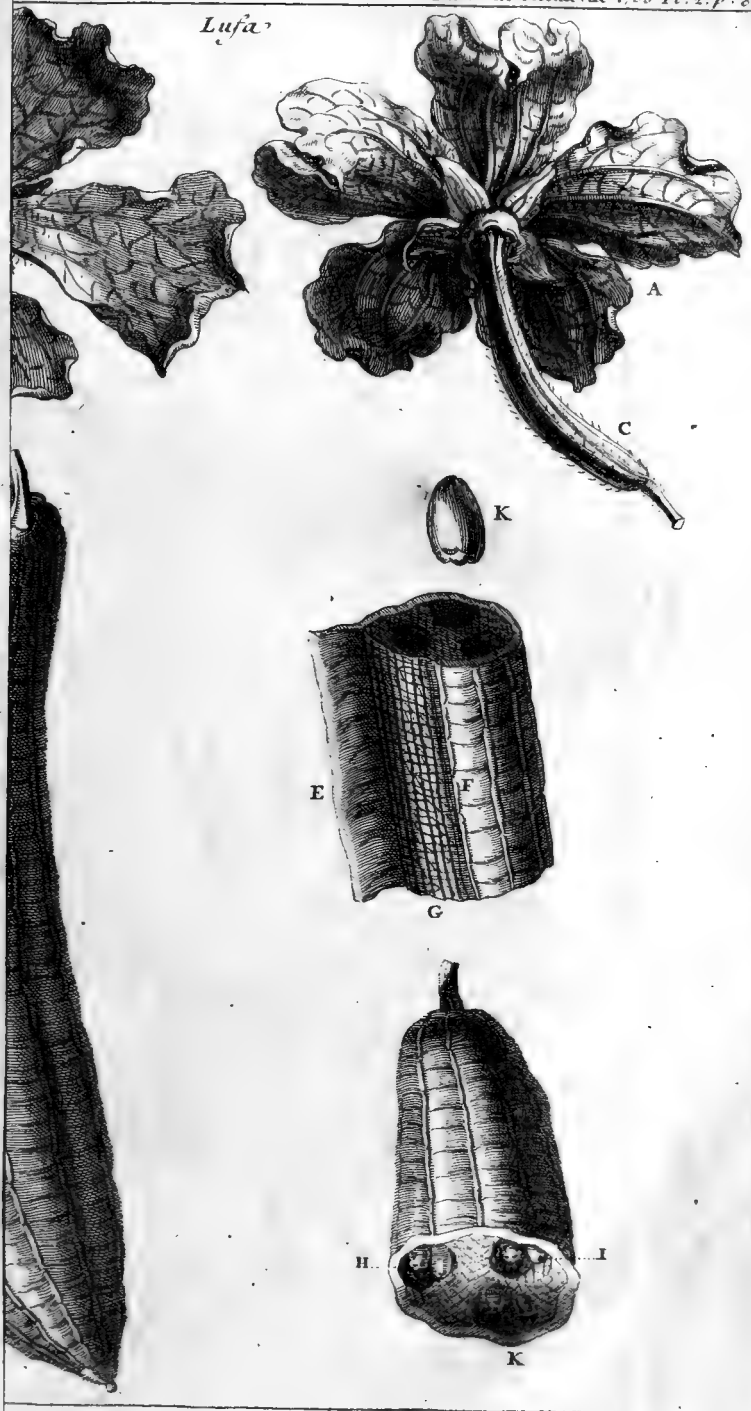


*Lentil*

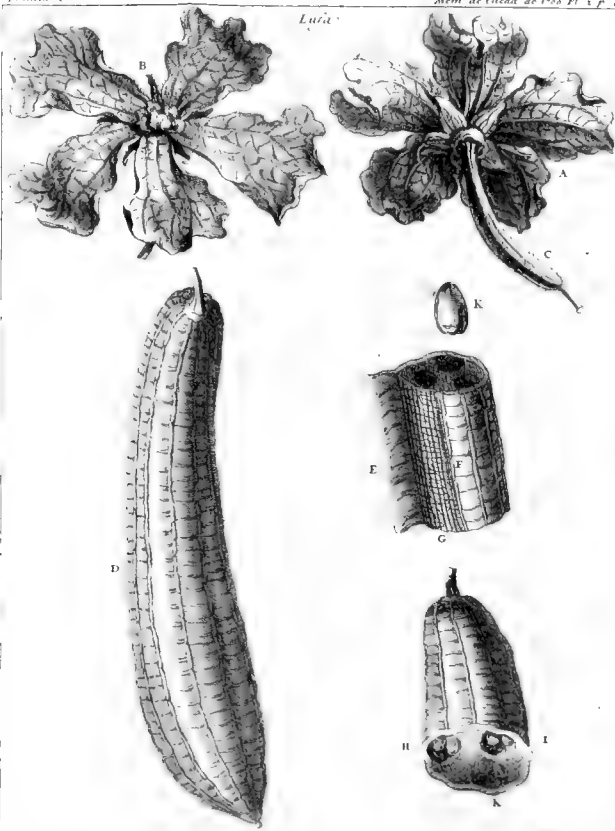




Lufa



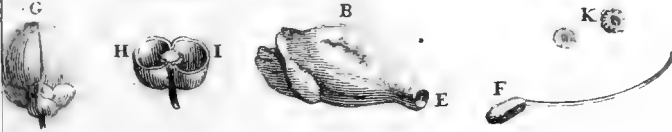
*Lutid.*



*Dicervilla.*



*Chelone.*



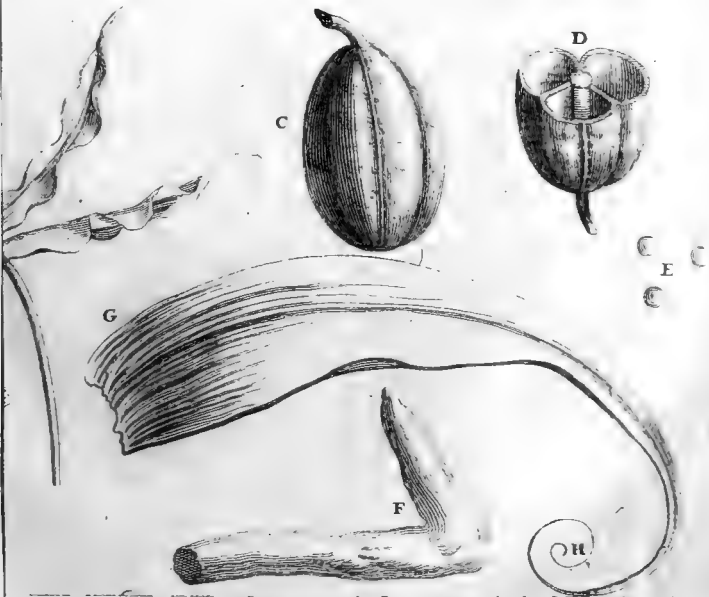
*Valantia.*



*Lavatera.*

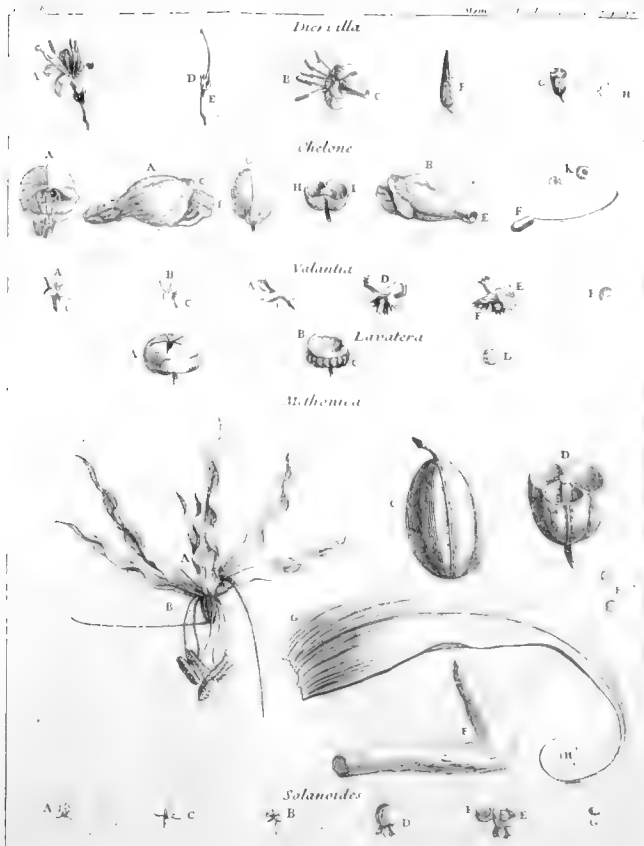


*Methonica.*



*Solanoides.*





## SOLANOIDES.

La *Solanoides* est un genre de Plante à fleur en rose *A*, composée de quelques feuilles *B*. Le pistile *C* devient une coque *D* assez ronde, qui renferme un noyau *E* couverte d'une peau charnuë *F* qui lui donne l'apparence d'une baie.

Les especes de ce genre sont,

*Solanoides Americana*, *circeæ foliis canescentibus. Solanum Barbadenſe, racemosum, minus, tinctorium, circeæ foliis mollibus & incanis Pluk. Phytog. Tab. 112. fig. 2.*

*Solanoides Americana*, *circeæ foliis glabris. Amaranthus baccifer, circeæ foliis H. Amſtel. Tom. 2. 127.*

## OROBUS SYLATICUS

NOSTRAS RARI Sinops. 191.

PAR M. CHOMEL.

Cette Plante a sa racine très grosse à proportion de ses tiges. Dans quelques pieds cette racine trace a quatre doigts de terre de la longueur de huit ou dix pouces : dans d'autres pieds elle pique plus avant & trace moins. Les branches de la racine qui s'enfoncent le plus ont près d'un pied de longueur. Cette racine est très solide, ligneuse, raboteuse & inegale vers son collet. Sa grosseur est depuis cinq jusqu'à huit lignes de diametre. Elle est roussâtre en dehors, & jaune pâle en dedans. Le nerf en est plus blanchâtre, assez gros, & très-dur. Le tronc pour ainsi dire, de cette racine se divise dans la partie inferieure en trois ou quatre branches, d'où partent à distances inegales des fibres qui se terminent en chevelu. La partie superieure est entourée de plusieurs bourgeons, d'où les jeunes tiges doivent naître. Je n'ai trouvé aucune saveur dans cette racine. M. Ray a donné dans son

1706.  
17 Mars.

Histoire une courte description de la Plante ; il témoigne avoir reconnu une sorte de saveur qu'il appelle legumineuse : J'aime mieux attribuer cette saveur à la diversité du terroir que de penser qu'un aussi habile homme se soit trompé.

Cette racine pousse plusieurs tiges , dont la plupart restent couchées sur la terre ; quelques autres se relevent , & demeurent assés droites. Elles ont huit à dix pouces de hauteur , & quelquefois un pied. Elles sont vers leur origine presqu'entièrement entourées par de petites feüilles courtes qui se fanent de bonne heure. Le long de ces tiges est répandu un duvet blanchâtre qui les rend un peu veluës , & elles en paroissent d'un verd plus guay & plus clair. Elles sont solides, rondelettes , & tant soit peu anguleuses vers les nœuds des feüilles & des rameaux , leur diametre est d'une ligne ou environ.

Des aisselles des feüilles qui naissent alternativement le long de la tige , partent des petits rameaux qui ne portent aucunes fleurs. Les feüilles sont accompagnées à leur principe de deux oreillettes *///* relevées , hautes de trois à quatre lignes , & larges d'une & demie au plus. Les oreillettes qui accompagnent les feüilles superieures sont plus étroites & plus pointuës que les oreillettes des feüilles inferieures. Ces mêmes feüilles inferieures n'ont gueres plus d'un pouce de longueur : les plus élevées en ont jusqu'à deux sur un pouce de largeur. Ces feüilles sont composées de plusieurs autres petites , rangées tantôt alternativement , tantôt d'une maniere opposée , le long d'une côte à laquelle elles sont attachées par des pedicules très-courts. Les plus grandes de ces petites feüilles ont six à sept lignes de long sur deux de large. Elles sont arondies près de la côte , & un peu pointuës vers leur extrémité , qui est terminée par un petit filet ou allongement du nerf qui divise assez sensiblement ces petites feüilles , dont chacune est repliée dans les jeunes branches & au sommet de la tige ; celles du bas sont plus étenduës & plus plates que celles du haut.

La côte est d'un verd plus clair que les petites feuilles qui la garnissent. Elle est creusée en maniere de sillon du côté qu'elles regardent la tige, & arondie par-dessous. Toute la feuille est velue de ce côté, & plus lisse par-dessus. La côte avance au-delà des petites feuilles, & les surpasse de la longueur d'une ligne, en formant une pointe ou queue qui termine chaque feuille. Les feuilles des jeunes rameaux sont moins velues & un peu luisantes. Le port extérieur du feuillage de cette Plante est assez semblable à celui de la Vesie ordinaire, comme le remarque M. Ray.

Les fleurs naissent en épis recourbez, soutenues sur un pedicule rond, solide, long de deux pouces, & large d'une demi-ligne vers l'aisselle de la feuille d'où il part. Ce pedicule est nud jusques vers son milieu, le reste est chargé de 8, 10, & quelquefois 12 fleurs legumineuses.

Chaque fleur *A* y est attachée par un petit pedicule *K* long d'une ligne, d'un verd glacé de couleur de chair, qui soutient un calice d'un verd un peu plus rouge. Le calice *B* est un cornet évasé, dentelé de cinq pointes, long de deux lignes, & large d'une au plus. Il est un peu aplati, & couvert de duvet, comme le pedicule & le reste de la Plante. La fleur est composée de 4 feuilles 1, 2, 3, 4. La supérieure 1. est pliée par sa partie inférieure & postérieure en dos d'âne. Elle a dans cet endroit deux lignes de large, & est d'un blanc tirant sur le pourpre. Sa partie supérieure est relevée en étendart. Elle est large de 3 à 4 lignes, arondie, convexe & recoupée dans son milieu. Cet étendart est blanchâtre, semé de petites rayes purpurines & gris de lin, qui rendent cette fleur blanche, panachée de couleur de chair, gris de lin & pourpre. Cette feuille supérieure a six à sept lignes de hauteur. L'inférieure 4 est pliée en bateau, dont chaque côté a une ligne de largeur. Elle est longue de 7 à 8 lignes, blanche & marquée vers sa pointe, qui forme le bout du bateau, d'un gris de lin pourpré. Les feuilles laterales 2, 3, sont acrochées à la feuille inférieure par leurs oreillettes, qui sont plissées & ondulées. Ces feuilles ont 7 à 8 lignes de longueur : elles

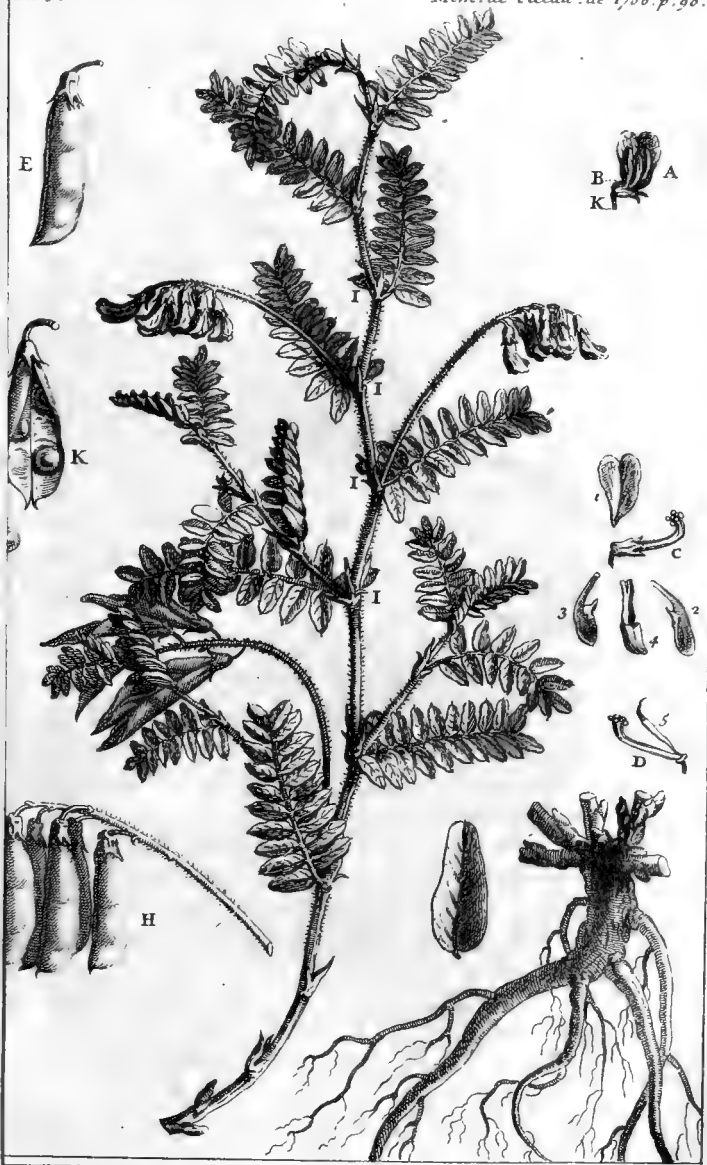
sont tres-étroites , blanches à leur base, larges vers leur milieu d'une ligne y comprise l'oreillette, & arondies vers leur pointe qui est un peu courbée. Ces deux feuilles forment les deux aîles de cette fleur : elles sont blanches rayées de pourpre clair. Le pistile *C*,  $\gamma$ , qui part du centre du calice s'étend dans le fond de la feuille inferieure : il est envelopé d'une gaine membraneuse *D*,  $\gamma$ , terminée par une frange dont chaque brin est une étamine chargée d'un sommet jaune. Ce pistile devient le fruit *E*, qui est une gouffe plate & large vers le milieu avant sa maturité, comme dans le bouquet *H*. Quand elle est meure *E*, elle est convexe des deux côtez, longue de près d'un pouce, & large de deux à trois lignes. Cette gouffe est d'un rouge tanné & grisâtre : elle s'ouvre en deux coffes *F*, qui en se recourbant & se tortillant laissent échaper deux ou trois semences *C*. Ces semences sont noirâtres, rondes, un peu applaties, & ornées d'un cordon *K* verdâtre, auquel est attaché le petit cordon par où elles recevoient le suc nourricier. Elles ont près de deux lignes de diametre.

La fleur *A*, le fruit *E* & la graine *G* sont de grandeur naturelle.

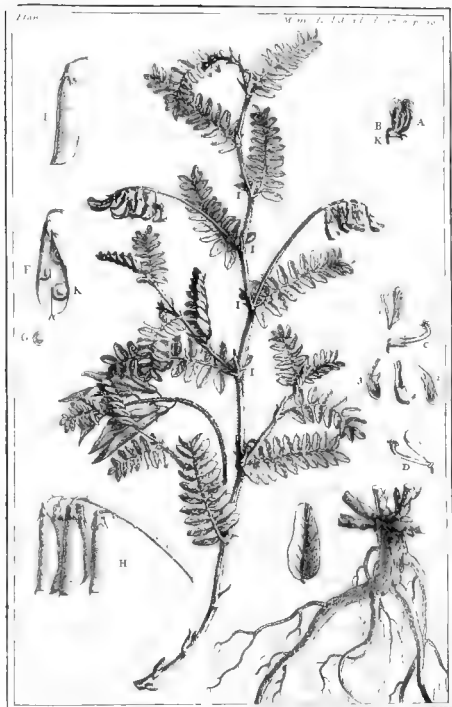
Toute la Plante est assez insipide, elle n'a point d'usage dans la Medecine ; & je n'ay trouvé dans les Auteurs aucune figure qui lui convienne : c'est ce qui m'a engagé de la faire dessiner le plus correctement qu'il m'a été possible. M. Ray est le premier qui l'ait décrite, & même assez succinctement.

Cette Plante est commune dans les prez les plus élevez du Mont-d'or & du Cantal. On la rencontre en abondance au bord du sentier qui conduit au sommet du Puy de Dome, surtout à l'Orient & au Midy de cette Montagne.





*Orobus Sylvaticus nostras Ray Syn. 191.*



*Solanum nigrum* Ray Syn. 101

## OBSERVATIONS

## D'UNE COMETE

*Qui a commencé de paroître au mois de Mars.*

PAR M<sup>RS</sup>. CASSINI ET MARALDI.

LE Ciel qui a été couvert une grande partie de ce 1706.  
mois de Mars 1706, s'étant éclairci la nuit du 18 au 24 Mars.  
19, nous donna lieu de chercher s'il ne paroîtroit pas quelque nouveau phenomene. Nous en trouvâmes un proche de la Couronne Septentrionale en forme d'une petite étoile nebuleuse, semblable à celle qui est dans la ceinture d'Andromede. Nous marquâmes sa situation à l'égard des étoiles prochaines, pour reconnoître dans la suite s'il n'auroit point quelque mouvement particulier. Il se trouva un peu vers le Septentrion à l'égard de la ligne droite qui passe par trois étoiles marquées par Bayer  $\mu, \zeta$ , de Bootes & de la Couronne, autant éloigné vers l'Orient de cette dernière étoile, que celle-cy l'est de la moyenne des trois.

A 11<sup>h</sup> 35' ayant regardé la Comete par la Lunete de 18 pieds, nous la trouvâmes entre deux petites étoiles qui ne se voient point à la vûe simple, étant à égale distance de l'une & de l'autre. Elle s'éloigna ensuite de la plus Septentrionale, en s'approchant de l'autre qui lui étoit au Sud-Ouest.

A minuit 45' ayant de nouveau regardé la Comete avec la Lunete de 18 pieds, nous ne pûmes plus voir l'étoile la plus meridionale qui étoit cachée par la Comete, ce qui nous assura de son mouvement propre vers le Sud-Ouest, quoyqu'il ne nous parût pas encore sensible une heure après à la vûe simple. Le Ciel s'étant ensuite brouillé ne nous permit pas de faire d'autres observations. Le jour suivant le Ciel fut entierement couvert.

La 20 au soir, quoyque le Ciel fut sercin, on ne pût voir la Comete que lorsqu'elle fut fort élevée sur l'horizon, la clarté de la Lune ayant peut-être contribué à la rendre moins sensible; nous la vîmes un peu à l'Occident de l'étoile de la troisième grandeur qui est dans l'épaule occidentale de Bootes, étant éloignée du lieu de la première observation d'environ 8 degrés.

A 11<sup>h</sup> 30' nous déterminâmes par le moyen des fils qui sont au foyer d'une Lunete posée sur la machine parallatique, la différence d'ascension droite entre cette étoile & la Comete qui la suivoit, de 9 minutes & 34", & la différence de déclinaison de 27" de temps, dont la Comete étoit plus meridionale.

Dans cette dernière observation la Comete paroissoit un peu plus petite que dans la première, ce qui peut venir en partie de la clarté de la Lune, qui se trouvoit alors sur l'horizon, & ne s'y trouvoit pas dans les premières observations.

Le soir du 21 le Ciel fut couvert. On la vit pourtant un peu le matin suivant à 2<sup>h</sup> & demi dans une ouverture des nuages. Elle étoit autant meridionale à l'égard de l'épaule occidentale de Bootes, que cette étoile est éloignée de l'étoile plus prochaine de la Couronne marquée, étant en même temps un peu à l'Occident de la ligne tirée par les deux étoiles  $\delta$  &  $\epsilon$  de Bootes. Le Ciel qui se couvrit presque aussi-tôt ne nous donna pas le temps de continuer ces observations.

Depuis ce temps-là le Ciel a été couvert jusqu'au 24.

Ayant posé ces observations sur le Globe, nous avons trouvé qu'elles se rencontroient sur un grand cercle, qui coupe l'Ecliptique vers le 12<sup>e</sup> degré de la Vierge & des Poissons avec une déclinaison de 55 degrés; que ce mouvement à l'égard de l'Ecliptique étoit contre la suite des signes avec une grande diminution de latitude Septentrionale, & que depuis la première observation du 18 Mars, la Comete a parcouru en trois jours un arc de 12 degrés environ, ce qui pourra servir à la trouver dans la suite,

en cas que le clair de la Lune qui va vers son plein & s'approche plus de la Comete; ne la fasse perdre de vue.

Après avoir fait le rapport de ces observations à l'Académie Royale des Sciences le 24 Mars, le soir du même jour nous eûmes le Ciel assez beau pour pouvoir observer la Comete; mais nous ne pûmes pas la distinguer avant les 11<sup>h</sup>. du soir, à cause de la clarté de la Lune qui jusqu'alors avoit été assez élevée sur l'horizon. Elle se trouva sur la route que nous avions décrite par les observations précédentes, c'est-à-dire dans la circonférence du même grand cercle, sur lequel elle s'étoit avancée vers le Sud-Oüest depuis l'observation précédente, un peu moins qu'à proportion de ce qu'elle avoit fait dans l'intervalle entre les premières observations: ce qui donna lieu de juger qu'elle avoit passé son Perigée, quoique l'inégalité de ce mouvement ne parût pas encore assez grande pour en tirer géométriquement le lieu de son Perigée avec assez de précision. Néanmoins on trouva par le calcul qu'elle avoit été à peu près dans son Perigée à la première observation qu'on en fit le 18 de Mars.

1706.  
17 Mars.

Ayant élevé le Pole du Globe celeste, & l'ayant tourné de sorte que la route de la Comete qui y étoit marquée concouroit avec l'horizon, le Pole Septentrionale se trouva élevé sur l'horizon de 55 degrés; ce fut par conséquent la moindre distance que la route de la Comete pût avoir du Pole Septentrional.

En cet état le lieu de la première observation de la Comete se trouva au point Septentrional de l'horizon, & par conséquent elle fut alors plus proche du Pole qu'en tout autre endroit de sa route.

Dans le même état du Globe le premier degré des Gemeaux étoit au meridien où étoit aussi le 58 degré de l'Equinoxial, ce qui sert à replacer la route de la Comete sur la circonférence de l'horizon du Globe.

Pour trouver assez précisément sur la trace du mouve-

ment de la Comete les lieux où il la faut chercher d'un jour à l'autre , nous nous servons de l'hypothese qui nous a servi heureusement dans l'apparition des autres Cometes pour les trouver long-temps après qu'elles avoient disparu à la vûe simple.

Nous supposons que dans le temps que la Comete paroît , elle décrit un arc d'une très-grande circonference peu different d'une ligne droite , & qu'elle parcourt cette ligne droite par un mouvement égal. Le point de cette ligne le plus proche de la terre est le Perigée de la Comete.

A l'intervalle de la Comete à la terre nous décrivons un cercle concentrique à la terre , & nous emploïons la methode exposée dans le Traité de la Comete de l'année 1664 pour trouver , par le moïen de deux arcs observés entre trois jours differens, les distances de la Comete au Périgée prises sur la tangente à proportion de la plus petite distance de la Comete à la terre.

Ayant supposé la plus petite distance de la Comete à la terre divisée en 100 parties, nous avons trouvé que le mouvement journalier de cette Comete rapporté sur cette tangente est de 7 de ces parties , ce qui suffit pour trouver à chaque jour proposé la distance apparente de la Comete à son Périgée , & les mouvemens journaliers apparens de la Comete , qui sont inégaux entr'eux , & qui diminuent de plus en plus à mesure qu'elle s'éloigne de son Périgée.

Ayant donc placé sur la route de la Comete marquée sur le Globe le point du Périgée , & ayant trouvé le jour auquel la Comete est arrivée à ce point, qui fut le 18 Mars, on aura les points où elle s'est trouvée chaque jour , & où elle se pourroit trouver dans la suite.

Ayant cherché parmi les Cometes qui ont paru depuis plus d'un Siecle , s'il n'y en avoit pas quelqu'une qui ait décrit parmi les étoiles fixes une route approchante de celle que décrit nôtre Comete avec un semblable degré de vitesse, nous en avons trouvé une qui fut observée l'an

1580 par Gramineus, par Haggecius & par Meßlin, dont la trace décrite par ces Auteurs approche de la route de celle que nous venons d'observer, autant que la Lune approche des mêmes étoiles fixes en différentes révolutions.

## OBSERVATIONS

## DE MERCURE

## DANS LE MERIDIEN

*Comparées avec nos Tables.*

PAR M. DE LA HIRE le fils.

ENTRE toutes les Planetes il n'y en a point qui ait donné plus d'exercice aux Astronomes que celle de Mercure pour en déterminer les mouvemens; car étant fort proche du Soleil, on ne peut pas en faire toutes les observations nécessaires pour leur détermination, mais encore sa petitesse ne permet pas qu'on le puisse voir dans le Crépuscule où il est toujours quand il est visible à la vûe simple. Il y a même quelques Astronomes celebres qui n'ont jamais pû le voir, peut-être par quelques causes particulières, soit du lieu où ils observoient, soit par la foiblesse de leur vûe. 1706. 27 Mars.

Cependant les observations de cette Planete qu'on a vûe plusieurs fois sur le Soleil dans le Siecle passé, auroient pû servir beaucoup à faire des Tables justes, si toutes ces observations avoient été faites avec toute l'exactitude qu'on auroit souhaité: mais il y a eu dans la plûpart des circonstances particulieres qui en ont diminué la valeur. Celles qu'on a faites proche de la ligne en plusieurs endroits auroient été fort avantageuses, si on en avoit eu un assez grand nombre, & qu'elles eussent été justes; car on y peut voir cette Planete bien plus proche du Soleil que dans les autres endroits de la terre.

C'étoit peut-être en partie par la faute des Tables qu'on avoit de cette Planete, que nous n'avions pû voir Mercure dans le meridien après l'avoir cherché long-tems. Car après que mon Pere eut construit les siennes sur un très-grand nombre d'observations qu'il en avoit faites le matin & le soir par plusieurs methodes tres-exactes, & sur ce qu'on avoit de son passage dans le Soleil, nous eûmes la position de Mercure plus exacte qu'on ne l'avoit auparavant, ce qui fut cause que nous l'apperçûmes pour la premiere fois dans le meridien le 22. Octobre 1699. Cette découverte nous donna beaucoup de satisfaction ; mais nous en eûmes encore une plus grande, en voyant que les observations s'accordoient autant exactement avec les Tables, qu'on le pouvoit esperer dans cette Planete. Nous l'observâmes plusieurs jours de suite, & nous avons continué en differens tems jusqu'à present. Nous l'avons vû même beaucoup plus proche du Soleil qu'on ne le peut voir le matin & le soir, à cause des vapeurs qui sont vers l'horizon.

Mais si nous n'avons pas publié ces premieres observations aussi tôt qu'elles ont été faites, ce n'a été que pour être plus assurés de la justesse des Tables qui avoient été construites sur des observations faites dans des verticaux. Cependant pour prendre datte de cette nouvelle observation, mon Pere a marqué expressément dans la Preface de ses Tables publiées en 1702, qu'il avoit observé toutes les Planetes dans le meridien, sans en excepter Mercure, comme il avoit fait en 1686. dans l'édition de la premiere partie de ses Tables.

Nous avons remarqué plusieurs fois que nous n'avons pû voir cette Planete dans le meridien, quoyqu'elle fut beaucoup plus éloignée du Soleil que lorsque nous l'y avions observée ; & pour nous assurer si ce n'étoit point par le défaut des Tables, nous avons pris alors toutes les mesures necessaires pour reconnoître sa veritable position, par des observations faites dans le même tems le matin ou le soir. C'est ce qui nous a fait penser que cette

Planete.



Planete pouvoit avoir plusieurs taches , qui étant tournées vers la terre dans certains tems, lui ôtoient en partie sa clarté , & empêchoient qu'on ne la pût appercevoir.

Comme il faut assez de précautions pour faire ces sortes d'observations dans le meridien, nous avons choisi celles qui nous ont paru les plus sûres entre un assez grand nombre de celles que nous avons faites pour les rapporter icy, & comparer les positions qui sont données par les observations avec celles qui sont tirées de nos Tables.

Nous en rapporterons même plusieurs qui ont été faites de suite, afin de faire mieux connoître la difficulté qu'il y a de faire convenir exactement le calcul avec l'observation, dont on ne peut s'assurer qu'à quelques secondes près, qui peuvent porter loin dans cette Planete.

En 1699 le 22 Octobre le centre de Mercure passa par le meridien à  $10^h 58' 56''$  du matin, sa hauteur meridienne vraie étoit de  $38^{\circ} 19' 35''$ .

Nous tirons de cette observation par nos suppositions & par le vrai lieu du Soleil tiré de nos Tables, que la longitude de Mercure étoit de  $6^s 12^o 5' 58''$ , & sa latitude boreale de  $2^{\circ} 7' 9''$ . Par nos Tables nous trouvons la longitude de  $6^s 12^o 6' 23''$ , & la latitude boreale de  $2^{\circ} 4' 4''$ . Donc la difference de la longitude observée avec celle qui est calculée est de  $25''$ , & la difference de la latitude observée avec celle qui est calculée de  $3' 5''$ .

Le 23 suivant Mercure passa par le meridien à  $11^h 0' 20'' \frac{1}{2}$  du matin, & sa hauteur meridienne vraie étoit de  $37^{\circ} 44' 55''$ .

Nous tirons de l'observation sa longitude de  $6^s 13^o 31' 44''$ , & sa latitude boreale de  $2^{\circ} 5' 32''$ . Par le calcul des Tables la longitude est de  $6^s 13^o 31' 51''$ , & la latitude boreale de  $2^{\circ} 3' 36''$ . Donc la difference des longitudes est  $7''$ , & celles des latitudes  $1' 56''$ .

Le 24 Mercure passa par le meridien à  $11^h 1' 53''$ , & sa hauteur meridienne vraie étoit de  $37^{\circ} 10' 15''$ .

Nous tirons de l'observation sa longitude de  $6^s 14^o 59''$

22", & sa latitude boreale de  $2^{\circ} 4' 54''$ . Et par le calcul la longitude de  $6^{\circ} 15^{\circ} 0' 3''$ , & sa latitude boreale de  $2^{\circ} 2' 25''$ . La difference des longitudes est de  $41''$ , & celle des latitudes est de  $2' 29''$ .

Le 27 Mercure passa par le meridien à  $11^h 7' 9'' \frac{1}{2}$ , & sa hauteur meridienne vraie étoit de  $35^{\circ} 17' 35''$ . Cette observation donne sa longitude de  $6^{\circ} 19^{\circ} 34' 52''$ , & sa latitude boreale de  $1^{\circ} 56' 43''$ ; & le calcul donne sa longitude de  $6^{\circ} 19^{\circ} 37' 51'' \frac{1}{2}$ , & sa latitude boreale de  $1^{\circ} 54' 33''$ . La difference des longitudes est de  $2' 59'' \frac{1}{2}$ , & celle des latitudes est de  $2' 10''$ .

En 1701 le 12 Septembre Mercure passa par le meridien à  $10^h 54' 56''$  du matin, sa hauteur meridienne vraie étoit de  $52^{\circ} 4' 0''$ , d'où l'on tire sa longitude de  $5^{\circ} 1^{\circ} 54' 53'' \frac{1}{2}$  & sa latitude boreale de  $0^{\circ} 5' 25''$ . Le calcul donne sa longitude de  $5^{\circ} 1^{\circ} 54' 36'' \frac{1}{2}$ , & sa latitude de  $0^{\circ} 2' 41''$ . La difference des longitudes est de  $17''$ , & celle des latitudes est de  $2' 44''$ .

Le 20 suivant Mercure passa par le meridien à  $11^h 2' 12''$ , & sa hauteur meridienne vraie étoit de  $50^{\circ} 11' 0''$ , d'où l'on tire sa longitude de  $5^{\circ} 10^{\circ} 50' 43''$ , & sa latitude boreale de  $1^{\circ} 37' 33''$ . Le calcul donne sa longitude de  $5^{\circ} 10^{\circ} 55' 8'' \frac{1}{2}$  & sa latitude boreale de  $1^{\circ} 31' 48'' \frac{1}{2}$ . La difference des longitudes est de  $4' 25'' \frac{1}{2}$ , & celle des latitudes est de  $5' 44'' \frac{1}{2}$ .

Le 21 Mercure passa par le meridien à  $11^h 4' 29'' \frac{1}{2}$ , sa hauteur meridienne vraie étoit de  $49^{\circ} 36' 40''$ , d'où l'on tire sa longitude de  $5^{\circ} 12^{\circ} 24' 48'' \frac{1}{2}$ , & sa latitude boreale de  $1^{\circ} 39' 31'' \frac{1}{2}$ . Le calcul donne sa longitude de  $5^{\circ} 12^{\circ} 27' 46''$ , & sa latitude boreale de  $1^{\circ} 37' 41''$ . La difference des longitudes est de  $2' 58'' \frac{1}{2}$ , & celle des latitudes de  $1' 50'' \frac{1}{2}$ .

Le 24 Mercure passa par le meridien à  $11^h 12' 18''$ , sa hauteur meridienne vraie étoit de  $47^{\circ} 52' 55''$ , d'où l'on tire sa longitude de  $5^{\circ} 17^{\circ} 20' 13''$ , & sa latitude boreale de  $1^{\circ} 51' 4''$ . Le calcul donne sa longitude de  $5^{\circ} 17^{\circ} 24' 28''$ , & sa latitude boreale de  $1^{\circ} 48' 49''$ . La difference des longitudes est de  $4' 15''$ , & celle des latitudes est de  $2' 15''$ .

Le 25 Mercure passa par le meridiem à  $11^h 15' 1''\frac{1}{2}$ , sa hauteur meridiennne vraie étoit de  $47^{\circ} 13' 55''$ , d'où l'on tire sa longitude de  $5^s 19^{\circ} 2' 21''\frac{1}{2}$ , & sa latitude boreale de  $1^{\circ} 52' 13''$ . Le calcul donne sa longitude de  $5^s 19^{\circ} 7' 31''\frac{1}{2}$ , & sa latitude boreale de  $1^{\circ} 50' 39''$ . La difference des longitudes est de  $5' 10''$ , & celle des latitudes est de  $1' 34''$ .

Le 26 Mercure passa par le Meridien à  $11^h 17' 56''$ , sa hauteur meridiennne vraie étoit de  $46^{\circ} 33' 30''$ , d'où l'on tire sa longitude de  $5^s 20^{\circ} 47' 50''\frac{1}{2}$ , & sa latitude boreale de  $1^{\circ} 53' 29''$ . Le calcul des Tables donne sa latitude boreale de  $5^s 20^{\circ} 53' 0''\frac{1}{2}$  & sa latitude boreale de  $1^{\circ} 51' 31''$ . La difference des longitudes est de  $5' 10''$ , & celle des latitudes est de  $1' 58''$ .

En 1705 le 18 Juillet Mercure passa par le meridiem à  $10^h 47' 5''$ , sa hauteur meridiennne vraie étoit de  $63^{\circ} 53' 35''$ , d'où l'on tire sa longitude de  $3^s 8^{\circ} 27' 48''$ , & sa latitude australe de  $0^{\circ} 29' 15''\frac{1}{2}$ , & par le calcul de nos Tables la longitude est de  $3^s 8^{\circ} 26' 15''\frac{1}{2}$ , & sa latitude australe de  $0^{\circ} 29' 23''$ . La difference des longitudes est de  $1' 32''\frac{1}{2}$  & celle des latitudes est de  $7''\frac{1}{2}$ .

Le 25 suivant Mercure passa par le meridiem à  $11^h 16' 8''$  du matin, sa hauteur meridiennne vraie étoit de  $63^{\circ} 45' 35''$ , d'où l'on conclut sa longitude de  $3^s 21^{\circ} 33' 33''$ , & sa latitude boreale de  $0^{\circ} 51' 2''$ . Par nos Tables la longitude est de  $3^s 21^{\circ} 35' 54''\frac{1}{2}$ , & sa latitude boreale est de  $0^{\circ} 50' 8''$ . La difference des longitudes est de  $2' 21''\frac{1}{2}$ , & celle des latitudes est de  $54''$ .

Le 27 Mercure passa par le meridiem à  $11^h 25' 49''$ , & sa hauteur meridiennne vraie étoit de  $63^{\circ} 20' 35''$ , d'où l'on tire sa longitude de  $3^s 25^{\circ} 38' 27''$ , & sa latitude boreale de  $1^{\circ} 8' 32''$ . Le calcul donne sa longitude de  $3^s 25^{\circ} 42' 13''$ , & sa latitude boreale de  $1^{\circ} 7' 9''$ . La difference des longitudes est de  $3' 46''$ , & celle des latitudes de  $1' 23''$ .

Ces observations n'ont point été choisies comme celles qui convenoient le mieux avec les Tables; mais nous avons pris seulement celles que nous croyons les meilleures & les plus exactes.

On voit par-là que les Tables donnent la position de Mercure en plusieurs points & en differens tems dans la même minute de longitude que par l'observation, ce qu'on n'auroit jamais osé esperer dans une Planete dont le mouvement est si prompt & si irregulier à cause de la grande excentricité de son orbite & de sa figure qui nous est inconnuë. Pour les autres points Mercure n'est que peu écarté des Tables ; & en examinant les observations de suite , on peut conjecturer que la difficulté de l'observation avec tous les Elemens qu'il faut y employer pour en tirer son vrai lieu, auroient pû contribuer en partie à la difference qui se trouve entre le Ciel & les Tables.

Pour la latitude tirée des Tables, elle ne répond pas avec autant de justesse à l'observation dans plusieurs points que la longitude, quoiqu'elle ne soit que peu écartée, comme on le peu voir , & c'est ce qui nous avoit fait penser qu'il auroit fallu faire quelque correction au nœud , comme d'augmenter l'inclinaison de  $5'$  à  $6'$  & de retirer un peu le nœud : mais ces corrections qui pourroient rectifier quelques positions en gâteroient d'autres , & c'est ce qui a fait que nous n'avons encore rien déterminé sur cela , nous contentant jusqu'icy d'avoir approché si près du vrai dans une chose aussi difficile que celle-cy , & réservant à faire ces corrections quand nous aurons un plus grand nombre de ces sortes d'observations.

Pour faire la comparaison de nos Tables avec les Rudolphines de Kepler, qu'on a toujours regardé comme les plus justes de toutes celles qui avoient paru jusqu'à notre tems , & principalement pour cette Planete , nous avons calculé le lieu de Mercure suivant ces Tables pour le tems de quelques-unes des observations précédentes , comme celle de 1699 du 22 Octobre, y ayant corrigé le lieu du Soleil , & nous avons trouvé la longitude de Mercure de  $6^s\ 12^o\ 14'\ 20''$  que l'observation a donné de  $6^s\ 12^o\ 5'\ 58''$  ; donc ces Tables s'écartent du vrai dans ce point de  $8' 22''$ , & les autres ne sont éloignées du vrai que de  $25''$ . Pour la latitude nous la trouvons par les Rudolphines de

$2^{\circ} 3' 16''$ , & l'observation est de  $2^{\circ} 7' 9''$ ; donc elles sont de  $3' 35''$ , & les nôtres de  $3' 5''$ .

L'observation de 1701 du 10 Septembre, calculée par les Rudolphines, donne la longitude de Mercure de  $5^{\circ} 1^{\circ} 59' 2''$ , & l'observation la donne de  $5^{\circ} 1^{\circ} 54' 53'' \frac{1}{2}$ , donc la différence est de  $4' 0'' \frac{1}{2}$ . La même calculée par nos Tables ne s'écarte de l'observation que de  $17''$ . La latitude par les Rudolphines se trouve de  $33''$ , l'observation la donne de  $5' 25''$ , & par les nôtres de  $2' 41''$ . Les Tables Rudolphines sont donc éloignées du Ciel de  $4' 52''$ , & les nôtres de  $2' 44''$ .

Une autre observation de 1701 du 21 Septembre, calculée par les Rudolphines, donne la longitude de  $5^{\circ} 12^{\circ} 26' 24''$ , l'observation de  $5^{\circ} 12^{\circ} 24' 48'' \frac{1}{2}$ , les nôtres de  $5^{\circ} 12^{\circ} 27' 46''$ ; donc dans ce point les Rudolphines sont écartées de  $1' 35'' \frac{1}{2}$ , & les nôtres de  $2' 57'' \frac{1}{2}$ . La latitude dans ce même point par les Rudolphines est de  $1036' 36''$ , l'observation est de  $1039' 31'' \frac{1}{2}$ , & par nos Tables de  $1037' 41''$ : les Rudolphines sont donc écartées du Ciel de  $2' 55'' \frac{1}{2}$ , & les nôtres de  $1' 50'' \frac{1}{2}$ .

Une autre observation du 18 Juillet 1705, calculée par les Rudolphines, donne la longitude de Mercure de  $3^{\circ} 8^{\circ} 13' 21''$ . L'observation de  $3^{\circ} 8^{\circ} 27' 48''$ , & par nos Tables de  $3^{\circ} 8^{\circ} 26' 15''$ . Les Rudolphines s'écartent donc du Ciel de  $14' 27''$ , & les nôtres de  $1' 33'' \frac{1}{2}$ . La latitude par les Rudolphines est de  $31' 56''$ , l'observation de  $29' 15''$ , & par nos Tables de  $29' 23''$ ; donc les Rudolphines s'écartent de l'observation de  $2' 41''$ , & les nôtres de  $7'' \frac{1}{2}$ .



## OBSERVATIONS

*Sur une dissolution de l'Argent.*

PAR M. HOMBERG.

1706.  
14 Avril.

**P**armi les liqueurs qui dissolvent les métaux, il y en a qui les dissolvent tous, & d'autres qui n'en dissolvent qu'une partie. L'eau commune dissout tous les métaux par la simple attrition : le mercure ne dissout pas aisément le fer, mais il dissout tous les autres métaux. Les acides en general les dissolvent tous aussi ; mais ces acides étant de différente nature, les uns dissolvent seulement certains métaux que les autres ne dissolvent pas. On divise ordinairement ces acides en eaux-fortes, en eaux-regales & en simples esprits acides, qui ne sont ni eaux-fortes ni eaux-regales. Les eaux-regales sont l'esprit de sel marin, & tous les autres acides dans lesquels on a mêlé du sel marin ou de l'esprit de sel marin. Les eaux-fortes sont l'esprit de nitre, & tous les autres acides dans lesquels on a mêlé de l'esprit de nitre, pourvû qu'il n'y ait pas de sel marin mêlé, ou de l'esprit de sel marin. Les simples acides sont tous les autres esprits acides, soit des vegetaux ou des minéraux, dans lesquels il n'y a ni esprit de nitre ni esprit de sel marin mêlé.

Les eaux-regales dissolvent l'or sans dissoudre l'argent ; & les eaux-fortes dissolvent l'argent sans dissoudre l'or ; mais les autres esprits acides, aussi-bien que les eaux-fortes & les eaux-regales, dissolvent tous les moindres métaux, pourvû qu'on les emploie dans le degré de force qui convient à chacun de ces métaux.

On a crû pendant long-tems que le mercure ne se dissolvoit que par les seules eaux-fortes. J'ay donné des preuves dans nos Memoires de l'année 1700, qu'il se dissout aussi par les eaux-regales. J'ay fait quelques operations

depuis qui m'ont de même parû montrer que non-seulement l'argent se dissout par les eaux-fortes, mais qu'il se dissout aussi par les eaux-regales en observant certaines circonstances: ce qui seroit un paradoxe en Chimie. Voici le cas qui me l'a fait observer.

Je fais souvent mon eau-regale en distillant ensemble deux parties de salpêtre, trois parties de vitriol & cinq parties de sel marin. Le flegme qui vient le premier, je le garde à part dans une fiole, & l'esprit qui vient le dernier, je le garde à part aussi.

Un jour voulant dissoudre de l'or, je pris par mégarde la fiole où étoit le flegme de cette eau-regale; j'en versay sur de l'or pour le dissoudre; je le laissay dans une chaleur convenable pendant deux heures: la liqueur devint un peu jaunâtre, mais il ne se fit point de dissolution; ce qui me fit croire que j'avois pris de l'eau-forte au lieu de l'eau-regale. Pour m'en éclaircir j'en retiray l'or & je le pesay. Il parut n'avoir rien perdu de son poids; & j'y mis à la place un morceau d'argent. Je remis le vaisseau sur le feu; & après quelque tems je trouvay mon argent dissous en une bouë noire, sans m'être apperçû d'aucune ébullition, laquelle se voit d'ordinaire très-sensiblement dans la dissolution de l'argent: ce qui m'ayant parû extraordinaire, je voulus refaire avec plus d'attention une pareille opération sur l'argent. Je versay donc de la même fiole sur d'autre argent, que je mis en digestion comme devant: mais je fus fort étonné de ce qu'il ne se fit pas de dissolution comme il s'en étoit fait quelques heures devant dans des circonstances à peu près égales. J'examinay avec soin quelle pouvoit être la difference essentielle qui avoit fait réussir la premiere dissolution, & qui avoit fait manquer la seconde.

Je m'appergûs d'abord que je ne m'étois pas servi d'eau-forte, comme j'en avois crû; mais que c'étoit du flegme de mon eau-regale, qui selon les observations connues ne devoit pas dissoudre l'argent. Cependant l'ayant vû réussir, je l'ai tenté une troisième fois en mettant d'abord ce

flegme en digestion pendant quelque tems avec l'or, comme j'avois fait la premiere fois. Il s'y est teint de même légèrement en jaune. J'en ai retiré le morceau d'or, & j'ay mis de l'argent à la place : il s'y est dissous sans ébullition en une bouë noire, comme il avoit fait la premiere fois.

J'ay voulu refaire cette operation avec la même liqueur environ un an après. Elle a fait précisément le contraire de ce qu'elle avoit fait en premier lieu ; c'est à-dire qu'elle a dissous l'or fort sensiblement & avec ébullition, & elle n'a rien fait sur l'argent. J'ai refait de nouvelle liqueur semblable à la premiere, qui a dissous l'argent. J'ay laissé vieillir cette liqueur, & elle n'a plus dissous l'argent, mais elle a dissous l'or : de sorte que les circonstances qui m'ont paru nécessaires pour faire dissoudre l'argent dans ce flegme de l'eau-regale, sont, qu'il soit premierement foible, qu'en second lieu il ait été auparavant en digestion avec l'or, & que troisièmement il soit nouveau distillé.

Il faut observer ici que ce flegme d'eau-regale est clair & sans couleur comme de l'eau de riviere, avant que d'avoir été mis sur l'or ; qu'il devient jaune pendant qu'il est sur l'or ; & qu'il se noirait comme de l'encre pendant qu'il est sur l'argent. Il faut encore observer qu'il ne dissout l'argent qu'après avoir été pendant quelque tems en digestion avec l'or : Que l'argent ne paroît pas se dissoudre dans cette liqueur de la même maniere qu'il fait dans l'eau-forte, dans laquelle il devient liquide & transparent comme de l'eau ; au lieu que dans le cas dont il s'agit icy, il paroît se desunir seulement & devient comme une bouë noire : Que tout cecy n'arrive que lorsque ce flegme est nouveau fait : Enfin que quand il a été gardé sept ou huit mois dans un lieu un peu chaud, il produit des effets tout-à-fait contraires ; c'est à dire qu'il dissout sensiblement l'or qu'il ne paroïssoit pas dissoudre auparavant, & qu'il ne dissout point du tout l'argent qu'il dissolvoit auparavant.

Ces effets qui paroissent bizarres & extraordinaires, se peuvent réduire à deux observations principales. L'une est que cette liqueur ne dissout l'argent qu'après avoir été en digestion.



digestion avec l'or : l'autre est qu'elle dissout l'argent quand elle est nouvellement faite , sans qu'elle paroisse dissoudre l'or ; & qu'elle dissout l'or quand elle est vieille , sans dissoudre l'argent.

Pour concevoir la raison de la premiere, sçavoir pourquoy le flegme de notre eau-regale ne dissout l'argent qu'après avoir été en digestion sur l'or ; il faut considerer que ce flegme est une vraie eau-regale , mais fort foible , qui ne laisse pas de dissoudre une petite quantité d'or , quoiqu'il paroisse n'en point dissoudre ; ce qui est assez marqué par la couleur jaune qu'il acquiert quand il a été pendant quelque temps sur l'or & qu'il teint les doigts en rouge brun. Il faut encore considerer que ce flegme ne consiste qu'en une très-petite quantité d'esprit de sel & en autant à peu près d'esprit de nitre , qui nagent & qui sont dispersés en une grande quantité d'eau ; & que ce peu d'esprit de sel & ce peu d'esprit de nitre ne se sont pas encore pénétrés & mis en une seule matiere , & que par consequent ils peuvent encore agir chacun séparément sur le métal qui lui convient , c'est-à-dire , l'esprit de sel sur l'or , & l'esprit de nitre sur l'argent.

Et comme la presence de l'esprit de sel empêche l'esprit de nitre de dissoudre l'argent , & qu'au contraire la presence de l'esprit de nitre n'empêche pas l'esprit de sel de dissoudre l'or ; cette liqueur qui contient en même temps ces deux esprits , ne sçauroit dissoudre l'argent que l'esprit de sel n'en ait été séparé , ou qu'il soit occupé de maniere qu'il ne puisse empêcher l'esprit de nitre d'agir sur l'argent : ce qui arrive précisément quand on met cette liqueur pendant quelque temps en digestion sur l'or , parce que tout l'esprit de sel qu'elle contient est pour lors occupé & chargé d'autant d'or que ce peu d'esprit de sel est capable d'en dissoudre ; de sorte que le reste de la liqueur devient à l'égard de l'argent comme s'il n'y avoit point d'esprit de sel , c'est-à-dire qu'elle devient une simple eau-forte , qui est le dissolvant ordinaire de l'argent. Mais ce peu d'or qui avoit été dissous auparavant par l'es-

prit de sel , & qui reste dans cette liqueur , se précipite lorsqu'on y met l'argent en une poudre noire , laquelle est capable de teindre toute la liqueur en noir : cette noirceur s'augmente à mesure que l'argent s'y dissout , parce que l'or ne se précipite qu'à mesure que la dissolution de l'argent se fait , cette dissolution étant la cause unique de la précipitation de l'or.

La dissolution de l'argent y est d'abord véritable , c'est à dire qu'elle s'y fait en liqueur transparente & claire , comme elle se fait ordinairement par l'eau-forte. Mais comme elle se mêle à mesure avec celle de l'or qui avoit été faite par l'esprit de sel , & dont la confusion se précipite toujours réciproquement ; il en résulte un mélange d'une chaux d'argent & d'une chaux d'or précipitées l'une par l'autre , qui produisent cette bouë noire qui paroît après la dissolution de l'argent.

Il sera facile de trouver maintenant la raison de la seconde observation ; sçavoir , pourquoi le flegme de notre eau-regale dissout l'argent quand il est fraîchement fait , sans qu'il paroisse dissoudre l'or ; & qu'il dissout l'or quand il est vieux gardé , sans dissoudre l'argent. On n'a qu'à se souvenir de ce qui a été dit cy-dessus , sçavoir , que ce flegme est une vraie eau-regale , mais fort foible , dans laquelle l'esprit de sel & l'esprit de nitre nagent pêle-mêle , mais séparément & sans se pénétrer dans le tems qu'il est nouveau fait ; & qu'alors ces deux esprits sont encore capables d'agir séparément l'un sur l'argent , & l'autre sur l'or , comme nous l'avons vû dans l'explication précédente.

Mais ce flegme ayant été gardé pendant cinq ou six mois ou davantage dans un lieu non froid , les deux esprits acides qu'il contient , sçavoir , l'esprit de sel & l'esprit de nitre , se pénétrant & s'unissant peu à peu ensemble , ils produisent une eau-regale inséparable ; de sorte que mettant cette liqueur sur l'or , les deux acides qu'elle contient n'agissant plus séparément , l'un comme esprit de sel & l'autre comme esprit de nitre , mais de concert comme

une simple eau-regale, ils dissolvent ensemble autant d'or qu'ils sont capables d'en dissoudre, sans toucher jamais à l'argent, soit devant ou après la dissolution de l'or.

Et comme par l'union de ces deux esprits, celui du nitre est devenu aussi un dissolvant de l'or, ce qu'il n'étoit pas auparavant, nôtre liqueur étant vieille doit dissoudre le double de l'or de ce qu'elle étoit capable d'en dissoudre étant nouvellement faite : ce qui a été la cause de l'apparence qu'elle ne dissolvoit point l'or étant nouvelle, & qu'elle en dissolvoit étant vieille.

Cette operation a séduit un des plus grands Chimistes de l'Europe. Il a crû voir dans cette bouë noire non-seulement une dissolution de l'argent par l'eau-regale, mais de plus une veritable transmutation de l'argent en or. Mais en l'examinant avec un peu d'attention, on découvre sans peine que dans toute cette operation il n'y a rien d'extraordinaire, & que bien loin d'y trouver une vraie transmutation de l'argent en or, il n'y a qu'une fausse apparence d'une dissolution de l'argent par l'eau-regale, toutes les observations y étant communes & ordinaires, pourvû qu'on en éclaircisse les causes & les circonstances comme nous venons de le faire.

## R E F L E X I O N S.

*Sur les apparences du corps de la Lune.*

PAR M. DE LA HIRE.

**L**Es premiers hommes qui s'appliquerent à la contemplation des corps celestes, considererent d'abord leurs mouvemens pour en tirer quelque utilité par rapport à la vie. Le Soleil fut le premier qui reglant le cours de la journée & divisant les saisons, leur fournissoit ce qui étoit necessaire pour la culture de la terre, qui étoit la principale occupation de ces temps-là. Cet astre leur mar-

1706.  
14 Avril.

quoit la durée des tems par sa révolution entiere sur les étoiles du firmament, & c'est ce qu'ils appellerent une année. Mais cette année composée de 365 jours étoit de trop longue durée pour déterminer les differens accidens de la vie qui arrivent chaque jour: c'est pourquoy ils eurent recours au second luminaire qui est la Lune, & qui parcouroit tout le Ciel en moins de 30 jours. Cet espace de tems leur servit à partager l'année en 12 parties à peu près qu'ils appellerent *Lunes* ou *Lunaisons*, & c'est par le moyen de ces deux divisions du tems que les faits de l'antiquité la plus reculée & l'ordre dans lequel ils sont arrivés, sont parvenus jusqu'à nous, sans qu'on pût y remarquer aucune erreur, si nous n'étions dans l'incertitude des Epoque différentes dont ils se sont servis, & s'ils n'avoient supposé plusieurs connoissances très-communes dans leurs tems, dont ils ne pensoient pas que la memoire pût jamais être éteinte.

C'en étoit assez pour l'utilité de la vie, & même en quelque façon pour la curiosité, si l'esprit de l'homme qui n'est jamais content de ce qu'il possède, ne s'étoit porté à contempler avec attention les corps mêmes de ces astres. Le Soleil étoit trop lumineux pour le regarder, & si on le voyoit quelquefois au travers d'un brouillard épais, on ne remarquoit aucune inégalité sur son corps; toutes les étoiles étoient trop petites, il ne restoit donc que la Lune qu'on pût voir très-facilement avec toutes les taches qui paroissent sur son disque.

Cet astre fit d'abord leur admiration, en considerant qu'il ne tournoit jamais vers la terre qu'un même côté de son globe, ce qu'on remarquoit par le moyen des taches qui y sont si sensibles & si bien distinguées.

Ce sont ces mêmes Astronomes qui considerant attentivement les phases de la Lune, jugerent bien-tôt qu'elle recevoit sa lumiere du Soleil, & qu'elle devoit être d'une matiere solide, puisque tout ce qu'ils pouvoient y apercevoir ne leur paroissoit sujet à aucun changement. Cependant l'attention qu'ils apportoit à observer la

La Lune fit bien-tôt naître entr'eux plusieurs disputes. Ils remarquoient quand la Lune étoit dans son croissant ou dans son décours, qu'on ne laissoit pas de voir dans un tems sercin tout le corps de l'astre & même ses taches; d'où quelques-uns avancerent que la Lune avoit en elle-même un principe de lumiere foible qui la faisoit paroître, quoiqu'elle ne fût point éclairée du Soleil: d'autres soutenoient que son corps quoique solide, étoit d'une matiere un peu transparente, & que quelques rayons du Soleil passant au travers communiquoient une foible lumiere à la partie obscure. Mais Tycho n'étant pas content de ces hypotheses, s'imaginait que cette lumiere venoit de Venus, ce qui étoit bien moins vrai-semblable que les anciennes suppositions. Enfin Mœstlinus maître de Kepler termina toutes ces disputes, en donnant une raison de ce Phenomene que tous les Sçavans ont embrassée, comme Kepler le rapporte dans ses Paralipomenes sur Vitellion pag. 254, où il dit qu'il ne faut point chercher ailleurs cette seconde lumiere de la Lune, que des rayons du Soleil reflexis sur la terre vers la Lune, qui l'éclairent assez pour la faire paroître de la terre, comme il arriveroit si de la Lune on regardoit la terre qui seroit éclairée par la Lune, lorsqu'elle y paroît pleine ou aux environs.

Aussil'on avoit remarqué que cette seconde lumiere de la Lune étoit bien plus forte & plus vive lorsque la Lune étoit encore proche du Soleil, que quand elle en étoit éloignée, & c'est ce qui confirme cette hypothese. Car quand la Lune n'est que peu éloignée du Soleil, la partie obscure reçoit par reflexion la lumiere de toute la surface de la terre qui lui est opposée, & qui est toute éclairée à son égard: mais quand la Lune est dans les quartiers, il n'y a plus que la moitié de cette surface de la terre tournée vers la Lune laquelle soit éclairée, & par consequent elle renvoye vers la Lune une lumiere bien plus foible qu'auparavant.

Mais on étoit encore peu avancé dans la connoissance du corps de la Lune avant la découverte des Lunetes

d'approche. Galilée ayant fait au commencement du siècle passé les plus grandes qu'on vît alors, publia en 1610 dans son *Nuntius sidereus*, les merveilles qu'il avoit découvertes sur le corps de cet astre. Il apperçut que c'étoit un corps fort raboteux, & couvert en partie d'une infinité de montagnes qui étoient beaucoup plus hautes que celles de la terre, quoique la Lune fût beaucoup plus petite, & il en donne une démonstration, & que ces montagnes environnoient pour la plupart une infinité de lacunes & les grandes taches obscures qu'on voyoit à la vûë simple, & enfin que c'étoit une vérité dont on ne pouvoit pas douter, puisqu'on voyoit l'ombre de ces montagnes les unes sur les autres, & sur les endroits les plus unis qui sont les grandes taches obscures.

Les Lunetes de Galilée étoient assez bonnes pour découvrir une partie de ce qu'on peut voir sur le corps de la Lune; mais celles qu'on a faites depuis, qui sont bien meilleures & beaucoup plus grandes, nous ont donné plusieurs connoissances qu'il n'avoit pas: aussi ne pouvoit-il pas donner toute son attention à chaque objet en particulier, à cause de la grande quantité de nouveautés qu'il découvroit de tous côtés dans le Ciel.

L'une des plus considérables remarques qu'on puisse faire sur les apparences du corps de la Lune, c'est que si l'on compare toutes les montagnes & les cavités qu'on y voit distinctement dans les endroits où la partie éclairée se termine avec l'obscur, avec ces mêmes parties lorsque le Soleil les éclaire en face, à peine peut-on les reconnoître. Plusieurs de ces montagnes & cavités disparaissent entièrement, & plusieurs parties lumineuses & brillantes s'y découvrent, qu'on n'y voyoit point auparavant. Cependant il est certain que ces parties lumineuses ne le sont point d'elles-mêmes. Par exemple, on voit dans la pleine Lune de grands rayons lumineux tout autour de la cavité ou tache qu'on appelle *Tycho*, qui ne paroissent point sur les montagnes & sur les taches par où ils passent, lorsque ces parties sont éclairées de côté, & qu'elles se rencon-

treint sur le bord de l'ombre. Cette même tache qui paroît fort claire quand elle est éclairée en face, n'est qu'une petite cavité avec une montagne au milieu, qui n'est point différente d'une infinité d'autres qui sont aux environs. De même la petite tache qu'on appelle *Aristarque*, qui est si brillante que quelques-uns ont crû que c'étoit un Volcan, & qu'elle avoit une lumière particulière qui la rendoit plus claire que tout le reste de la Lune, n'est pourtant qu'une petite cavité qu'on ne peut distinguer qu'à peine des autres qui l'environnent quand elle est sur le bord de l'ombre.

Il me semble qu'on ne peut pas dire que toutes ces parties lumineuses soient des especes de Phosphores qui s'allument à proportion que le Soleil les éclaire directement, & qui paroissent sans lumière quand le Soleil les éclaire de biais ou par le côté, puisqu'elles font encore le même effet dans l'obscurité quand la Lune n'est plus éclairée que de la terre par reflexion. Il semble bien plus naturel d'en rechercher la cause dans la figure de ces parties & dans la reflexion des rayons du Soleil, qui y rencontrant une espece de miroir concave qui ne seroit pas parfaitement poli, & dont la superficie seroit fort blanche, frapperoit l'œil comme une véritable lumière : car si ces cavités étoient polies, on n'y appercevroit qu'un petit point lumineux, ce qui est connu de tous ceux qui sçavent l'Optique.

Pour m'en éclaircir par l'expérience, j'ay fait autrefois en relief une petite partie de quelques taches qui sont sur le corps de la Lune ; & l'ayant exposée au Soleil en différentes manieres, elle rendoit à peu près la même apparence que la partie de la Lune qu'elle representoit.

Il faut remarquer que la grande blancheur de ces cavités contribué beaucoup à cet effet : car comme la blancheur n'est qu'une reflexion toute pure des rayons du Soleil ; si ces cavités sont blanches, elles sont propres à renvoyer la lumière, & elles la renvoyeront plus fortement vers l'œil à cause de la disposition où elles sont dans la

figure concave, en sorte que cette cavité paroîtra toute brillante lorsque le Soleil l'éclairera en face: mais cette lumière diminuëra peu à peu à proportion que les rayons y viendront de côté, lesquels ne pourront plus se réfléchir vers l'œil, ce qui lui fera perdre en partie son éclat, outre l'ombre du bord de la cavité dans la cavité même qui l'obscurcira beaucoup.

Il n'en est pas tout à fait de même de ces rayons lumineux qui partent de la tache appelée Tycho. Il faut considérer que le corps de la Lune n'est que comme un bas relief dont on apperçoit distinctement toutes les parties quand la lumière l'éclaire de côté; mais si elle l'éclaire en face, à peine peut-on en discerner la figure à une distance médiocre; & s'il arrive que plusieurs éminences & cavités se trouvent également éclairées dans un certain aspect du Soleil, alors il ne paroîtra plus aucune interruption entre ces cavités & ces montagnes, & c'est ce qui fait que la figure apparente de la pleine Lune est si différente de la vraie figure de la Lune. C'est aussi la raison de l'apparence des rayons qui sortent de Tycho; car dans les endroits où on les voit quand la Lune est pleine, on n'apperçoit plus les éminences ni les enfoncemens qui y sont, & par un hazard de leur disposition les uns à l'égard des autres, ils forment en cet endroit ces grandes traînées de lumière: Il faut pourtant en excepter quelques endroits où l'on voit que ces rayons sont formés en partie par la figure des corps qui réfléchissent plus vivement la lumière, & en partie par leur blancheur lorsqu'ils se continuënt dans les grandes taches obscures:

Au reste tout le corps de la Lune paroît d'une manière solide contre l'opinion des Pythagoriciens, qui croyoient que la Lune étoit une seconde terre, dont la partie blanche étoit la terre & les taches obscures les mers. C'est en quelque façon sur ce système que nous donnons à ces grandes taches des noms de mers, comme *la mer des pluies*, *la mer des crises*, &c. quoiqu'en effet il ne paroisse sur cet astre aucune partie qui soit liquide, puisque dans ces taches



ches obscures on apperçoit quelques cavités semblables à celles qui sont dans la partie blanche.

Nous avons aussi reconnu dans plusieurs rencontres ou conjonctions des étoiles & des planètes avec la Lune, qu'elle n'avoit autour d'elle aucune Atmosphère sensible, puisque ces corps ne souffroient aucune refraction en s'en approchant ni même en la touchant.

Mais après toutes les observations exactes que nous faisons des parties du corps de la Lune, ce ne sera que dans la suite des tems qu'on pourra être assuré que ce corps ne souffre aucune alteration en lui-même, au moins telle que nous puissions la découvrir; & il est certain que s'il lui arrivoit des changemens aussi grands qu'il en est arrivé sur la terre en certains tems, on pourroit très-bien s'en appercevoir, puisqu'un espace aussi grand que la ville de Paris sur le corps de la Lune, nous paroît avec nos grandes Lunettes d'approche de 20 ou 30 piés de longueur, sous un angle de 4 minutes & plus, ou bien en diametre de la huitième partie du diametre de la Lune à la vûe simple, puisqu'elles augmentent de 100 fois la longueur des objets & la superficie de 10000 fois: car si Paris étoit placé au milieu du disque de la Lune, nous en verrions la longueur avec ces Lunettes, aussi grande que nous voyons à la vûe simple une des taches du corps de la Lune, dont le diametre seroit égal à la huitième partie du diametre de cet astre, & une telle tache nous est très-sensible & fort facile à bien distinguer à la vûe simple, puisqu'elle seroit aussi grande que celle que nous appelons *Mare crisum*, qu'on y voit fort distinctement sans Lunettes.



## DEMONSTRATION

De l'apparence d'un objet aussi grand que la ville de Paris sur le corps de la Lune avec une Lunete de vingt-cinq piés de foyer.

PAR M. DE LA HIRE.

1706.  
28 Avril.

UN objet vû de la terre sur la Lune, ou vû de la Lune sur la terre, paroît sur un même angle.

Or Paris contient sur la terre plus de deux minutes, & le sinus de 2' par rapport au rayon est comme  $58 \frac{1}{4}$  à 100000, prenons comme 60 à 100000, ou bien comme 6 à 10000, ou bien comme 3 à 5000.

Mais si l'on regarde de la Lune cette partie de 3 avec une Lunete de 25 piés de foyer, à qui l'on ne donneroit qu'un oculaire de 3 pouces de foyer, quoiqu'elle en puisse porter un plus fort, laquelle par conséquent augmentera l'objet 100 fois, elle le fera paroître sous un angle 100 fois plus grand.

Donc Paris placé sur le milieu du disque apparent de la terre, vû de la Lune avec une de ces Lunetes de 25 piés, sera en apparence au demi-diametre de la terre, comme 300 à 5000, ou comme 3 à 50.

Mais posant le diametre de la Lune de la moitié du demi diametre de la terre comme il est à peu près, & Paris étant transporté sur le corps de la Lune au milieu, il y paroîtra en longueur par rapport au diametre de la Lune comme 3 à 25 : il y paroîtra donc à peu près d'une huitième partie de ce diametre, car 3 est à peu près la huitième partie de 25.

Et enfin la tache appelée *Mare crisium* est de cette grandeur ; c'est pourquoy Paris étant placé sur le milieu du disque de la Lune, y paroîtroit avec une Lunete de 25 piés, comme y paroît *Mare crisium* à la vûe simple. *Ce qu'il falloit démontrer.*

On ne juge pas de cette augmentation comme elle est en effet ; car il n'y a personne qui regardant la Lune avec une de ces Lunetes, puisse se persuader qu'il voit le diametre de la Lune sous un angle de 50 degrés, qui ne paroît à la vûe simple que sous un angle d'un demi degré, & par consequent on voit le disque de la Lune avec ces Lunetes 10000 fois plus grand qu'à la vûe simple, quoiqu'on ne le juge ordinairement que 4 ou 5 fois plus grand, à moins qu'on n'en fasse la comparaison en regardant la Lune avec les deux yeux tout ensemble, dont l'un est appliqué à la Lunete & l'autre est libre ; car on peut alors faire paroître la Lune qu'on voit à la vûe simple sur celle qu'on voit par la Lunete, d'où l'on peut juger de la grande augmentation par la Lunete.

## DECOUVERTE

*D'une nouvelle Etoile qui paroît, & qui disparoît en divers temps.*

PAR M. MARALDI.

**O**N avoit découvert le Siecle passé dans la Constellation de la Balene & dans celle du Cigne deux Etoiles fixes, qui paroissent & qui disparoissent par des periodes à peu près regulieres. Nous en avons trouvé présentement une troisieme dans la Constellation de l'Hydre, qui suivant les observations que nous en avons faites depuis quelques années, a la même propriété que les deux précédentes.

1706.  
14 Avril.

Cette Etoile ne se trouve point dans les Cartes celestes de Bayer, ni dans les anciens Catalogues ; mais parmi les remarques manuscrites que M. Montanari a faites sur ces Cartes, & qui nous ont été communiquées à Rome par M. Bianchini, on trouve qu'au mois d'Avril de l'année 1672 il marqua une Etoile de la quatrième grandeur en

ligne droite, avec les deux dernières de la queue de l'Hydre, autant éloignée vers l'Orient de la dernière, que celle-cy l'est de l'antepenultième.

En comparant ces Cartes avec le Ciel au mois d'Avril de l'année 1702, nous ne vîmes point cette Etoile à la vûë simple, & nous n'en pûmes pas voir aucun vestige avec la Lunete, quoique nous l'aïons cherchée avec toute l'attention possible.

L'habileté & l'exactitude de cet Astronome ne nous permit pas de revoquer en doute cette observation. La pensée que nous eûmes fut que cette Etoile se trouvoit alors dans le Ciel comme il l'avoit marquée sur la Carte, & qu'elle avoit depuis disparu; ce qui nous rendit attentif à considérer cet endroit du Ciel, dans l'esperance que l'Etoile pourroit dans la suite se rendre de nouveau visible.

Près de deux ans se passerent avant que nous la puissions appercevoir; mais enfin nous la vîmes à l'Observatoire Royal au commencement de Mars de l'année 1703, au même endroit du Ciel où elle avoit été marquée 34 ans auparavant par M. Montanari. Elle étoit égale aux Etoiles de la quatrième grandeur, & plus belle que l'antepenultième de la Constellation de l'Hydre. Nous continuâmes de la voir à peu près de la même grandeur jusqu'au commencement d'Avril de la même année. Dans la suite elle alla en diminuant peu à peu, passant par divers degrés de grandeur & de lumière, jusqu'à la fin de May de la même année qu'elle se perdit entièrement à la vûë simple, ayant été visible pendant trois mois depuis la première fois que nous l'appergûmes. Après que nous l'eûmes perdue à la vûë simple, nous continuâmes de la voir encore avec la Lunete durant un mois, pendant lequel-temps elle diminua toujours jusqu'à ce qu'elle disparut entièrement.

Nous avons été ensuite attentifs à chercher cette Etoile toutes les fois que le temps l'a permis, & que la partie du Ciel où elle se trouve a été dégagée des rayons du Soleil. Depuis le mois de Juin de l'année 1704 nous n'avons pu

la voir que vers la fin de Novembre de l'année dernière, 1705, lorsque cette partie du Ciel commençoit à sortir le matin des rayons du Soleil. Pour lors elle étoit si foible qu'on n'auroit pas été certain de son retour, si on ne s'en fût assuré en l'observant avec la Lunete, & en déterminant la situation par rapport aux Etoiles voisines que nous trouvâmes précisément la même que les années précédentes. Elle a depuis continué toujours à diminuer, de sorte qu'à la fin de Janvier de cette année 1706 on avoit de la peine à la voir même avec la Lunete.

On voit donc par ces observations que cette Etoile reste quelques mois visible, qu'après avoir disparu pendant plusieurs mois, elle commence à paroître de nouveau, & qu'elle augmente en sorte qu'elle égale les Etoiles de la quatrième grandeur.

Il y a beaucoup d'apparence qu'elle a toujours été sujette aux mêmes variations que nous observons depuis quelques années, quoique nous n'ayons point de connoissance que ces changemens aient été remarquez auparavant.

Ayant examiné les observations qu'Hevelius a faites des Etoiles fixes, & qu'il a publiées dans son Ouvrage intitulé *Machina celestis*, nous avons trouvé que le 18 & le 19 Avril de l'année 1662, il observa les distances d'une Etoile de l'Hydre à l'égard de deux autres, dont une est dans le genou du Serpente, l'autre est la luisante du Serpent. Ces distances donne la situation de cette Etoile telle à peu près que nous l'avons trouvée par nos observations; ce qui fait connoître qu'elle étoit alors visible & de la cinquième grandeur, quoique cet Astronome n'ait point remarqué ces variations, & qu'il la regardât comme une de ces Etoiles ordinaires qui ne sont point marquées dans les Catalogues.

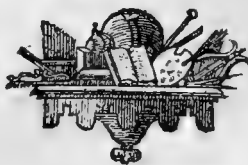
Pour représenter les differens intervalles de 8, de 34 & de 42 années qui sont entre les observations d'Hevelius, de Montanari & les premières des nôtres, dans l'hypothese que l'Etoile a paru & disparu plusieurs fois durant

ces intervalles , nous ne trouvons point de periode plus propre que celle de deux années.

Les observations que nous avons fait depuis quatre années , nous obligent en même temps à reconnoître des grandes inégalités dans cette periode , y ayant un intervalle de 26 mois depuis la premiere fois que nous apperçûmes qu'elle avoit disparu jusqu'à la seconde occultation , & seulement 18 mois depuis la seconde occultation jusqu'à la dernière. Des semblables inégalités s'observent aussi dans les retours des deux Etoiles de la Balene & du Cigne , quoique la révolution de l'Etoile de la Balene soit pour l'ordinaire de 11 mois , & celle de l'Etoile du Cigne soit de 13 mois.

On peut expliquer l'apparition & l'occultation de l'Etoile de l'Hydre par la même hypothese que M. Bouillaud a expliqué les apparitions de l'Etoile de la Balene , en supposant qu'elle est un globe en partie lumineux , & en partie obscur ; qu'il tourne autour de son axe , & presente à la terre tantôt la partie lumineuse qui nous rend l'Etoile visible , tantôt la partie obscure qui nous la rend invisible ; que la révolution autour de son axe s'acheve dans l'intervalle de temps qui est entre une apparition de l'Etoile & l'autre , & qui est environ de deux ans dans l'Etoile de l'Hydre.

Pour ce qui est des inégalités que l'on observe dans cette révolution , on les peut expliquer suivant l'hypothese de M. Cassini , en supposant que l'axe autour duquel se fait la révolution de l'Etoile s'incline diversement à la terre en différentes années.



DIVERSES EXPERIENCES  
ET  
OBSERVATIONS CHYMIQUES  
ET PHYSIQUES.

*Sur le Fer & sur l'Aimant.*

PAR M. LEMERY le fils.

**L**E Fer est de tous les métaux le plus commun, & cependant celui qui merite davantage l'attention des Physiciens & des Medecins. Les Physiciens trouvent de quoi s'occuper en considerant avec quelle facilité la matiere magnetique passe au travers de ses pores, & les effets surprenans qu'elle produit sur ce metal; & les Medecins ne peuvent assez l'étudier, puisqu'il est souvent un excellent specifiqué dans plusieurs maladies. D'ailleurs il entre dans la composition d'un grand nombre d'eaux minerales, non-pas sous sa forme metallique, mais sous une autre qu'il a acquise en s'unissant avec differens sels, & l'on peut dire qu'il fait la principale & peut-être la seule vertu de ces eaux. Il est donc important de s'instruire le plus qu'il est possible de la nature particuliere de ce metal, des differentes metamorphoses dont il est susceptible, & de celles qui peuvent le rendre plus ou moins propre à produire de bons effets dans nos corps. C'est dans cette vûe que j'ai fait un assez grand nombre d'experiences, dont je ne rapporterai presentement que quelques-unes, par lesquelles j'espere faire voir, 1°. Que le Fer se décompose assez facilement. 2°. Quels sont les principes dont il est composé. 3°. Que le Fer n'est soumis à l'action de la matiere magnetique que par une partie de lui-même, qui étant separée des autres n'en reçoit ensuite que mieux

cette matiere dans ses pores ; & enfin comment on peut conjecturer que le Fer se prepare, & s'altere dans les entrailles de la terre pour devenir ensuite la matiere la plus propre à faire de bon Aimant.

En faisant les trois premieres experiences dont je vais parler dans la suite, je voulois m'éclaircir de deux choses. 1°. Si dans les matieres où l'on sçavoit certainement que le Fer avoit entré, & où il n'en restoit plus de vestige, il avoit tout à fait changé de nature, ou s'il étoit réductible dans sa premiere forme ; car quoique les autres metaux se revivissent, on avoit lieu de soupçonner qu'il pouvoit bien n'en pas être de même du Fer qui est un metal grossier, indigeste, dont on tire par la Chimie un soufre sensible, & qui semble ne devoir produire ses effets dans certaines maladies qu'en se décomposant dans nos corps.

2°. Comme l'on fait un vitriol semblable au vitriol commun avec le Fer & avec plusieurs esprits acides, je voulois sçavoir si l'on ne pourroit point trouver quelque marque de Fer dans le vitriol commun, pour me convaincre encore plus que je ne l'étois, que le vitriol naturel se forme dans les entrailles de la terre, avec les mêmes matieres, & de la même maniere que nous en faisons dans nos laboratoires.

Pour satisfaire à ces deux vûes, je pris trois sortes de matieres : la premiere étoit un vitriol de Mars que j'avois fait à la maniere ordinaire avec la limaille de fer, & avec l'esprit de vitriol. Je passai sur ce vitriol artificiel & autant sec qu'il le pouvoit être, une lame d'acier aimantée, qui n'y fit pas la moindre chose. Je le mis ensuite dans une cornuë, & je le distillai à grand feu : j'eus un esprit acide, mais qui sentoit si fort le soufre commun, qu'il étoit impossible de tenir un moment le nez dessus. Cette odeur se conserve long-tems après la distillation de ce vitriol ; car elle a duré plus de cinq mois & dure encore assez fortement. La matiere restée dans la cornuë étoit rouge, sentant aussi beaucoup le soufre commun, c'étoit



un véritable colcotar. J'y passai une lame d'acier aimantée qui n'y fit rien.

Il est à remarquer que cette matière s'humecte facilement à l'air, principalement quand on ne lui a pas enlevé pendant la distillation autant d'acides qu'on le pouvoit faire, & il se forme à la surface de ce colcotar plusieurs flocons d'une matière grasse, jaunâtre, & qui ressemble beaucoup au soufre commun; je mis ce colcotar dans un creuset recuit & très-sec, je plaçai ce creuset dans un fourneau de fonte, & après que la matière qui étoit dedans eut été poussée par un feu très-violent, & qu'elle eut jeté une forte odeur de soufre commun, elle devint noire, rarifiée, & fut attirée par l'Aimant du moins aussi fortement que le fer ou l'acier.

La seconde matière dont je me suis servi étoit de la rouille de fer réduite en poudre, qui étoit autant parfaite qu'elle pouvoit l'être, & sur laquelle l'Aimant ne produisoit presque plus aucun effet. Cette seconde matière poussée dans le même fourneau par un aussi grand feu que la première, jeta une forte odeur de soufre commun, & enfin devint noire, & fut aisément attirée par une lame d'acier aimantée, mais non pas tout-à-fait si bien que la précédente.

La troisième matière sur laquelle j'ai travaillé étoit du colcotar restée dans la cornue après la distillation du vitriol d'Angleterre, & adoucie autant qu'il avoit été possible avec de l'eau commune. En cet état, il n'a rien fait avec l'Aimant; mais après avoir été poussé par un feu semblable à celui des deux premières opérations, & avoir donné une forte odeur de soufre commun, il s'est réduit en une matière noire pareille à celle qui avoit été tirée du vitriol artificiel distillé, & ensuite calciné par un feu de fonte. Cette dernière opération nous prouve certainement que le vitriol commun ne diffère point de celui que nous faisons; & elle nous apprend en quoi consiste la nature particulière du colcotar, qui est un remède dont on se sert beaucoup en Médecine.

En examinant les trois matieres qui m'étoient restées après les operations dont je viens de parler, je crus d'abord que le fer s'étoit revivifié en sa premiere forme; cependant cette forte odeur de soufre commun qui s'étoit fait sentir dans chacune des trois operations, me donna lieu de penser que le fer pouvoit bien avoir perdu en cette occasion une assez grande quantité de parties essentielles, pour être ensuite different de ce qu'il étoit auparavant. Je fis donc pour m'en convaincre quelques experiences sur le fer & l'acier, & en même tems sur ces trois matieres. Voici les differences que j'y remarquai.

1°. Les grains de ces trois matieres s'écrasent facilement, soit dans un mortier, soit entre deux instrumens d'acier trempez, & des grains de même volume de fer ou d'acier s'y applatissent plutôt que de s'y écraser.

2°. La limaille de fer, & particulièrement celle d'acier étant jetée sur les charbons ardens, ou dans la flamme d'une bougie, s'y allument & petillent fortement, ce qui n'arrive point à nos trois matieres réduites en poudre.

3°. Je n'ai point remarqué que ces matieres se rouïlassent à l'humidité, ni dans les eaux douces & salées, comme le fer.

4°. Plusieurs sucres doux & aigres des vegetaux qui tirent fort aisément & en assez peu de tems de fortes teintures du fer & de l'acier, ne font rien après un long-tems sur ces matieres. Cependant j'ai remarqué que la matiere tirée de la rouille donnoit avec quelques-uns de ces sucres un peu de teinture; on en verra la raison dans la suite.

5°. L'eau forte & l'esprit de nitre qui fermentent si violemment avec le fer, ne font rien du tout sur les trois matieres.

6°. L'esprit de sel qui fermente assez fortement avec le fer, & l'esprit de vitriol qui après une fermentation assez considerable réduit le fer en vitriol, demeurent tranquilles avec ces trois matieres, & ne leur causent aucune alteration sensible.

Enfin l'huile de vitriol & les esprits d'alun & de soufre

verlez sur ces trois matieres, n'y paroissent pas d'abord faire aucun effet, si ce n'est l'esprit de soufre qui y produit une ébullition si petite, & qui dure si peu, qu'à moins qu'on ne l'examine de près & avec attention, on a bien de la peine à s'en appercevoir. Quand les esprits dont il a été parlé ont resté quelque tems sur ces matieres, il se forme à leur surface une poudre blanche & un peu grasse qui conserve plus ou moins de tems sa blancheur, & qui devient souvent rouge brune dans la liqueur même. Ces matieres autant altérées qu'elles le peuvent être, séparées de la liqueur qui étoit dessus & sechées, sont ensuite attirées presque aussi-bien qu'auparavant par une lame d'acier aimantée, & n'ont tout au plus souffert en cette occasion qu'une rouille très-legere. A l'égard du fer & de l'acier, l'huile de vitriol & les esprits d'alun & de soufre, leur causent des changemens bien plus considerables, que je rapporterai avec plusieurs autres experiences destinées pour un second Memoire sur le fer. On peut donc dire en general que les liqueurs qui dissolvent le plus parfaitement le fer, sont à peine capables d'apporter une petite alteration aux matieres dont il s'agit.

De toutes les experiences que j'ai faites sur le fer, je croi pouvoir conclure qu'il est composé d'une matiere terreuse, uni intimement à une matiere huileuse. Comme il se décompose aisément par le secours des moindres acides, il ne paroît pas vrai-semblable qu'un principe aussi propre à détruire ce metal, soit entré en grande quantité dans sa composition; je croi même que moins les principes qui ont servi à le faire ont contenu d'acides, plus le metal qui en est provenu a été malleable & parfait. On dira peut-être qu'on trouve dans le fer des marques d'une assez grande quantité d'acides; mais je tâcherai de faire voir en parlant de la rouille, que ces acides sont étrangers au fer; qu'avant que d'avoir produit quelque effet sur le fer, ils n'y sont point unis intimement, qu'en les chassant alors de ses pores, il n'en devient que plus pur, & s'il m'est permis de parler ainsi, plus fer qu'auparavant,

ce qui n'arriveroit pas si ces acides faisoient parties du fer ; qu'enfin quand on leur a donné le tems & les moïens d'agir sur ce metal & de s'y unir intimement, bien loin de servir à sa composition, ils ne servent qu'à sa destruction.

La partie huileuse dont j'ai supposé que le fer étoit composé, se manifeste par plusieurs experiences, & entr'autres, 1°. Par la promptitude avec laquelle il s'allume étant jetté en limaille sur la flamme d'une bougie. 2°. Parce que la vapeur sulphureuse qui s'élève de sa dissolution par les esprits acides, s'enflamme aisément & produit en même tems une fulmination violente, & quelquefois brûle un espace de tems assez considerable; enfin par l'odeur forte de soufre commun qu'on apperçoit dans la distillation, & après la distillation du vitriol naturel & du vitriol artificiel, & dans le tems qu'on pousse par un grand feu leurs colcotars & la rouille de fer. Cependant cette odeur ne prouve pas que le soufre commun, comme soufre commun entre dans la composition du fer : elle prouve seulement que le fer aïant été penetré par des acides qui lui sont étrangers, ces acides se sont unis intimement à sa partie huileuse, comme il sera expliqué dans la suite, & ont formé par cette union un soufre commun veritable qui se fait sentir en sortant par la force du feu, des pores de la partie terreuse du fer où il étoit contenu.

Il paroît par cette explication, & par les trois operations rapportées au commencement de ce Memoire, que les acides sont necessaires pour détacher les parties huileuses du fer, & pour en priver ensuite ce metal avec l'aide du feu. En effet, le feu seul peut bien enlever quelques-unes de celles qui tiennent le moins au fer ; mais pour les autres, il faut un intermede du moins pour les emporter en moins de tems & avec plus de facilité, & cet intermede doit être capable par sa nature de se faire jour dans le corps du fer, & de s'attacher si fortement aux parties huileuses qu'il y rencontre, qu'ils ne fassent plus ensemble qu'un même corps. Or les acides ont ces qualitez, & plusieurs experiences Chimiques font connoître qu'ils fer-

mentent aisément avec les huiles, & qu'après la fermentation il s'y unissent de maniere, qu'ils forment ensemble un troisieme corps, qui n'est ni si onctueux que l'huile, ni si piquant que l'acide, mais qui participe de la nature, & des effets de l'un & de l'autre.

La facilité que les huiles ont à fermenter & à s'unir avec les acides, me donne lieu de croire que le fer ne bouillonne & ne fermente avec eux que par sa partie huileuse penetrée par ces mêmes acides qui cherchent à se loger dans ses pores, & qui par les secousses reiterées qu'ils lui causent, la détachent insensiblement de la partie terreuse à laquelle elle étoit unie. Je prouve ce raisonnement par deux faits. 1°. Parce que j'ai fait voir que quand le fer a été autant privé qu'il le peut être de sa partie huileuse, il ne fait plus rien avec les acides, excepté avec un ou deux qui lui causent seulement une ébullition très-legere, que l'on peut encore attribuer avec beaucoup de vraisemblance à un reste de parties huileuses très-intimement engagées dans le corps de sa partie terreuse, & pour lesquelles il ne faut pas moins que des acides aussi fort & aussi propres à penetrer profondément ce metal. 2°. Parce que quand le fer n'a souffert qu'une perte mediocre de ses parties huileuses. Il fermente à proportion de cette perte moins qu'auparavant avec les acides, comme on le va voir par l'expérience suivante.

J'ai fait mettre en poudre du machefer, j'en ai emporté par plusieurs lotions ce qui pouvoit y être de crasse & de parties étrangères, & après l'avoir séché, j'ai passé dessus une lame d'acier aimantée, qu'en a enlevé avec beaucoup de facilité plusieurs grains; j'ai mis à part une bonne quantité de ces grains, & j'y ai versé differens acides, qui y ont tous sensiblement moins fermenté qu'avec les limailles de fer & d'acier. Cependant ces grains se réduisent en vitriol comme le fer ordinaire: mais ce qu'il y a de plus remarquable dans le machefer, c'est que l'esprit de nitre n'y fait pas le moindre effet, soit que le feu en ait enlevé des parties mercurielles dont l'esprit de nitre

est le dissolvant, soit parce que le feu en a chassé les parties huileuses les plus développées, qui sont peut-être les seules sur lesquelles l'esprit de nitre produit quelque effet. Il est à remarquer que la limaille de fer calcinée pendant quelques heures dans un creuset, est parfaitement semblable au machefer par les mêmes expériences.

Les parties huileuses qui se trouvent naturellement dans le fer, ne rendent pas seulement ce metal propre à fermenter avec les acides, elles servent encore à retenir ces acides dans les pores de la partie terreuse du fer, & sans elles les acides trouvant une trop grande capacité de pores, passeroient au travers sans s'y arrêter, & par conséquent sans y produire d'alteration bien sensible, comme les expériences faites sur le fer autant dépouillé qu'il a été possible de sa partie huileuse le prouvent suffisamment. La maniere dont je conçois que les parties huileuses du fer produisent cet effet, est que s'étant liées pendant la fermentation avec les acides, elles en augmentent assez le volume pour les rendre propres à remplir exactement la capacité des pores du fer, & pour les obliger à y rester.

De ce qui a été dit sur la maniere dont les acides s'engagent & s'arrêtent dans les pores du fer, on conçoit aisément pourquoi plusieurs liqueurs qui tirent facilement une teinture du fer ordinaire, ne tirent rien de celui qui a été privé de sa partie huileuse, & pourquoi le fer qui contient encore toutes ses parties huileuses, se rouille par les moindres acides, pendant que celui qui les a perduës ne reçoit pas la moindre alteration de ces acides, & même d'acides beaucoup plus forts.

Peut-être m'objectera-t'on sur ce que j'ai attribué la cause de la rouille à des acides, que le fer n'en a pas besoin pour se rouiller, puisqu'une liqueur purement aqueuse, ou du moins autant privée d'acides qu'elle le peut être, & versée de tems en tems dessus, suffit pour le réduire en rouille.

Je réponds que le fer après avoir été fondu & forgé, conserve toujours obstinément dans ses pores des matie-

res étrangères & salines, pour lesquelles il a encore besoin d'être purifié de nouveau par des alkalis fixes & volatiles, dont tout le monde sçait que le propre est d'absorber les acides. Jusques-là ces sels ne produisent aucun effet bien sensible sur le fer, faute d'être suffisamment délayez, ils bouchent seulement assez les pores de ce metal pour empêcher un peu le passage de la matiere magnetique; aussi voit-on que l'acier qui n'est qu'un fer autant pur & dégagé des parties étrangères en question qu'il le peut être, est beaucoup plus propre que le fer ordinaire pour les expériences magnetiques; il se rouille aussi beaucoup moins, ou parce qu'il contient déjà moins de parties étrangères, ou parce que ses pores étant plus ferrez, il s'y en loge moins aisément de nouvelles. Mais pour revenir au fer quand il a été humecté par une liqueur purement aqueuse, les sels que nous avons supposé s'être logez dans les pores étant détrampez, ils acquierent enfin assez de force pour s'unir intimement aux parties huileuses du fer, & pour le rouiller. On pourroit ajouter que comme les pores du fer sont fort ouverts, & qu'il y reçoit aisément toute sorte de sels, les acides de l'air peuvent encore s'engager dans les pores extérieurs, & étant humectez par une quantité suffisante de parties aqueuses, concourir avec les sels qui étoient déjà dans le fer à la rouille de ce metal. Les sels sont donc absolument nécessaire pour rouiller le fer, & en effet quand on veut faire de la rouille de fer plus parfaite que la précédente & en moins de tems, on n'a qu'à faire fondre un peu de sel dans l'eau dont on humecte ce metal.

Quand le fer a été réduit en vitriol, tous ses pores étant bouchés, la matiere magnetique n'y trouve plus de passage, & l'Aimant ne l'attire plus. Cependant on ne doit pas croire pour cela qu'il faille toujours que tous les pores du fer soient aussi parfaitement bouchés pour rendre ce metal tout-à-fait hors d'état de pouvoir être attiré par l'Aimant. Nous avons une preuve du contraire dans le colcotar, sur lequel l'Aimant ne produit pas plus d'effet

que sur le vitriol , quoiqu'il ait perdu dans la distillation une plus grande quantité d'acides qu'il ne lui en reste , & qu'il ait par conséquent un grand nombre de pores qui ne sont point dans le vitriol.

Le vitriol est un fer beaucoup plus chargé d'acides que n'est la rouille ; & comme les parties huileuses du fer ne s'en détachent qu'à proportion des acides qui s'y sont introduits , le feu en agissant dans nos trois premières opérations sur le vitriol & sur la rouille , a dû chasser des pores du fer réduit en vitriol plus d'acides , & en même tems plus de parties huileuses qu'il n'en a chassé de la rouille. Le fer rouillé conserve donc après l'action du feu plus de parties huileuses , que le fer réduit en vitriol ; c'est-pourquoi la matière restée après la calcination de la rouille , donne encore quelque teinture à de certains suc de végétaux , qui ne peuvent rien faire sur celle qui est venue du vitriol , comme il a déjà été remarqué.

Plus le fer a été privé de sa partie huileuse , plus il s'écrase & se brise ensuite facilement. A l'égard de celui qui n'a rien perdu , ou du moins qui n'en a pas perdu beaucoup , il s'applatit plutôt que de s'écraser. Cette différence vient de ce que les parties huileuses qui se trouvent abondamment dans ce dernier , lient étroitement ensemble ses parties terreuses , le rendent malleable , & en un mot lui conservent sa qualité de métal. Dans l'autre au contraire les parties terreuses manquant de cet intermède huileux propre à les unir ensemble , elles se séparent aisément les unes des autres.

Le petillement qui arrive quand on jette de la limaille de fer sur des charbons ardens ou dans la flamme d'une bougie , vient de ce que les parties huileuses , qui sont le moins attachées au corps du métal , se rarefient , s'enflamment , & sortent avec impetuosité des pores du fer. Le petillement est encore plus grand quand on se sert de limaille d'acier ; parce que ses parties huileuses étant plus dégagées des parties étrangères , elles s'enflamment plus puissamment , & trouvant plus de résistance dans leur sortie



rie, parce que les pores de l'acier sont plus petits que ceux du fer, elles font un plus grand bruit. Pour le fer qui a été dépouillé de sa partie huileuse, il n'est pas étonnant qu'il ne produise plus le même effet.

Jusqu'ici nous nous sommes suffisamment étendus sur la partie huileuse du fer, qui est celle qui appartient davantage à la Médecine. 1°. Parce que c'est elle qui rend le fer propre aux expériences Chimiques que nous avons faites sur ce métal; & en second lieu parce qu'il y a lieu de croire que c'est particulièrement par cette partie que le fer produit ses effets salutaires dans plusieurs maladies où il s'agit de subtiliser le sang, & de rompre les obstructions qui se sont formées dans les viscères.

Je viens présentement à la partie terreuse du fer, qui est la seule qui le rende propre aux expériences magnétiques. En effet, plus le fer a été privé de sa partie huileuse, plus la matière magnétique passe facilement & abondamment au travers de ses pores; & comme cette matière traverse avec plus de facilité & en plus grande abondance les pores du bon Aimant, que ceux du fer le plus dégagé des parties étrangères, ne pourroit-on pas conjecturer avec beaucoup de vraisemblance que la matière propre de l'Aiman est différente de celle du fer, parce qu'elle contient moins de parties huileuses; soit que dans sa première composition la matière huileuse ait été moins abondante que dans celle du fer; soit qu'elle ait perdu par la suite les parties huileuses qu'elle contenoit auparavant, de la même manière que le fer en a été privé par nos trois premières opérations. Ce qui semble encore confirmer cette conjecture, c'est que les expériences Chimiques que j'ai faites sur le fer dépouillé de sa partie huileuse, & que j'ai rapportées au commencement de ce Mémoire, sont parfaitement semblables aux mêmes expériences faites sur l'Aimant réduit en poudre.

Ainsi suivant notre supposition le fer aura d'abord été pénétré dans les entrailles de la terre par des acides, & ces acides s'étant unis intimement à sa partie huileuse, ils

seront ensuite sortis avec elle, soit par la simple chaleur de la terre, soit par la violence de quelques feux souterrains ; & enfin les pores de la partie terreuse de ce métal étant devenus par ce moyen plus ouverts qu'ils n'étoient auparavant, le courant de matiere magnetique qui coule continuellement par les pores de la terre, trouvant un nouveau corps dans son chemin qui lui offre un passage très-libre, il aura continué à y couler, & aura dirigé de maniere ses pores, qu'il sera ensuite devenu propre à produire tous les effets magnetiques que nous remarquons dans l'Aimant.

Peut-être m'opposera-t-on que si le fer n'étoit sujet à l'action de la matiere magnetique que par sa partie terreuse, toute terre pourroit produire le même effet, ce qui est faux.

Je réponds qu'une matiere terreuse peut être différente de toute autre matiere terreuse par la figure & la grandeur de ses pores, & que les parties huileuses qui dans la formation du fer se sont unies intimement à sa matiere terreuse, ont pu mouler de maniere ses pores, qu'ils sont ensuite devenus propres à admettre & à laisser passer librement la matiere magnetique.

Peut-être m'objectera-t-on encore, que si le fer dont nous avons enlevé presque toute la partie huileuse, étoit si semblable par sa nature à la matiere propre de l'Aimant, il auroit comme l'Aimant la qualité d'attirer.

Je réponds que pour que l'Aimant attire, il ne suffit pas que sa matiere propre ait une très-grande facilité à recevoir dans ses pores la matiere magnetique ; il faut encore 1°. Que les parties integrantes de l'Aimant soient arrangées d'une certaine maniere les unes par rapport aux autres, pour donner deux poles à toute la masse. 2°. Que ce corps ait fait une provision de matiere magnetique suffisante pour former autour un tourbillon ; & l'on va voir que sans ces deux circonstances la matiere la plus propre à faire de bon Aimant ne feroit jamais un corps qui attirât.

Quand on présente un Aimant très-fort à un autre qui ne l'est pas tant, aussi-tôt l'on remarque pour l'ordinaire que ce dernier n'attire presque plus ; parce que le tourbillon du meilleur Aimant rencontrant un tourbillon plus foible qui s'oppose à son mouvement, il est obligé pour continuer sa route de le rompre & de l'enfoncer, & la plus grande partie de la matiere du moindre tourbillon ne pouvant plus suivre son cours ordinaire, elle se laisse entraîner par le courant du plus fort tourbillon, & elle abandonne d'autant plus volontiers l'Aimant à qui elle appartenait auparavant, que les pores de celui à qui elle s'est nouvellement attachée, lui offrent apparemment un passage plus libre, & par conséquent plus facile. Cette premiere observation nous prouve que quoiqu'il ne manque rien à l'Aimant, & du côté de la matiere propre, & du côté de l'arrangement des parties integrantes, il peut cependant faute d'une assez grande quantité de matiere magnetique, ne faire rien ou presque plus rien de ce qu'il faisoit auparavant.

Quand on laisse quelque tems sur le feu un morceau d'Aimant, ou qu'on le presente aux rayons du Soleil réunis par le miroir ardent, sans y laisser assez de tems pour qu'il s'y vitrifie, il devient incapable d'attirer ; peut-être que dans l'un & dans l'autre de ces cas, la matiere de la lumiere sans détruire la matiere propre de l'Aimant, en chasse d'abord la matiere magnetique, & ensuite divise & déplace assez quelques-unes de ses parties interieures, pour changer l'œconomie & la direction des pores de toutes la masse, & pour empêcher que la matiere magnetique ne puisse penetrer facilement d'un pole à l'autre. Peut-être aussi que la matiere de la lumiere entraîne avec elle, & laisse dans les especes de tuyaux qui aboutissent aux deux poles de l'Aimant, des particules, qui quoique d'un volume peu considerable, sont néanmoins capables de former obstruction dans quelque endroit de ces toiaux, & d'interrompre par-là la circulation de la matiere magnetique. L'Aimant qui a perdu sa vertu d'attirer par le

feu ordinaire ou par le Soleil, étant réduit en poudre, est attiré avec autant de facilité par une lame d'acier aimantée, que la poudre du meilleur Aimant, & l'une & l'autre poudre par les expériences Chimiques, dont il a été parlé, se ressemblent parfaitement. Cette seconde observation nous fait voir que sans que la matière propre de l'Aimant ait reçu d'alteration sensible, le moindre changement dans l'arrangement de ses parties integrantes & dans la direction de ses pores suffit pour détruire les poles, & par conséquent pour le mettre hors d'état d'attirer.

Enfin le meilleur Aimant réduit en poudre n'attire plus ni par toute sa masse, ni par chacune de ses parties. Il n'attire plus par toute sa masse, parce que les pores de chaque grain dont il étoit composé ne se trouvent plus tournés dans le sens & la direction nécessaires les uns par rapport aux autres, pour donner passage au courant de matière magnétique qui formoit auparavant un tourbillon autour de toute la masse de cet Aimant. La poudre d'Aimant est à la vûe assez semblable à la limaille de fer ou d'acier; elle est seulement attirée avec plus de facilité que cette limaille par une lame d'acier aimantée: mais quand la lame n'a point été aimantée, elle ne fait pas plus d'effet sur la poudre d'Aimant que sur la limaille; ce qui est aisé à concevoir dès qu'on fait attention qu'il ne se fait point de tourbillon magnétique autour de chaque grain de cette poudre. En effet pour qu'il s'y fit un tourbillon, il faudroit que la matière magnétique contenuë dans chacun de ces grains, pût en sortant par un pôle surmonter la résistance de l'air extérieur, & l'écarter continuellement pour revenir jusqu'à l'autre pôle. Or cette matière n'est ni assez abondante, ni assez forte pour cela; car les pores de chacun de ces grains n'étant pas assez longs, la matière magnétique qui fait effort pour sortir, n'est pas poussée & soutenue par derrière par une assez grande quantité d'autre matière magnétique.

Cette troisième observation faite sur toute la masse d'un Aimant réduit en poudre, & sur chaque grain de

cette masse, nous prouve que le corps le plus propre à recevoir la matiere magnetique dans ses pores, & par consequent à faire de bon Aimant, peut ne point attirer, ou parce qu'il n'a pas l'arragement de parties necessaire pour cet effet, ce qui avoit déjà été prouvé par la seconde observation, ou parce qu'étant d'un volume trop peu considerable, il ne peut amasser assez de matiere magnetique dans ses pores pour former autour un tourbillon; & ainsi quoique le fer privé de sa partie huileuse de la maniere que nous l'avons marqué n'attire point, il peut cependant passer pour la matiere la plus propre à faire de bon Aimant, & pour celle dont vrai-semblablement la nature se sert dans la production des Aimants naturels.

Cependant on peut faire un Aimant artificiel avec le fer, en lui donnant deux poles, & autant de matiere magnetique qu'il lui en faut pour produire les effets de l'Aimant; mais cet Aimant n'a pas grande force, parce que la quantité de parties étrangères qu'il contient dans ses pores l'empêche d'y recevoir beaucoup de matiere magnetique, & interrompt si fort la direction des pores de toute la masse, que le peu de matiere magnetique qu'il y a amassée ne continué qu'avec beaucoup de peine sa route d'un pole à l'autre de cet Aimant. Il ne conserve aussi sa qualité d'attirer que fort peu de tems, parce que le tourbillon de cet Aimant étant déjà assez foible, pour peu qu'il perde ensuite des parties magnetiques qui le composent, il ne lui reste plus assez de force pour pouvoir se soutenir. L'acier est bien plus propre que le fer pour faire de l'Aimant artificiel, parce que ses pores étant beaucoup plus dégagés de parties étrangères, la matiere magnetique y passe fort aisément & fort abondamment, & qu'elle forme par consequent un tourbillon assez fort pour pouvoir se soutenir une espace de tems très-considerable. D'ailleurs la rouille ne se mettant pas à beaucoup près si aisément ni si promptement dans l'acier que dans le fer, comme il a été expliqué, la matiere magnetique qui a une fois commencé à circuler au travers de l'acier, peut

y continuer plusieurs années sa circulation sans trouver d'obstacles dans ses pores , ou du moins sans y en trouver d'assez puissans pour interrompre son tourbillon. Aussi M. Joblot se sert-il d'acier pour faire différentes sortes d'Aimans artificiels , qui produisent avec beaucoup de force tous les effets magnetiques qu'on peut exécuter avec les meilleurs Aimans : mais quelque force que l'art & l'industrie particulieres de M. Joblot puissent donner à ses Aimans artificiels faits avec l'acier , il ne les rendra jamais aussi forts & d'une aussi longue durée que nos bons Aimans naturels ; ce que je n'attribue pas seulement à l'arrangement plus parfait de leurs parties integrantes , & à l'abondance de la matiere magnetique que ces Aimans naturels ont reçu en premier lieu de la terre , qui est le premier de tous les Aimans , mais encore à leur matiere propre , qui étant vrai-semblablement moins chargée de parties huileuses , est moins sujette à s'alterer , & plus disposée à recevoir la matiere magnetique.

À l'égard de la rouille qui survient au fer , comme elle est un obstacle puissant au passage de la matiere magnetique , & qu'elle en peut être un fort considerable à la conservation des Aimans artificiels faits avec l'acier ; il est évident que le fer rouillé n'est point une matiere propre pour faire de l'Aimant. La rouille est seulement un état moïen par laquelle le fer passe quelquefois avant que de devenir Aimant naturel ; & il le devient quand les acides de la rouille sont sortis de leurs prisons , & ont enlevé avec eux les parties huileuses auxquels ils s'étoient unis , comme on va le prouver incessamment.

Ce n'est pas seulement dans les entrailles de la terre qu'il y a lieu de croire que le fer se convertit en Aimant en perdant d'abord ses parties huileuses , & ensuite en recevant autant de matiere magnetique qu'il lui en faut pour devenir Aimant , comme il a déjà été dit. Cette metamorphose naturelle se passe encore à l'air de la même maniere ; entr'autres preuves nous avons celle d'une des barres du Clocher de Chartres , que je cite ici par préfe-

rence, parce que j'en ai eu un morceau que j'ai fort examiné, & qui par les épreuves Chimiques dont il a déjà été parlé, ne m'a point paru differer de l'Aimant ordinaire, & du fer que j'ai privé de sa partie huileuse; le fer est devenu Aimant en cette occasion. 1°. Parce qu'il s'est fortement rouillé. 2°. Parce que la chaleur du Soleil en a ensuite insensiblement dégagé la plus grande partie non-seulement des acides de la rouille, mais encore des parties huileuses du metal qui tenoient à ces acides; ce qui a rendu les pores de cette barre plus ouverts & plus propres à recevoir la matiere magnetique; & comme cette barre n'a point été réduite en poudre, la matiere magnetique qui de jour en jour y passoit avec plus de facilité, s'est enfin trouvée assez abondante dans ses pores pour pouvoir en sortant surmonter la resistance de l'air environnant, & former autour de cette barre un tourbillon.

J'ai dit que la chaleur du Soleil n'avoit enlevé que la plus grande partie des acides de cette barre rouillée. En effet, on voit encore dans le morceau que j'en ai des vestiges de rouille, & je sçai qu'il y a d'autres morceaux de cette même barre qui sont bien plus rouillés. Ce qui me fait croire que si elle eût pû resister plus long-tems en situation, le Soleil auroit achevé ce qu'il avoit commencé; & il l'auroit si bien dérouillée qu'elle attireroit infiniment davantage qu'elle ne fait. La maniere dont cette espece d'Aimant extraordinaire s'est produit, se rapporte parfaitement avec celle dont nous avons jugé que l'Aimant ordinaire se formoit dans la terre; ce qui nous donne un grand préjugé en faveur de notre hypothese sur la formation de la matiere la plus propre à faire de l'Aimant. Cependant comme cette matiere merite d'être examinée avec toute l'attention possible, je vais encore faire sur le même sujet plusieurs experiences nouvelles, dont je rendrai compte ensuite à la Compagnie.

## S U P P L E M E N T

## A U M E M O I R E

## S U R L A V O I X E T S U R L E S T O N S .

P A R M. D O D A R T .

## P R E M I E R E P A R T I E .

1706.  
24 Avril.C'étoit une  
assemblée  
publique ,  
où les Me-  
moires sont  
bornés à de-  
mi-heu: c.

**J**E lus dans l'Assemblée publique du 13 Novembre de 1700, un Memoire sur la voix de l'homme & sur les differens tons de la voix. Ce Memoire fait partie de l'Histoire de l'Academie de la même année qu'on a donnée au Public. Depuis ce tems-là il m'est venu dans l'esprit de suppléer à ce Memoire plusieurs choses qui m'ont paru importantes , parce qu'elles vont à éclaircir , à étendre & à confirmer la verité Physique , & même à donner à la Theologie naturelle plusieurs nouvelles preuves de l'imitable mecanique du Createur en ce qui regarde les tons de la voix. Tout cela compose XIII ou XIV Articles. je ne lirai dans cette Assemblée que les 3 premiers , & j'en demeurerai là pour ne pas fatiguer l'Auditoire par une trop longue attention. On pourra voir dans la suite de ce Memoire l'utilité de cette theorie pour la Musique pratique , & même pour la Medecine , en ce qui regarde les exercices de la voix par rapport à la voix même & à la liberté de la respiration. Les anciens Medecins Grecs & Latins ont fait un très-grand usage de ces exercices pour la conservation & pour le rétablissement de la santé , pour l'augmentation de la force des parties de la respiration , & pour la cure même de quelques maladies.

## ARTICLE I.



ARTICLE I.

*Quelle est la cause de la difference de la voix Pleine  
& de la voix de Fausset.*

J'ay long-tems cherché d'où peut dépendre la différence que l'on trouve entre le Son, le Ton, & la force de la voix Pleine & celui de la Fausse voix vulgairement nommée *Fausset*. Cette difference consiste en ce que le Ton & le Son du Fausset est autre que celui de la voix Pleine, & que la voix Pleine a plus de force que le Fausset. Il y a donc 3 differences entre ces 2 voix, le Son, le Ton & la Force. Cette difference m'a paru d'autant plus considerable, sur tout en ce qui regarde le Ton, que c'est une merveille naturelle ajoutée à toutes les autres qui ont été exposées & expliquées dans le Memoire sur les Tons. Car c'est une voix étrangere entrée sur la voix naturelle, pour en multiplier l'étendue au-delà des bornes naturelles de la voix; de sorte qu'il s'ensuit delà un nouveau pied de multiplication beaucoup plus merveilleux que celui que j'ay exposé dans le premier Memoire, quoique celui-là allât à beaucoup plus de 9000 parties proportionnelles dans un intervalle de moins d'une ligne. Cette difference de voix m'a donc paru très-digne de consideration en Physique & par rapport à la Theologie naturelle, comme il sera dit cy-après, & surtout en ce qui regarde le Ton. Or voici ce qui me paroît de plus raisonnable dans tout ce que j'ay pensé sur ce sujet. Toute voix de Fausset commence après le Ton où finit, en montant, l'étendue naturelle de la voix Pleine de la même personne. Cette Fausse voix n'ajoute ordinairement à l'étendue de la voix naturelle & pleine, qu'un, deux ou trois Tons au plus, & cette voix a ordinairement quelque chose de forcé. Mais il y a des Fausssets d'une grande étendue & d'un Son fort agreable. Tel étoit celui d'un Chantre fameux nommé le Gros, que j'ay plusieurs fois ouï avec admiration durant ma jeunesse. Sa voix naturelle alloit jusqu'au plus bas de

Le mot *Ton* signifie dans ce Memoire tantôt un intervalle Musical entre un son & un autre son, tantôt une difference entre un son & un autre son plus grave, ou plus aigu, quelque intervalle qu'il y ait de l'un à l'autre. Le sens du discours en determinera aisément la signification.

la haute taille, & son Fausset montoit aussi haut que le second dessus. C'étoit donc un second dessus enté sur une haute taille, & partout d'un Son très-agréable; de sorte que quand ce Musicien chantoit de toute l'étendue de ces trois parties, on auroit dit que c'étoit une haute taille d'intelligence avec une haute contre & un second dessus, pour se succéder les uns aux autres dans l'exécution d'un seul chant de l'étendue de ces 3 parties. Quoique sa voix fut belle partout, on s'appercevoit de la différence de ces deux voix. Il avoit une octave d'étendue de cette fausse voix. J'en connois un d'une plus grande étendue. Il a douze tons, il en sera parlé cy-après.

Voici d'où je crois que cette espece de voix dépend. Il a été dit dans le Memoire sur la voix, que la voix résonne dans un double canal extérieur, la bouche qui fait le canal inférieur, & le nez que j'appelle canal supérieur. Il a de plus été dit & prouvé dans ce Memoire, que ce qu'il y a de plus agréable dans le raisonnement de la voix vient du canal supérieur, c'est-à-dire du nez, & que le résonnement de la bouche seule est très-désagréable, s'il n'est accompagné du résonnement des narines. Cela supposé prouvé, je dis que la voix qui résonne également dans l'un & l'autre canal extérieur, est la voix Pleine: celle qui résonne plus dans le canal supérieur & moins dans le canal inférieur, est la voix de Fausset. En voici la raison.

Le Fausset ne commence ordinairement qu'au dessus de l'étendue naturelle de la voix pleine dans un âge fait. C'est donc une voix forcée au-delà de son étendue naturelle. Or tous ces Tons forcés s'exécutent presque en tous ceux qui ont cette Fausse voix, la tête haussée & même renversée en arrière, pour donner plus de jeu aux muscles suspenseurs du larynx, qui s'élève alors inévitablement de plus en plus pour accourir le double canal extérieur, selon les principes posés dans le Memoire sur la voix. D'où il s'ensuit qu'en cet état le Son de la voix jetté par la glotte étreinte outre mesure, & approchée du canal supérieur, enfle plus naturellement ce canal que l'inférieur, parce-

que le supérieur en cette attitude & par cette approche se trouve moins écarté qu'auparavant de la ligne du courant de l'air vocal. Ce courant porte donc presque tout le Son de la voix au canal supérieur. Voilà pour le Son de cette espèce de voix. Voici pour la diminution de la force.

Tout Fausset est une voix forcée au-dessus de son Ton naturel ; de sorte que c'est l'effet de la glotte d'un homme fait, réduite aux dimensions de la glotte d'un enfant de 10 à 12 ans. Or la différence de ces deux âges à l'égard de la glotte, n'est pas seulement la différence du petit diamètre ; c'est encore & beaucoup plus la différence du grand diamètre. Ces deux diamètres sont toujours beaucoup plus grands dans un homme fait, qu'ils n'étoient dans le même homme quand il étoit encore enfant. Cela étant, lorsque cet homme fait après avoir mûé dans l'âge de puberté, veut rappeler les Tons qu'il a perdus pour l'accroissement de sa glotte, il faut ou qu'il lui rende ses dimensions en longueur & largeur, ou qu'il supplée à la longueur qui est alors inévitablement & invariablement augmentée par une plus grande diminution de la largeur. Il ne peut accourcir sa glotte, car les points de concours des deux lèvres tant en avant qu'en arrière sont fixes. Cette dimension est donc invariable. Il faut donc qu'il supplée à cette augmentation invariable de dimension par serrer sa glotte pour les Tons du dessus, plus qu'il ne faisoit étant enfant pour produire les mêmes Tons. Car chaque Ton dépend de la quantité & de la vitesse de l'air sonnant, comme il sera dit & prouvé dans la seconde Partie de ce Supplément.

De tout cela s'ensuivent toutes les propriétés qui distinguent le Fausset de la voix Pleine. La différence du Ton résulte du seul fait ; car ce fait consiste à dire qu'il n'y a de voix de Fausset qu'au dessus de l'étendue naturelle de la voix en haussant. Si on demande pourquoi il y a une fausse voix au-dessus de cette étendue en haussant, & jamais au-dessous en descendant ; il n'y a qu'à répondre que c'est parce qu'une glotte dilatée outre mesure n'est plus en état

de jeter le Son de voix, & n'est plus en état que de dégénérer en une espèce de ralement. La différence du Son est l'effet de l'inégalité du partage entre les deux canaux : la foiblesse du Fauſſet en comparaison de la voix Pleine, vient de l'excessive diminution du petit diamètre de la glotte, qui en cet état ne peut plus jeter qu'une lame d'air très-mince. Il faut pourtant avouer qu'il y a au moins une exception à faire dans la théorie de cette différence de la voix naturelle & du Fauſſet. Car dans le Fauſſet extraordinaire que j'ay annoncé cy-dessus de l'étendue de douze Tons, les 3 plus bas concourent avec les 3 plus hauts de la voix Pleine. Mais ces 3 Tons ne sont voix de Fauſſet que par le seul affoiblissement du Son naturel ménagé. Ce n'est donc qu'un Fauſſet apparent dans les Tons les plus bas. Mais dans les plus hauts dont le dernier est le *b*, *fa*, d'en haut (c'est-à-dire la pénultième marche du clavier) c'est un vrai Fauſſet, & le Son de cette voix dans ces Tons est si éclatant qu'il peut soutenir la partie de dessus contre toutes les basses d'un grand chœur de Musique. C'est pourtant dans ce Ton & dans plus d'une octave entière au-dessous du vrai Fauſſet, & cependant ce Ton si élevé qu'à peine les dessus les plus naturels peuvent y atteindre en haut, se produit sans hausser ni renverser la tête. Tout cela semble fort opposé à la théorie cy-dessus. Il est vrai que ces deux circonstances, l'une de l'attitude du Chantre, l'autre de la force du Son, sont si rares dans les Fauſſets, qu'à peine en trouveroit-on un autre exemple en tout un siècle. Mais quand il n'y auroit jamais eu qu'un exemple, & quand on seroit assuré qu'il n'y en aura jamais d'autre, ce seul exemple suffiroit pour renverser toute la théorie cy-dessus. Il faut donc voir si on peut concilier ensemble la théorie & l'exemple. Ces deux circonstances bien examinées n'ont rien d'incompatible avec la théorie de cette différence de voix, ni pour la force du Son, ni pour l'attitude du Chantre, dans la production de l'espèce du Son dans ces Tons si élevés. Car pour l'attitude, le Musicien dont il s'agit ayant bien

voulu entonner ces Tons du haut dessus en ma presence à gorge nuë, je me suis apperçû que le larynx montoit plus haut qu'à l'ordinaire sans y employer l'attitude ordinaire en renversant la tête, & il s'élevoit si haut sans cette attitude, qu'il imprimoit une fosse au-dessous de la gorge du Chantre, comme pour s'approcher du canal superieur, suppléant au défaut de l'attitude par cette approche extraordinaire causée par la force des muscles éleveurs, & faisant par cet effet ce que les autres Chantres de cette espece empruntent des muscles flechisseurs de la tête en arriere pour approcher la glotte du canal superieur. Voilà pour l'attitude de ce Chantre à l'égard des Tons de sa Fausse voix.

Quant à la force si extraordinaire de la même voix dans les Tons d'*a*, *mi*, *la* & *b*, *fa*, *si* du haut du clavier, si les principes de la voix sont bien posés dans le Memoire du 13 Novembre 1700, la force vient de l'ouverture extraordinaire de la glotte dans cette espece de Fausset, & le Ton de l'extraordinaire vitesse de l'air poussé pour la production de ces Tons par cette ouverture, & de l'extraordinaire contention des levres de la glotte pour contrebander les dilateurs du larynx, & produire les vibrations proportionnées à ces Tons. Et c'est en effet ce qui arrive jusqu'à un certain point dans les flutes ordinaires, mais surtout dans la flute Allemande, qui hausse de Ton sur chaque trou suivant la force dont on pousse le vent; de sorte que du foible au fort on peut monter de Ton de tout l'intervalle d'une octave & des autres accords qu'elle contient, & cela, par la même ouverture & sur le même trou.

Cette explication d'un cas si singulier est d'autant plus probable, que les Tons dont il s'agit sont dans le sujet en question l'effet d'un très-grand effort dont on s'apperçoit à la vûe, quoique l'oreille ne s'en apperçoive pas dans le concert. Mais ce n'est pas la seule merveille Physique que j'ay observée en cette voix, dont j'auray encore occasion de parler dans la seconde Partie de ce Supplément. Voilà

ce que j'avois à dire pour expliquer les cause de la premiere difference de voix distinguée en voix Pleine ou Naturelle & Faussé voix , vulgairement nommé *Fausset*.

Après avoir expliqué la Faussé voix , il faut tâcher d'expliquer la voix Faussé. C'est-à-dire ,

## ARTICLE II.

*Quelle est la cause de la difference de la voix Juste  
& de la voix Faussé ?*

Il y a bien de la difference entre *Fausse voix* & *voix Faussé*. La seule connoissance de la langue suffiroit pour faire cette distinction : mais il n'y a pas d'inconvenient d'avertir icy que la voix Faussé est celle qui n'entonne presque jamais précisément au Ton qu'elle devrait par rapport à celui qui précède, & à ceux qui suivent dans l'exécution de quelque chant que ce soit.

Chacun sçait que la voix dépend del'oreille, ou plutôt du sens de l'ouïe , non comme d'une cause principale ; mais comme d'une cause sans laquelle les causes principales & prochaines de la voix sont privées de leur effet. On sçait encore que la justesse de la voix dépend de la justesse de l'oreille. Mais cependant il faut avouer aussi que l'oreille la plus juste , mal servie par des organes mal constitués pour la justesse de la voix , n'en tirera que des Tons faux. Je connois un homme de consideration , fort sçavant en Musique , qui compose bien , & qui fait bien executer sa composition : mais il executeroit fort mal sa partie s'il vouloit s'en mêler. C'est de la cause de cette espece de voix Faussé par le défaut des organes de la voix qu'il s'agit icy , & non de celle qui n'est faussé que par le vice de l'organe de l'ouïe.

La cause de la voix Faussé par le vice de son propre organe , doit résulter surtout du principe de la voix de l'homme , tel qu'il a été posé dans le Memoire sur la voix. Car si les deux levres de la glotte sont également capables de se bander également ; si les esprits s'y distribuent éga-

lement, la voix doit être juste ; mais s'il y a dans les levres de la glotte chacune en particulier ou entr'elles de l'inégalité en quelques-unes de ces circonstances ou en toutes, la voix doit être fausse à proportion, comme le Son d'une corde de Luth est faux quand la corde est fausse, c'est à-dire inégal à elle-même en quelques-unes de ces parties, ou mal accordée avec celle du même rang à l'unisson. Ce n'est pas que les deux levres soient capables de sonner par elles-mêmes ; mais elles sont capables de fremir, & ce fremissement est la cause formelle du Son, & le Son ne sçau-roit être juste qu'autant que le fremissement est égal à lui-même en chaque levre & entre les deux levres de la glotte. Or l'égalité du fremissement dépend de l'uniformité de chaque levre en toute son étendue ; & de toutes deux entr'elles à l'égard des circonstances exprimées cy-dessus, c'est-à-dire, tension, diamètre, distribution d'esprits, &c.

### ARTICLE III.

*Des causes de la difference entre la voix de la Parole  
& la voix du Chant.*

La voix de la Parole est tres-differente de celle du Chant dans la même personne. En voici les preuves.

On voit souvent des personnes qui ont la voix belle pour le Chant, & qui ne l'ont pas agreable pour la Parole. Toute la Cour en a vû un exemple surprenant en la personne d'un Seigneur decedé depuis environ 4 ans : & réciproquement on connoît des voix agreables pour la Parole, qui n'ont pas un Son agreable pour le Chant. Il faut donc qu'au moins dans ces personnes l'ouverture de la glotte soit autrement constituée dans la Parole que dans le Chant.

On distingue les personnes sans les voir au seul Son de la voix de la Parole. Les brutes domestiques ne s'y méprennent pas. On peut aussi distinguer les personnes au seul Son de leur voix de Chant, mais avec beaucoup plus de difficulté. Il y a donc au moins beaucoup d'apparence

qu'il y a une difference sensible entre le Son de la voix de la Parole & celui de la voix de Chant, même entonné sur le Ton de la Parole. La question est de trouver la cause de la difference de ces deux voix, & de dire en quoi elle consiste.

Les longues tenuës sur une même note dans la Musique peuvent servir à cette découverte. C'est à cette occasion que je me suis apperçû dans la voix de Chant d'une certaine ondulation qui n'est pas dans la voix de la Parole. Cette ondulation est assez semblable aux vibrations qu'on remarqueroit dans un poids suspendu au milieu d'une corde bandée horizontalement, si aiant tiré ce poids en embas ou en enhaut, on l'abandonnoit au ressort de cette corde bandée. Car alors ce poids auroit un branle haut & bas, plus ou moins pressé selon que la corde seroit plus courte ou plus longue, plus ou moins bandée. Tout le monde ne s'apperçoit pas de cette espece de branle flottant dans les belles voix, qui supposent un degré de force suffisant pour donner lieu à la cause de la difference du Son de la voix de Chant & de la voix de Parole par une ondulation modérée & soutenüe: mais tout le monde s'en apperçoit dans les voix de Chant foibles & naturellement tremblantes. On voit bien que je ne parle pas du tremblement des cadences, puisque ces tremblemens sont composés de l'intervalle d'un Ton ou d'un demi Ton, ce qui ne se trouve pas dans l'ondulation dont je parle.

Je dis donc que ces voix naturellement tremblantes dans le Chant, ne sont pas toujours tremblantes pour la Parole. En voici la raison. Tout tremblement involontaire vient de foiblesse. Il doit donc paroître dans tous les mouvemens volontaires qui exigent plus de force qu'il n'y en a dans l'organe du mouvement, & le tremblement ne doit point paroître dans les mouvemens qui sont proportionnez à la force. La voix de la parole ne tremble pas ordinairement dans ceux qui ont la voix de Chant tremblante. Il y a donc apparence que la voix de Chant exige plus de force que la voix de la Parole, même dans le Ton de



de la Parole. Ce qui est tremblement par foiblesse involontaire dans la voix de Chant naturellement tremblante, cela même est cette espece de flottement volontaire & soutenu, dans le Son de la voix de Chant en ceux qui ont la voix agreable. Mais dans le Chant tremblant c'est une chute pesante & frequente, & dans le Chant agreable c'est comme une espece de vol, aisé, temperé, & soutenu. D'où je me persuade qu'il s'ensuit que la difference du Son de la voix de la Parole & de la voix de Chant dans ceux-cy, vient de la difference qu'il y a entre le larynx assis sur ses attaches en repos pour la voix de Parole, & le larynx suspendu sur ses attaches en action, par une espece de balancement volontaire qui s'ensuit, sans qu'on y fasse reflexion de la seule volonté de passer de la voix de la Parole à celle du Chant sur le ton de la Parole. J'ajoute sur le Ton de la Parole, afin qu'on ait pas lieu d'attribuer au changement de ton, ce qui n'est que l'effet du changement de son.

J'ay dit que cette difference consiste en ce que la voix de Chant s'exécute par la glotte dans un larynx suspendu & en mouvement de haut en bas & de bas en haut sur ses muscles suspenseurs, & la voix de la Parole dans un larynx assis sur les mêmes attaches en repos. La voix, soit de la Parole, soit du Chant, est toute entiere de la glotte dans le Son & dans le Ton : mais l'ondulation qui en fait la difference n'est ni du Son, ni du Ton, ni de la glotte, mais du larynx entier. Cette ondulation paroît dans le son, mais comme circonstance du Son, & non comme partie du son. En un mot elle n'est dans le son, que parceque la partie sonante, c'est à dire la glotte, est portée dans un canal flottant, c'est à dire dans le larynx. On voit quelque chose de semblable dans le tremblant de l'Orgue, qui ne change rien au Ton de chaque tuyau, & qui ne peut avoir été inventé que pour imiter la voix du Chant par cette circonstance ; ce qu'il ne fait pourtant que fort imparfaitement. La glotte ne fait donc rien à cette circonstance du son ; car tous les mouvemens de la glotte

sont de ferrer plus ou moins : or ces mouvemens feroient differens Tons. Les doigts de la main gauche des joüeurs de Luth, de Theorbe & de Viole pratiquent quelque chose de semblable à ces vibrations du larynx haut & bas toutes les fois qu'ils veulent embellir leur jeu en imitant la voix. Tous ces Instrumens ont leur manche divisé par des touches. Or quand le joüeur d'instrument veut imiter la voix, il soutient de la main gauche le son de la corde frappée ou pincée de la droite. Pour cet effet il agit haut & bas entre deux touches le doigt de la gauche qui presse sur le manche la corde pincée, & il soutient par ce mouvement alternatif un Son continué, ondoïant sur le Ton de cet entre-touche. Ce Son est fort agreable, & imite fort bien un port de voix. Or un des agrémens de ce Son est l'ondulation, qui ne vient que de ce que le doigt de la main gauche, agité haut & bas, presse de moins en moins la corde contre la touche, quand il glisse de bas en haut ; & la presse de plus en plus quand il glisse de haut en bas ; d'où il arrive que la touche donnant le ton, il demeure le même quant au jugement du sens, quoiqu'il ne soit pas le même mathématiquement parlant : mais paroissant le même, il est sensiblement varié, & par-là rendu plus agreable.

Mais d'où vient la difference qui se trouve entre ces deux voix, en ce qui regarde non-seulement cette circonstance du son, mais le son même dans ceux en qui la voix de la Parole n'est pas agreable, & en qui la voix de Chant est belle ? C'est une autre question. Mais comme cette question suit naturellement la premiere instance, par laquelle j'ay insinué que ces deux voix sont differentes dans la même personne ; je veux bien faire plus que je ne m'étois proposé, & tâcher de resoudre encore cette question. La solution dépend du principe d'une autre circonstance de la voix de Chant ; car elle est non-seulement ondoïante, ce que la voix de la Parole n'est pas, mais elle est encore plus sonante que celle de la Parole. En voici la raison, si je ne me trompe.

Il est ordinaire lorsque plusieurs mouvemens concourent à la même action , quoique differemment , que dès que l'action est commandée tous les mouvemens concurrens s'executent , & qu'ils s'executent avec plus de force quand l'action est plus difficile & demande plus d'attention. Telle est l'action du Chant à l'égard de celle de la Parole. Ainsi dès que les muscles suspenfeurs du larynx sont , pour ainfi dire , avertis d'entrer en action par le Chant , les dilateurs du larynx entrent dans celle qui leur convient pour contre-bander la glotte , les dilateurs de la glotte entrent en mouvement pour la dilater , & les cordons tendineux de la glotte avertis par le seul contraste de leur état naturel , commencent à se bander pour soutenir le ton de la Parole entonné en Chant. De tout cela resulte un son plus net que celui de la Parole. Car la voix de la Parole dans les Tons qui lui conviennent est plus négligée que celle du Chant ; & quoique le Ton soit supposé le même , & par consequent l'ouverture la même pour les dimensions , les parties qui lui donnent ces dimensions ne sont plus au même état , étant les unes contre les autres dans un contraste plus marqué. Voilà pour ceux en qui la voix de la Parole est desagréable , & qui ne laissent pas de chanter agréablement. Pour les autres il n'est pas difficile d'imaginer qu'un contraste immodéré peut produire un Son desagréable , comme j'ay observé en quelques personnes dont la voix du Chant prend un son de canard ou de cornet , ou devient rude ou tremblante , quoiqu'elle soit plus agréable dans la conversation.

Tout cela fait voir une action plus marquée dans la voix de Chant , que dans la voix de la Parole. Et cela se confirme en ce qu'une longue conversation hausse le Ton de la voix à mesure que la conversation s'anime , au lieu qu'un Chant soutenu long-tems sur le même ton baisse presque inévitablement , comme on voit dans tous les Chœurs de plein Chant , qui ne sont soutenus d'aucun instrument de Musique ; car on est obligé pour cette rai-

son à remonter le ton à la fin des longs Pseaumes ; cette précaution étant nécessaire pour empêcher que le ton baissant de plus en plus, la plupart du Chœur ne fût obligée ou de se taire avant la fin de l'Office, ou de prendre l'octave en haut dans les tons les plus bas de chaque verset. Or tout cela ne vient que de la grande action qui accompagne le Chant dans toutes les circonstances qui le rendent différent de la Parole. Et comme cette action si marquée & si composée a été excitée à l'occasion du mouvement imperceptible de la glotte pour entonner, qui a donné le branle à tous les autres mouvemens beaucoup plus considérables : tous ces mouvemens pris ensemble laissant toute la region vocale, le relâchement des autres parties donne à son tour occasion à la glotte de se relâcher comme les autres parties, quoique ce soit celle qui travaille le moins dans le plein Chant ; & c'est de ce relâchement que vient le baïssement du ton.

Voilà pour le Son de ces deux différentes sortes de voix, & sur la cause probable de leurs différences.

## O B S E R V A T I O N S

## D E L A C O M E T E

*Faites depuis le 18 Mars qu'on a commencé de la voir, jusqu'au 16 d'Avril qu'elle a cessé de paroître.*

PAR M<sup>rs</sup> CASSINI ET MARALDI.

1706.  
28 Avril.

**L**E 18 de Mars à minuit par les alignemens que nous fîmes des étoiles de Bootes & de la Couronne à l'égard de la Comete, nous déterminâmes son ascension droite de  $237^{\circ} 20'$ , & sa déclinaison septentrionale de  $36^{\circ} 0'$ .

Le 19 Mars le Ciel fut couvert.

Le 20 Mars à  $11^h 38'$  nous déterminâmes la différence d'ascension droite entre l'épaulé orientale de Bootes &

la Comete de  $20^{\circ} 23'$ , dont la Comete étoit plus orientale, & la différence de déclinaison de la Comete à l'égard de cette étoile de  $7'$ , dont la Comete étoit plus meridionale; ce qui donne l'ascension droite de la Comete de  $228^{\circ} 19'$ , & sa déclinaison de  $34^{\circ} 26'$ , ayant fait en deux jours 8 degrés d'un grand cercle depuis la premiere observation.

Le 24 Mars nous déterminâmes la situation de la Comete par rapport aux étoiles voisines de Bootes : son ascension droite étoit de  $211$  degrés  $\frac{1}{2}$  & sa déclinaison de  $30$  degrés & demi. Ayant parcouru en 6 jours 22 degrés & demi d'un grand cercle depuis la premiere observation du 18.

Depuis le 24 de Mars nous ne pûmes voir la Comete que le 31 du même mois, à cause des nuages qui couvrirent le Ciel une partie de ce tems, & à cause du clair de la Lune qui ne nous permit pas de la voir le 28, le 29 & le 30 Mars, quoique le Ciel fut serein, & que nous l'ayons cherchée avec beaucoup de soin avec la Lunette à l'endroit du Ciel où elle se devoit trouver.

Le 31 Mars avant le lever de la Lune nous vîmes la Comete qui étoit assez claire : elle étoit entre la constellation de la Vierge & la chevelure de Berenice, proche de deux étoiles qui ne sont point marquées dans les Catalogues, ni dans les Cartes. A  $8^h 40'$  nous déterminâmes la situation de la Comete par rapport à la plus orientale de ces étoiles qui est de la quatrième grandeur. L'ascension droite de la Comete étoit d'un degré & 38 minutes plus petite que celle de l'étoile, la Comete étoit plus septentrionale en déclinaison de  $15'$ . Suivant nos observations l'ascension droite de l'étoile est  $193^{\circ} 57'$ , & sa déclinaison septentrionale est  $19^{\circ} 8'$ ; donc l'ascension droite de la Comete est  $192^{\circ} 29'$ , & sa déclinaison est  $19^{\circ} 23'$ , s'étant avancée sur sa route depuis la dernière fois que nous l'observâmes de 21 degrés.

Le premier Avril à  $8^h 18'$  la Comete étoit dans le parallèle d'une étoile de la sixième grandeur, qui est au-

dessus du bras de la Vierge, & qui n'est point marquée dans les Catalogues, ni dans les Cartes : l'ascension droite de l'étoile est de  $188^{\circ} 1'$ , sa déclinaison septentrionale est de  $18^{\circ} 14'$ . L'ascension droite de la Comète étoit de  $2^{\text{d}} 17'$  plus grande que celle de l'étoile, donc celle de la Comète fera de  $190^{\circ} 18'$ , & sa déclinaison  $18^{\circ} 14'$ , la même que celle de l'étoile. Le mouvement que la Comète avoit fait sur sa route depuis le 18 Mars jusqu'au soir du premier Avril fut de 46 degrés d'un grand cercle.

Le 2 Avril à  $11^{\text{h}} 46'$  par le passage de la Comète par le Meridien & par sa hauteur meridienne, on détermina son ascension droite de  $188^{\circ} 14'$ , & sa déclinaison de  $16^{\circ} 50''$ . Le mouvement journalier de la Comète étoit alors de 2 degrés & demi. Ce jour-là la Comète étant proche de deux petites étoiles, nous observâmes proche du Meridien & à une distance de 50 degrés du Meridien la difference de l'ascension droite & de déclinaison entre la Comète & les étoiles fixes pour tâcher de connoître sa parallaxe, qui ne nous parut point sensible.

Le 3 d'Avril la Comète étant proche du parallele de deux petites étoiles, qui paroissent se toucher l'une avec l'autre par la Lunete de 10 pieds, nous fîmes comme le jour précédent plusieurs observations pour la parallaxe de la Comète qui ne fut pas non-plus sensible.

A  $11^{\text{h}} 36'$  par le passage de la Comète par le Meridien & par sa hauteur meridienne, on détermina son ascension droite de  $186^{\circ} 38'$ , & sa déclinaison de  $15^{\circ} 46'$ . Le mouvement que la Comète a fait sur sa route depuis le 18 Mars jusqu'au 3 Avril est de 50 degrés.

Le 4 Avril à  $11^{\text{h}} 26'$  au passage de la Comète par le Meridien, l'on détermina son ascension droite de  $185^{\circ} 3'$ , avec une déclinaison septentrionale de 14 degrés 44 minutes.

Le 5 Avril à  $11^{\text{h}} 21'$  par les observations faites au Meridien, l'ascension droite de la Comète étoit de  $183^{\circ} 38'$ , & sa déclinaison septentrionale de  $13^{\circ} 46'$ , ayant fait sur sa route 53 degrés depuis le 18 Mars.

Le 6 Avril à 11<sup>h</sup> 10' l'ascension droite de la Comete fut de 182 degrés, & sa déclinaison septentrionale 12° 30'. Le Ciel qui n'étoit pas bien clair ne nous permit pas de faire ces observations avec beaucoup d'exactitude.

Le 7 Avril la Comete se trouva proche du parallele d'une étoile de la sixième grandeur, située sur la tête de la Vierge, qui n'est point marquée dans les Cartes: cette étoile vûe avec la Lunete est composée de plusieurs, comme il arrive à un tres-grand nombre d'autres étoiles. A 10<sup>h</sup> 0' la difference d'ascension droite entre l'étoile la plus claire de celles cy & la Comete fut de 1° 46', & la Comete plus septentrionale de 7' que l'étoile. L'ascension droite de l'étoile est de 179° 40', & sa déclinaison 11° 56'. Donc l'ascension droite de la Comete étoit de 181° 26', & sa déclinaison 12° 3'.

Ce jour-là la Comete étoit éloignée sur sa route de la premiere observation de 56 degrés  $\frac{1}{2}$ .

Le 8 Avril à 9<sup>h</sup> nous comparâmes la Comete à une étoile de la sixième grandeur dans l'aîle de la Vierge, qui n'est point marquée dans les Cartes ni dans les Catalogues, & qui est aussi composée de plusieurs petites étoiles. La difference d'ascension droite entre la Comete & l'étoile principale étoit de 7° 34' dont l'étoile étoit plus orientale: la Comete étant plus meridionale de 6'. L'ascension droite de l'étoile est 187° 54', & sa déclinaison de 11° 22'; d'où l'on trouve l'ascension droite de la Comete de 180° 20', & sa déclinaison de 11° 16'.

Le 7 Avril à 9<sup>h</sup> 46' la difference d'ascension droite entre la Comete & l'étoile plus orientale de la Vierge marquée  $\sigma$  par Bayer fut de 1° 46', & la difference de déclinaison fut de 4' dont la Comete étoit plus meridionale. L'ascension droite de l'étoile est 137° 55', & sa déclinaison 10° 24'; donc l'ascension droite de la Comete étoit 179° 21', & sa déclinaison 10° 20'.

Le 10 Avril à 9<sup>h</sup> 46' la Comete fut plus septentrionale de 16' en déclinaison que l'étoile la plus orientale des deux qui sont marquées  $\delta$  par Bayer dans le bras de la

Vierge. La difference d'ascension droite entre la même étoile & la Comete fut de  $9^{\circ} 17'$  dont la Comete étoit plus occidentale. L'ascension droite de l'étoile est  $187^{\circ} 43'$ , & sa déclinaison Septentrionale  $9^{\circ} 19'$ ; d'où l'on calcule l'ascension droite de la Comete de  $178^{\circ} 26'$ , & sa déclinaison  $9^{\circ} 35'$ .

Le 11 Avril nous comparâmes la Comete avec l'autre étoile marquée  $d$  dans le bras de la Vierge. Leur difference d'ascension droite se trouva de  $9^{\circ} 10'$ , & leur difference de déclinaison de  $25'$  dont la Comete étoit plus septentrionale. L'ascension droite de l'étoile est  $186^{\circ} 47'$ , & sa déclinaison  $8^{\circ} 28'$ , dont l'ascension droite de la Comete est  $177^{\circ} 37'$ , & sa déclinaison  $8^{\circ} 53'$ .

Le 12 Avril à  $9^h 30'$  la difference d'ascension droite entre l'étoile marquée  $\pi$  par Bayer dans la tête de la Vierge & la Comete, fut observée de  $21'$  dont l'ascension droite de la Comete étoit plus grande, & la difference de déclinaison étoit de 6 minutes dont la Comete étoit plus meridionale. Ayant supposé l'ascension droite de l'étoile de  $176$  degrés  $28'$ ; & sa déclinaison de  $8^{\circ} 18'$ , on trouve l'ascension droite de la Comete de  $176^{\circ} 49'$ , & sa déclinaison de  $8^{\circ} 12'$ .

Le 13 Avril nous comparâmes la Comete à une étoile de la sixième grandeur, qui n'est point marquée sur les Cartes ni dans les Catalogues, & qui suivant nos observations est à  $178^{\circ} 45'$  d'ascension droite, avec une déclinaison septentrionale de  $7^{\circ} 29'$ . La difference d'ascension droite entre la Comete qui étoit plus occidentale & l'étoile, étoit de  $2^{\circ} 40'$ , & la difference de déclinaison dont la Comete étoit plus septentrionale fut de  $9'$ ; dont l'ascension droite de la Comete est  $176^{\circ} 6'$ ; sa déclinaison  $7^{\circ} 38'$ , ayant parcouru sur sa route 63 degrés depuis la première observation que nous en fîmes le 18 Mars.

Nous vîmes la Comete le 14 & le 16 d'Avril avec la Lunete; mais nous ne pûmes déterminer qu'à peu près sa situation, à cause qu'elle étoit fort foible, & qu'il ne se rencontra point dans son parallele d'étoiles prochaines auxquelles



ausquelles on la pût comparer, comme nous avons fait dans la plupart des autres observations. Le 16 elle nous parut environ un demi-degré plus septentrionale que l'étoile marquée  $\beta$  dans la tête de la Vierge, & éloignée en ascension droite d'un degré & demi de la même étoile.

Dans la suite nous n'avons pû voir la Comete, à cause qu'elle étoit fort petite & foible, & à cause de la Lune qui restoit le Soir sur l'horizon.

Tous ces lieux de la Comete tombent sur une ligne qui n'est différente d'une portion d'un grand cercle que dans les dernières observations, qui font connoître qu'elle en decline un peu vers l'Orient.

L'endroit du Ciel où nous avons cessé de voir la Comete est éloigné de l'Ecliptique 3 degrés seulement.

Si l'on continuë le grand cercle sur lequel tombent la plupart des observations, il coupera l'Ecliptique vers le 21 degré de la Vierge. Il est vrai que comme dans les dernières observations la Comete declinoit un peu de ce grand cercle, sa trace continuée uniformément couperoit l'Ecliptique un peu plus vers l'Orient.

La route de la Comete de l'année 1580 coupa l'Ecliptique précisément dans le degré opposé, c'est-à-dire en 21 des Poissons, ainsi qu'il paroît par les observations de Mestlin. Le mouvement de nôtre Comete, qui du commencement étoit de quatre degrés par jour, a été toujours en diminuant de sorte que les derniers jours que nous l'avons observée il étoit moindre d'un degré.

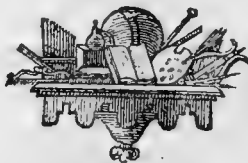
Cette Comete a été fort petite, même lorsqu'elle étoit plus proche de la terre, & que son mouvement étoit plus grand. A mesure que ce mouvement est devenu plus lent, la grandeur apparente de la Comete a aussi diminué.

La Comete vûë avec des grandes Lunetes paroissoit mal terminée: elle étoit assez claire vers le milieu, mais plus obscure vers ses bords. On la voyoit beaucoup mieux & plus claire avec des grandes Lunetes qu'avec des petites.

Pour représenter le mouvement de cette Comete par  
1706.

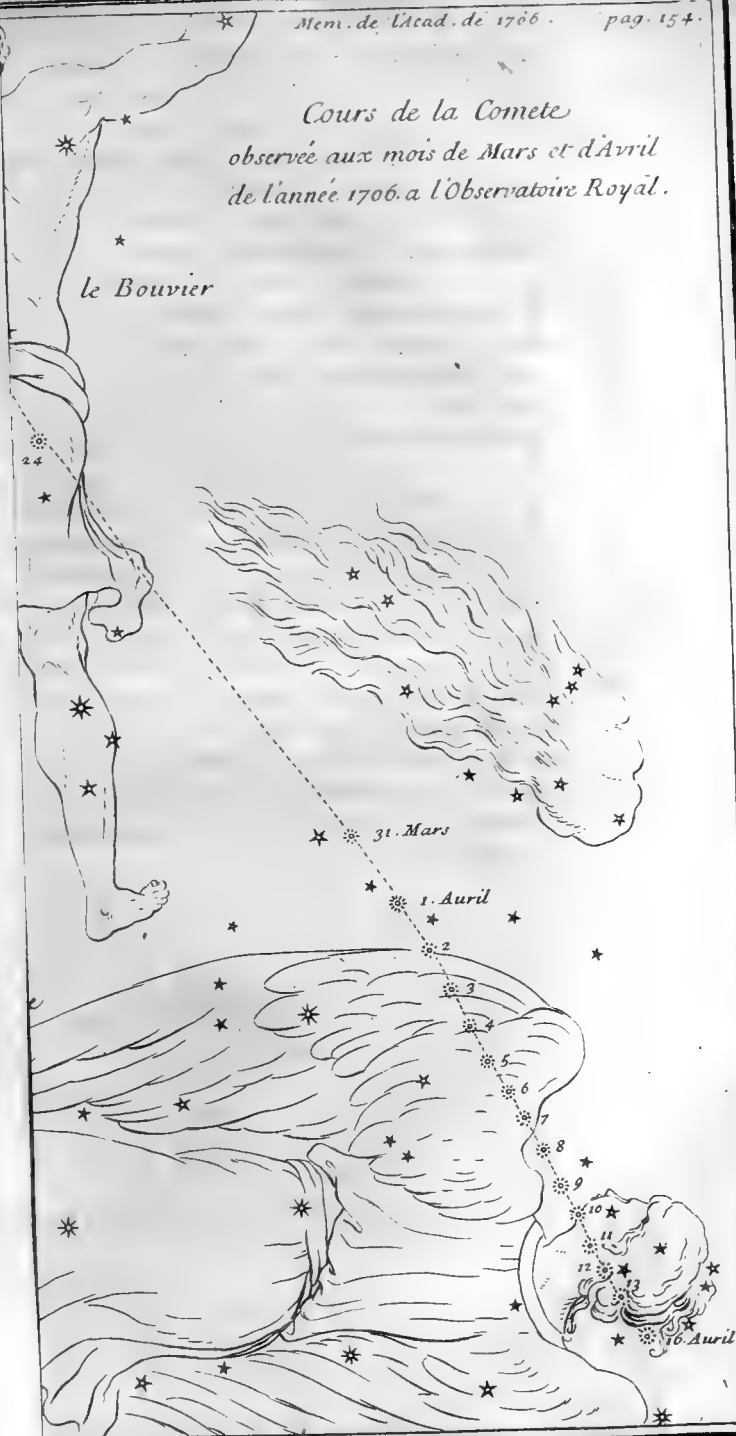
la theorie, nous avons suppose, comme il a été déjà rapporté dans le premier Memoire, qu'elle décrit par un mouvement égal une ligne un peu différente de la droite, sur laquelle elle parcourt  $\frac{7}{10}$  de sa plus petite distance de la terre : mais pour représenter avec plus d'exaëtitude toutes les observations, nous avons donné au Perigée, que nous prenons pour terme du mouvement de la Comete, un mouvement de 4 minutes par jour suivant le cours de la Comete. Par cette maniere nous representons tous les lieux observés à peu de minutes près, sans une plus grande difference des observations, que celle qui se trouve souvent entre les meilleures Tables modernes de la Lune comparées entr'elles, & avec les observations.

Nous n'avons rien à changer à l'inclinaison de la route de la Comete à l'Ecliptique, que nous avons rapportée du commencement à l'Academie ; quoique nous aïons été obligés d'avancer le nœud de la Comete de quelques degrés plus vers l'Orient, soit qu'on doive attribuer ce changement à un mouvement des nœuds analogue à celui des nœuds de la Lune, soit qu'on le doive attribuer à la grande difficulté qui se rencontre à déterminer les nœuds par les observations qui en sont le plus éloignées, & proche de la plus grande latitude, où étoit la Comete du commencement que nous l'avons apperçûë, & par les observations faites à peu de distance les unes des autres dans la plus grande latitude de la Comete.



*Cours de la Comete  
observee aux mois de Mars et d'Auril  
de l'année 1766. a l'Observatoire Royal.*

le Bouvier





## OBSERVATION

*De l'Eclipse de Lune du 28 Avril 1706 faite à l'Observatoire Royal.*

PAR M<sup>RS</sup>. CASSINI ET MARALDI.

**L**E Ciel qui a été couvert une partie de la nuit du 27 au 28 Avril, ne nous a pas permis d'observer le commencement de l'Eclipse, qui suivant le calcul devoit arriver 30 minutes après minuit, la Lune ne s'étant pas pû voir qu'à 1<sup>h</sup> 30' au travers des nuages qui empêchoient de voir sa partie éclipsée. 1706.  
5 May

On l'a commencé de voir un peu plus distinctement à 1<sup>h</sup> 35'; mais les nuages qui passaient devant la Lune empêchoient de voir le terme de l'ombre bien distinct pour pouvoir mesurer la grandeur de l'Eclipse avec précision.

Nous avons observé en deux manières différentes cette Eclipse, l'une par le Micrometre posé au foyer de la Lunete de 8 pieds, l'autre par la Lunete posée sur la machine parallatique, en observant le passage des bords de la Lune & des cornes par les fils qui se croisent au foyer de la Lunete.

Les nuages qui passaient souvent devant la Lune, & l'ont aussi entièrement couverte plusieurs fois différentes, ont empêché de marquer exactement les phases de l'Eclipse, & l'entrée & sortie des taches de l'ombre.

à 1<sup>h</sup> 34' : L'ombre éloignée de Grimaldi de la longueur de cette tache.

I 38 En mesurant avec le Micrometre la partie claire de la Lune, nous trouvâmes sa partie éclipsée d'environ 6 doigts; mais cette observation nous paroît un peu douteuse.

I 45 La grandeur de l'Eclipse étoit de 5 doigts 52'

I 47 5 48

à 1 <sup>h</sup> 53 $\frac{1}{2}$	La grandeur de l'Eclipsé étoit de	5 doigts	45
1 55	L'ombre à Promontorium acutum.		
1 55	L'Eclipsé est de	5	40
1 57	L'ombre étoit fort proche de Dionysius.		
2 0	L'Eclipsé est de	5	33
2 2 $\frac{1}{4}$	L'ombre étoit à peu près dans la même situation à l'égard de Dionysius.		
2 4	La Lune éclipsée de	5	26
2 7	La Lune se couvre.		
2 11	L'ombre quitte Mare humorum.		
2 15	La Lune s'étant éclaircie l'Eclipsé est de	5	envir.
2 20	La grandeur de l'Eclipsé.	4	51
2 24	L'Eclipsé est de	4	45
2 29	L'Eclipsé est de	3	20
2 31	La Lune se couvre, & reste presque toujours cou- verte jusqu'à 2 <sup>h</sup> 59' que l'Eclipsé n'étoit plus que de 3 doigts 34'.		
3 2 $\frac{1}{2}$	Fin de l'Eclipsé.		

*Par la Machine parallatique.*

à 1 <sup>h</sup> 42 $\frac{1}{2}$	Grandeur de l'Eclipsé.	4 doigts	58'
1 48 $\frac{1}{2}$		5	12
1 58 13		5	10
2 4 40		5	7
2 24 30		3	49
3 3	Fin de l'Eclipsé.		



## OBSERVATION

De l'Eclipsé de Lune du 28 Avril 1706 faite  
à l'Observatoire.

PAR Mrs. DE LA HIRE.

LE Ciel fut tout couvert, & il plut dans tout le commencement de cette Eclipsé; mais vers le milieu la Lune commença à paroître entre les nuages. Nous n'en pûmes faire que les observations suivantes avec le Micro-metre appliqué à la Lunete de 7 piés.

à 1<sup>h</sup> 43' 24" La Lune étoit éclipsée de 5 doits 40 minutes.

46	16	5	40
2	0 44	5	17
8	12	5	19
20	38	4	34
41	46	3	15

3 4 28 Fin de l'Eclipsé, mais un peu douteuse, à cause qu'on ne peut pas bien juger de l'ombre veritable qui ne paroît plus sur le disque de la Lune.

L'ombre passa un peu au-delà du *Promontorium acutum*, & il nous sembla qu'il fut tout caché à 1<sup>h</sup> 51' 30"; mais il étoit fort difficile d'en bien juger, à cause que l'ombre paroissoit aller fort lentement en cet endroit.

Nous ne pûmes pas observer les Emersions des Taches ni même de Tycho, les nuages qui passaient continuellement sur le corps de la Lune ne le permettant pas.

L'ombre étoit fort noire, & lorsque le Ciel étoit le plus serein, on voyoit assez difficilement le bord du disque qui étoit obscurci. Elle étoit d'ailleurs assez nette & tranchée.

Nous observâmes aussi le diametre de la Lune de 29' 37" à la hauteur de 15° 40'.

Nous avions fait le jour précédent quelques observa-

tions de la Lune, comme son passage par le meridien, pour le comparer à celui qui précédoit l'Eclipse; mais on ne pût pas à cause du mauvais tems.

Il faut remarquer que dans les Eclipses de Lune, lorsque l'ombre est fort noire, ce qui arrive assez rarement, il est difficile de déterminer l'Emersion des Taches, qu'on ne peut pas avoir avant qu'elles soient sorties; car on ne distingue pas facilement les Taches dans l'ombre.

## O B S E R V A T I O N S

## S U R L E F E R

## A U V E R R E A R D E N T

P A R M. H O M B E R G.

1706.  
8 May.

**L**E Fer forgé étant exposé au verre ardent en petits morceaux, comme sont les pointes de clous de Marchal ou des broquettes de Tapissier, s'y fond assez vite, mais d'une maniere differente des autres metaux. Tous les metaux quand ils commencent à fondre, c'est toute la masse ensemble qui se liquefie peu à peu, comme l'on voit le plomb se fondre ou l'étain au feu ordinaire: mais le fer se fond au Soleil tout autrement. Voici comment.

D'abord il paroît sur la superficie du Fer une matiere fondue comme de la poix noire, qui se distingue fort bien d'avec une autre substance du fer qui est blanche & plus difficile à fondre, sur laquelle cette matiere noire coule & change de place comme la cire fondue couleroit sur un metal chaud. Le fer se tient quelquefois un bon *miserere* dans cette situation avant que la matiere blanche commence à se fondre, laquelle paroît inégale & raboteuse sous cette matiere noire, jusqu'à ce que toute la masse du fer soit fondue: alors si le fer est soutenu d'un charbon, la matiere noire se joint au charbon, s'enflamme, se creu-



se fort vite & saute en étincelles, qui petillent comme le fer qui brûle dans la forge d'un Maréchal.

Les étincelles en sortent d'abord fort grosses & en grande quantité; elles diminuent ensuite jusqu'à ce qu'à la fin il reste une masse de fer fondu qui ne jette plus d'étincelles, & qui se tient en fonte aussi tranquillement qu'une goutte d'huile se tient sur une assiette d'argent.

Pendant que le fer est dans cette fonte tranquille où il ne jette plus d'étincelles, il s'amasse sur sa superficie un verre transparent, mais qui ne s'y tient pas de la même manière qu'il fait sur les autres métaux qui se vitrifient, où le verre nage sur le métal sans se boursoufler, comme une goutte de graisse nageroit sur l'eau chaude: mais le verre du fer se boursouffle & s'élève en écume blanche, qui de temps en temps se rabat en une goutte unie & transparente, & qui un moment après se relève en écume; ce qui arrive successivement & souvent. Mais le fer étant refroidi, le verre n'est ni blanc ni transparent comme il paroïsoit étant liquide, mais fort noir comme seroit un émail noir.

Pendant le temps que le fer petille & que les étincelles en sautent, il s'attache sur toute la superficie du charbon qui soutient le fer, une très-grande quantité de petites boulettes, qui ne sont autre chose que la partie inflammable du fer qui s'en sépare en forme d'étincelles, & qui tombe sur le charbon. Si l'on remuë un peu le charbon pendant la fonte tranquille du fer, en sorte que ces petites boulettes des étincelles puissent retomber sur ce fer fondu, alors ce fer recommence à jeter des étincelles jusqu'à ce que la matière étincelante en soit entièrement ressortie.

Il y a beaucoup d'apparence que la matière qui fournit ces étincelles, ou la matière inflammable du fer, est cette matière noire qui se fond d'abord que le fer paroît au foyer du verre ardent; puisque le fer ne commence à jeter des étincelles, que lorsque cette matière noire commence à toucher le charbon, & que la partie du fer qui se

tient en une fonte tranquille sans étinceler, est cette matiere blanche du fer qui fond la dernière ; que la première est une matiere non encore metallique, & que la dernière est le vrai fer ou la partie metallique du fer.

Le hazard nous a decouvert que dans toutes les cendres il se trouve une poudre noiratre qui est un vrai fer : ce que l'on peut verifier de cette maniere. Brûlez en cendres quelle sorte d'herbes seches ou du bois que vous voudrez : prenez les precautions necessaires pour qu'il ne s'y puisse mêler quelque matiere ferrugineuse : puis fouillez dans ces cendres avec une lamme de couteau bien nette & qui soit aimantee d'un Aimant vigoureux ; vous trouverez au bout de votre couteau une barbe d'une poudre noiratre comme si vous l'aviez trempé dans la limaille de fer. Ramassez cette poudre : faites cela tant de fois que vous en ayez assez pour la pouvoir fondre ; ce que vous ferez aisément au verre ardent : il vous en viendra une grenaille de fer, qui jettera des étincelles sur le charbon comme fait un morceau de fer qu'on rougit fortement à la forge.

Cette experience nous marque avec beaucoup d'évidence que dans le brulement ou dans l'incineration de toute matiere vegetale il se compose du fer, puisqu'il s'attache au bout du couteau aimanté en forme d'une poudre noiratre ; ce qui n'arrive à aucune autre matiere qu'au fer ou à l'acier, qui est du fer purifié : Et comme dans le brûlement de quelque matiere vegetale que ce soit, les cendres qui en proviennent consistent en une partie de sel fixe de la plante, en un peu d'huile fetide & en un peu de terre ; il pourroit fort bien être que la substance du fer consiste de même en une partie de terre & de sel fixe de la plante, dont les parties sont si fortement collées ensemble & enveloppées dans le feu par l'huile fetide du vegetal brûlé, que la flamme a de la peine à les separer les une des autres, & qu'elles s'y fondent plutôt ensemble pour produire un corps dur & cependant malleable que nous appellons du fer.

Nous

Nous avons observé que la matiere noire du fer est une matiere huileuse , qui s'enflamme avec le charbon ou semblable & non autrement. Il pourroit bien être que cette matiere huileuse ou noire du fer soit un reste superflu de l'huile du bois ou d'autre vegetal , qui par son incineration a produit le fer , & qui ne s'est pas joint assez intimement ou en trop grande quantité avec les autres principes qui entrent dans la composition du fer , & qui se rejoint dans l'occasion aux parties huileuses ou inflammables du charbon comme à son semblable , & y produit cette inflammation ou étincellement comme la matiere huileuse vegetale ou animale en se joignant à quelque sel lui donne le caractere du salpêtre , & qui s'en détache en s'enflammant à chaque fois qu'elle touche à un charbon ardent.

L'étincellement du fer n'arrive ordinairement que lorsqu'on le fond sur un charbon : car si on le fond sur quelque autre metal , dans un creuset ou sur de la porcelaine ; le fer n'étincelle point , & alors la matiere blanche du fer se separe de la noire dans la fonte , & fait un culot à part , sur lequel nage la matiere noire , comme les scories surnagent un metal fondu. La matiere blanche est dure comme l'acier trempé , & étant cassée , elle est jaunâtre en dedans , & quelquefois blanche comme de l'argent. La matiere noire , étant réduite en scories , est tendre & friable comme du verre outré au Soleil.

Le fer joint aux autres metaux par la fonte produit des effets differens selon les metaux auxquels on le joint , & selon le tems qu'on le joint à ces metaux. Quand on fond le fer avec quelque metal sulphureux , comme avec l'or , avec le cuivre ou avec l'étain ; la matiere blanche du fer se mêle avec ces metaux , & la matiere huileuse ou noire les surnage comme une scorie qui s'en separe fort aisément par un coup de marteau , comme toutes les scories se separent de dessus les metaux sur qui elles tiennent.

Quand on fait fondre le fer le premier sur un charbon , & qu'ensuite on met l'autre metal sur ce fer fondu ; alors

le fer continué à jeter des étincelles jusqu'à sauter presque entièrement de dessus le charbon en petits grains, qui sont d'abord comme de la poussière, ensuite comme du sable, & à la fin comme des têtes d'épingles; & il emporte avec lui presque toute la masse de l'autre metal. Mais quand on fait fondre l'autre metal le premier & qu'on met le fer dessus ce metal fondu, alors très-souvent il ne se fond que seulement la matiere noire du fer, sans qu'on puisse faire fondre la matiere blanche, laquelle nage sur l'autre metal, ou s'y enfonce selon que le fer est plus ou moins pesant quel'autre metal, & la matiere noire du fer leur sert de scories. Dans cette situation le fer ne petille & n'étincelle jamais, même avec les métaux sulphureux, comme nous allons voir dans le détail suivant.

Quand on fait fondre du fer jusqu'à ce qu'il ait cessé de jeter des étincelles, & jusqu'à ce qu'il se tiende en une fonte tranquile, si pour lors on met un morceau d'argent dessus, l'argent se fond & les deux metaux se confondent en une masse, sans que le fer recommence à jeter des étincelles: mais si l'on fait fondre l'argent le premier, & si l'on met un morceau de fer sur cet argent fondu, l'argent se tiendra en fonte, & le fer ne se fondra pas. Il arrivera pour lors un effet qui m'a paru particulier à l'argent, qui est que la partie huileuse du fer se fondra d'abord seule; elle coulera de dessus le fer, & entrera dans la masse de l'argent fondu, comme l'eau entre dans une éponge, laissant la partie du fer la plus blanche & la plus metallique destituée de son soufre brûlant qui lui sert ordinairement de fondant: & c'est-là la raison pourquoy le fer pour lors ne se fond que très-difficilement. L'argent qui a bû ce soufre devient noirâtre & fort cassant; il le faut mettre à la coupelle de plomb pour l'en separer.

Voilà l'effet du mélange du fer avec l'argent, qui est le metal le moins sulphureux que nous aïons. Il n'arrive pas la même chose quand on mêle le fer avec un metal sulphureux, comme est l'or, le cuivre & l'étain; soit qu'on les fasse fondre devant le fer, ou qu'on fasse fondre le fer

le premier : parce que ces métaux ayant d'eux-mêmes beaucoup de soufre, ils ne boivent pas le soufre brûlant du fer comme faisoit l'argent qui a fort peu de soufre.

Le fer fondu avec l'un de ces trois métaux produit encore des effets differens. Etant mêlé avec l'or, il continuë à petiller comme si on l'avoit fondu seul, sans jeter une plus grande quantité d'étincelles : ce qui marque que le soufre del'or n'est pas un soufre brûlant comme celui du fer ; car il en auroit augmenté les étincelles.

Quand on fond un morceau de fer jusqu'à la cessation du petillement, si l'on met pour lors une plaque de cuivre rouge dessus, il arrive premierement que le cuivre devient blanc comme de l'argent, après quoi il devient noir & lustré comme du vernis noir de la Chine, troisiëment il se ride comme une pomme fort ridée restant toujours noir, & un moment après il se fond & se confond avec le fer : mais comme le fer est plus léger que le cuivre, il monte sur la superficie du cuivre comme une scorie blanchâtre, & s'étant joint au soufre de cuivre, il recommence à jeter des étincelles en plus grande quantité qu'auparavant, & beaucoup plus larges & plus brillantes que lorsqu'il petilloit seul & sans le cuivre ; ce qu'il ne faisoit pas avec l'or : marque évidente que le cuivre contient un soufre brûlant aussi-bien que le fer, & que l'or n'en contient pas. Ces étincelles brillantes durent long-temps : à la fin elles cessent, & la masse fonduë continuë à jeter une très-grande quantité de petits grains de metal sans étincelles. Ces petits grains sont d'abord fort menus, & ne s'élèvent pas plus de quatre ou cinq pouces : mais à la fin ils deviennent aussi gros que des têtes des plus grosses épingles, & ils s'élancent en l'air de la hauteur d'un pied ou d'un pied & demi, Quand on met quelque bassin au-dessous du charbon qui tient cette masse petillante ; on reçoit ces petits grains qui sautent en l'air, quel'on reconnoît fort bien & sans loupe, les uns de cuivre pur, les autres de fer fondu, & d'autres de fer mêlé de cuivre.

L'étain ayant été mis en fonte au Soleil, si l'on y ajoute

du fer, le fer se fond promptement & se mêle parfaitement avec l'étain, & mieux qu'aucun autre metal. Ils se tiennent tranquillement en fonte, sans que le fer petille ou jette des étincelles: ce qui marque que le soufre de l'étain approche de celui de l'or, & qu'il n'est pas brûlant comme celui du fer ou du cuivre. Ils fument un peu ensemble, & se vitrifient en un émail noir. Le metal qui se trouve sous l'émail, est blanc comme de l'argent de coupelle, & dur & cassant comme du fer fondu.

Si à cet étain & fer fondu ensemble on ajoute du plomb de chacun parties égales, la matiere se fondra difficilement; & en la laissant refroidir, la masse fondue produit sur le champ une espece de vegetation, & jette sur toute sa superficie une poudre jaune de l'épaisseur d'un doigt; en sorte que la poudre qui sort de la masse fondue, paroît le double de celle qui l'a produite, & la masse fondue qui étoit fort bossuë devient plate & même creuse. Cette poudre sort d'abord en forme de champignons sur la superficie de la masse fondue, qui tombent ensuite en une poudre jaune. Si l'on ajoute un peu de cuivre à ce mélange de fer, d'étain & de plomb, il ne produit plus de champignons ni de poudre.

L'étain étant fondu le premier, & les clous de fer mis sur cet étain fondu pour se fondre ensuite, il ne se fait point de petillement ni d'étincelles, très-peu de fumée, & la fonte est tranquille, comme nous venons de le voir. Mais si l'on fond le fer le premier, & si l'on met l'étain sur ce fer fondu, l'étain se calcine dans un moment en une chaux blanche, & aussi-tôt après il se fond & se confond avec le fer: il en sort une prodigieuse quantité de fumée: le fer & l'étain petillent ensemble sans jeter d'étincelles, & chaque grain qui en saute en très-grand nombre, entraîne avec lui un filet de fumée blanche, laquelle se durcit en l'air & tient ensemble comme de la toile d'araignée, & remplit l'air de flocons & de fils blancs-châtres qui couvrent tout ce qui se trouve alentour. Chaque grain de ce metal qui s'élance en l'air, & qui for-

me un fil blanc depuis la masse du metal d'où il sort jusqu'à la hauteur où il peut aller, monte jusqu'à douze, quinze & dix-huit pouces; ce qui fait un mouvement fort agreable aux yeux, qui ressemble à une grande quantité de fusées volantes & de serpentaux qu'on lâcheroit en même temps.

L'étain fin mis seul au verre ardent fume beaucoup, & s'en va enfin entierement en fumée, ne laissant aucun residu. L'étain de vaisselle fume plus que l'étain fin, s'en va plus vite en fumée, & laisse à la fin une matiere terreuse qui ne change plus. L'étain & le plomb, parties égales, fument beaucoup, & se vitrifient à la fin. Ce verre fume encore quelque tems, puis il cesse de fumer, & se change à la fin en une matiere terreuse.

## O B S E R V A T I O N

D E

## L'ECLIPSE DU SOLEIL

Faite à Marly le 12 May 1706, en presence du ROY,  
de MONSEIGNEUR, & de MONSEIGNEUR LE  
DUC DE BOURGOGNE.

1706.  
15 May.

**M**onsieur l'Abbé Bignon ayant communiqué à l'Academie une Lettre qu'il avoit reçûe de M. le Comte de Pontchartrain, par laquelle il lui mandoit que le Roy vouloit qu'on choisît quelques Astronomes de l'Academie Royale des Sciences pour aller observer à Marly en sa presence l'Eclipse du Soleil, pendant que les autres resteroient à l'Observatoire pour y faire les observations de cette Eclipsé, M<sup>rs</sup> Cassini le fils & de la Hire le fils furent choisis pour aller à Marly, & ils porterent avec eux un Quart de cercle de deux pieds de rayon, une Pendule

à seconde , une à demi-seconde , & plusieurs Lunetes de diverses grandeurs.

On avoit attaché à deux de ces Lunetes , dont l'une étoit de neuf & l'autre de sept pieds , deux supports qui portoient une planchette perpendiculaire à l'axe de la Lunete , à la distance de l'oculaire d'environ deux pieds , & l'on avoit tracé sur un carton posé sur cette planchette un cercle égal à l'image que le Soleil passant par la Lunette formoit sur ce carton. Ce cercle étoit divisé par des cercles concentriques en doits & demi-doits.

On avoit placé au foyer commun des deux verres d'une autre Lunette de cinq pieds , un chassis avec des fils de soie simple parallèles entr'eux , dont les deux extrêmes comprenoient exactement l'image du Soleil. Les autres fils divisoient cet espace en douze parties égales.

Ils arriverent à Marly le 11 May après midy , où M. le Comte de Pontchartrain les ayant présenté au Roy , Sa Majesté leur ordonna de choisir un lieu propre pour faire exactement l'observation de cette Eclipse.

Monseigneur le Duc de Bourgogne jugea à propos de mettre les Instrumens dans le Salon de Marly qui regarde la Cascade que l'on appelle ordinairement la Riviere , lequel est exposé au Midy avec un peu de déclinaison vers l'Orient. On y plaça le soir la Pendule à seconde , & l'on observa en sa presence & de toute la Cour des hauteurs du cœur du Lion avec le Quart de cercle pour regler la Pendule.

Le lendemain matin 12 May l'on observa dans le Salon du Château où étoient les Instrumens quelques hauteurs du Soleil pour sçavoir l'état de la Pendule ; & ayant placé les trois Lunettes dont on a parlé ci-dessus sur la terrasse qui est près de ce Salon , on attendit le moment de l'Eclipse.

Monseigneur le Duc de Bourgogne fut le premier le l'apperçût entre les nuages à  $8^h\ 28'\ 57''$  lorsqu'elle étoit éclipée d'environ un demi doit , & jugea qu'il y avoit au moins deux minutes qu'elle avoit commencé ; de sorte



que l'on peut déterminer son commencement à 8<sup>h</sup> 26'. Le Soleil étant encore entre des nuages rares, l'on détermina les premières Phases avec les reticules qui étoient placés au foyer de la Lunette de cinq pieds que l'on avoit attachée sur le Quart de cercle; & lorsque le Soleil fut entièrement dégagé des nuages, on l'observa par le moyen de son image qui se peignoit sur le carton exposé aux Lunettes.

Monseigneur le Duc de Bourgogne détermina lui-même la plupart des Phases lorsque l'Eclipse arrivoit à différens doits, & l'on marquoit au même instant à la Pendule le tems de l'observation. Il détermina aussi en même tems la grandeur de l'Eclipse & la distance des cornes pour trouver la proportion du diamètre apparent du Soleil à celui de la Lune, & il trouva le diamètre apparent de la Lune plus grand que celui du Soleil, de même qu'il est marqué dans les Tables.

Le Roy vint voir l'Eclipse lorsqu'elle augmentoit encore, & faisoit marquer à la Pendule l'heure des Phases différentes & le tems de la plus grande Eclipse. Sa Majesté y demeura encore long-tems après qu'elle eut commencé à diminuer. Monseigneur, Madame la Duchesse de Bourgogne, Monseigneur le Duc de Berry, Madame, Monsieur le Duc d'Orléans, Monsieur le Duc & Monsieur le Prince de Conty & toute la Cour assistèrent à l'observation, & eurent le plaisir de déterminer eux-mêmes le tems des Phases.

L'après-midy on observa des hauteurs correspondantes à celles du matin, & Monseigneur le Duc de Bourgogne se fit expliquer la méthode dont l'on se sert pour déterminer les Eclipses par la projection de la terre dans l'orbe de la Lune.

*Observation de l'Eclipse du Soleil à Marly.*

Le 12 May à 8<sup>h</sup> 28' 57" du matin Monseigneur le Duc de Bourgogne observa que le Soleil étoit déjà éclipsé d'environ un demi doit, & qu'il y avoit au moins deux minutes que l'Eclipse avoit commencé.

8 <sup>h</sup>	38'	25"	Deux doigts & demi.
8	40	28	Trois doigts.
8	51	58	Cinq doigts.
8	56	45	Six doigts.
9	3	31	Sept doigts.
9	13	2	Huit doigts & demi.
9	15	33	Neuf doigts.
9	22	27	Dix doigts.
9	33	7	Près de onze doigts.
9	38	36	Dix doigts & demi.
9	41	36	Dix doigts.
9	48	7	Neuf doigts.
9	53	38	Huit doigts.
9	56	18	Sept doigts & demi.
10	6	11	Six doigts.
10	12	23	Cinq doigts.
10	18	11	Quatre doigts.
10	27	42	Deux doigts & demi.
10	36	48	Un doit.
10	41	54	Fin de l'Eclipse.



## OBSERVATION

*De l'Eclipse de Soleil faite le 12 May 1706 dans l'Appartement inferieur de l'Observatoire.*

PAR MRS. CASSINI ET MARALDI.

ON a observé en deux manieres differentes l'Eclipse <sup>1706.</sup> de Soleil qui est arrivée le 12 de ce mois au matin. <sup>15 May.</sup> On avoit mis au foyer de la Lunete de 34 pieds, placée sur la terrasse de l'Observatoire, un papier bien tendu sur lequel se peignoit l'image du Soleil, dont le diametre étoit presque de quatre pouces. On avoit divisé ce diametre en 12 parties par six cercles concentriques qui representoient les douze doigts, dont chacun étoit un peu moins de quatre lignes.

Pour observer les doigts de l'Eclipse par cette Lunete, on faisoit concourir l'image du Soleil avec le cercle extérieur, & dans cette situation on observoit quand la concavité de l'Eclipse arrivoit à une de ces conférences qui déterminoient les doigts qui restoit éclairés, & à cet instant on remarqua l'heure & la minute. M. Coustard & M. Butterfield, qui sont exercez dans ces sortes d'observations, eurent soin d'observer les doigts de l'Eclipse avec cette Lunete.

On a aussi observé l'Eclipse dans la Tour orientale & dans la Salle, en présence de Monsieur le Noncé, de plusieurs Princesses, de plusieurs Messieurs de l'Academie, & d'un grand nombre d'autres personnes considerables.

Les Phases de l'Eclipse ont été observées par un Micro-metre posé au foyer de la Lunete de 8 pieds, par le moyen duquel on a mesuré vers le commencement & vers la fin la distance des cornes. Dans la suite de l'Eclipse on a observé la partie claire du Soleil, d'où l'on a conclu les doigts éclipez & la plus grande obscurité.

Les nuages qui couvroient presque tout le Ciel le matin avant l'Eclipse, ne permettoient pas de voir le Soleil.

que par intervalles. Nous le vîmes à 8<sup>h</sup> 23' lorsque l'Eclipse n'avoit point commencé. Le Soleil se couvrit aussi tôt; & s'étant découvert deux minutes après, nous vîmes à 8 heures 25' 38" le bord occidental du Soleil qui manquoit déjà, de sorte que l'Eclipse avoit commencé un peu auparavant. Le Soleil se couvrit de nouveau, & ne parut que vers les 8<sup>h</sup> 40' lorsque l'Eclipse paroissoit déjà grande. Durant le reste de l'Eclipse le temps a été plus favorable, principalement vers le milieu & vers la fin.

<i>Observations faites par le Micrometre.</i>			<i>Par la Lunete de 34 pieds.</i>	
8 <sup>h</sup> 25' 38"	L'Eclipse avoit commencé.			
43	L'Eclipse étoit de 3 <sup>doits</sup> 48'			
49	4	30		
8 55 20	6	16		
9 1 30	7		9 <sup>h</sup> 4' 0"	7 <sup>doits</sup>
9 0	8	0	9 8 0	8
12 20	8	40		
14 0	9	18		
19	9	23	9 20	10
9 23	10	48		
27	10	48		
9 28 55	10	48		
34 45	10	50	9 <sup>h</sup> 32'	Le tems de la plus grande obscurité II
L'Eclipse a augmenté jusqu'à présent, dans la suite elle va en diminuant.				
9 40	10	14	9 42 0	10
9 58	7	21	9 54	8
10 0 0	6	56	10 0	7
10 0	4	45	10 7 30	6
133 0	4	37		
10 16	4	14	10 19 0	4
24	2	42	10 29	2
10 28 40	2	6	10 34	1
10 30 46	1	36	10 40 49	Fin de
10 34 10	1	9	l'Eclipse par la Lu-	
10 36 30	0	40	nete de 34 pieds.	
10 40 47	Fin de l'Eclipse par la Lunete de 8 pieds.			

Quoique la partie lumineuse du Soleil qui est restée dans la plus grande obscurité n'ait été qu'environ la douzième partie de son diamètre, sa lumière étoit encore assez grande : elle paroissoit seulement plus foible & plus rougeâtre.

Quelques minutes avant la fin de l'Eclipse, nous étions attentifs à observer avec la Lunette de 8 pieds le moment qu'elle finiroit. Nous remarquâmes que la commune section de l'obscurité & de la lumière n'étoit pas une portion de cercle bien terminée, mais qu'elle étoit inégale, & qu'il y avoit des points obscures, une principalement plus considérable que les autres, qui restoient dans le Soleil plus que le reste de la circonférence. Ces pointes obscures sont des montagnes qui se rencontrent dans la circonférence de la Lune. On voit quelquefois avec les Lunettes de semblables pointes lumineuses sur la circonférence du disque de la Lune, lors même qu'elle est exposée directement au Soleil.

Cette Eclipse de Soleil est arrivée 14 jours  $7^h \frac{1}{4}$  après l'Eclipse de Lune que nous observâmes le 27 d'Avril dernier. En raison de 29 jours 12 heures & trois quarts, qui est le temps moyen du retour de la Lune au Soleil, il devoit y avoir entre l'Eclipse de la Lune & celle du Soleil 14 jours 18 heures & un peu plus d'un tiers. La différence entre l'intervalle moyen & le véritable est 10 heures & un tiers, dont l'intervalle véritable est plus court que le moyen. Cette différence vient en partie du mouvement de la Lune, qui a parcouru dans ce tems son demi cercle plus proche de la terre, où est son Périgée & son mouvement plus vite, & en partie de la parallaxe de la Lune, & elle est assez bien représentée par les hypothèses Astronomiques.



## OBSERVATIONS

*De l'Eclipse de Soleil du 12 May 1706 au matin à l'Observatoire Royal dans la Tour orientale à la hauteur de la grande Salle.*

PAR M. DE LA HIRE.

1706.  
15 May.

J'ay observé cette Eclipsé de la même maniere que j'ay accoutumé de les observer. Le Micrometre dont je me sers pour prendre la plus grande largeur ou le diametre de la partie du Soleil qui reste éclairée, est appliqué à sa Lunete ordinaire qui a 7 piés de foyer. Chaque intervalle des filets qui separent la longueur de l'ouverture du Micrometre vaut  $12' 45''$ , comme je l'ay verifié par des methodes très-sûres, & dix tours de la grosse vis dont le pas est très-fin, & qui conduit le curseur qui est un filet parallele aux autres, remplissent exactement un intervalle des filets. Ce Micrometre est le même dont M. Picard se servoit, & qu'il avoit construit avec un très-grand soin, comme il est rapporté dans le Livre des Ouvrages de plusieurs Academiciens que j'ay fait imprimer en 1693 page 413 sur l'imprimé de M. Anzout.

Dans cette Eclipsé j'ay observé le tems des Phases pour chaque demi-tour de la vis qui mène le curseur, ou pour chaque  $20^{\circ}$ . d'un intervalle des filets paralleles, ce qui vaut  $38'' \frac{1}{4}$  de degré, & ce qui me donnoit pour chaque observation près de la cinquième partie d'un doit; mais ces observations ont été faites sans avoir aucun égard aux doigts, d'où il m'a été facile de les conclure & leurs minutes, par les parties proportionnelles entre le grand nombre des observations que j'ay faites.

Mais comme je sçay par experience que lorsqu'on regarde avec le verre noir les filets hors du disque du Soleil, on ne peut qu'avec peine les appercevoir; ce qui

empêche de juger si l'un des filets rase exactement le disque apparent du Soleil, & c'est ce qui arrive ordinairement quand le Ciel est bien pur ; je me suis servi du moyen que j'ay expliqué dans mes Tables Astronomiques pour prévenir cet inconvenient. J'ay rendu au-devant du verre objectif sur le bout du tuyau de la Lunete, une toile de soye blanche fort fine & assez claire, ce qui n'empêche pas de voir le Soleil très-distinctement, & ce qui donne en même temps une blancheur dans toute l'ouverture de la Lunete qui fait appercevoir facilement les filets hors du disque du Soleil, comme s'il y avoit un léger brouillard au-devant du Soleil. Cette methode est aussi très-commode pour les observations de la Lune dans le même cas.

Le Ciel étoit fort brouillé avant le commencement de l'Eclipse ; mais comme il y avoit de tems en tems quelques intervalles entre les nuages, j'étois attentif à observer le Soleil, l'orsque je m'apperçus qu'il y avoit une tres-petite partie de son disque où la Lune commençoit à entrer, & je jugeay que l'Eclipse pouvoit avoir commencé 10" ou 12" plutôt. Il étoit alors  $8^h 25' 52''$ , c'est-pourquoy je marque le commencement à  $8^h 25' 42''$ . Ensuite le Ciel se couvrit & ne laissoit voir le Soleil que par des intervalles trop petits pour pouvoir faire quelques observations exactes, jusques vers les  $8^h$  où il commença à devenir serein, ou en partie jusqu'à la fin de l'Eclipse. Voici les observations que j'en ay faites. J'avois observé exactement le diametre du Soleil de  $31' 45''$ , d'où j'ay réduit la partie restante éclairée du disque du Soleil, à la partie éclipsée, comme je la donne ici, & au lieu des minutes & secondes de degré que j'ay observées, j'y ay substitué les doigts & les minutes qui leur répondent.

Il faut remarquer qu'il y a toujours beaucoup de difficulté à observer les Phases de ces Eclipses, à cause du mouvement continuel du Soleil, & qu'il faut en même tems être attentif aux deux filets qui renferment la partie éclairée & qui la traversent de biais, ce qui empêche

qu'on ne puisse déterminer la grandeur de l'Eclipse sans erreur de quelques secondes. Il n'en est pas de même de l'observation du diametre ; car on dispose le Micrometre de telle maniere que le disque du Soleil se meut entre deux filets paralleles.

<i>H.</i>	<i>'</i>	<i>"</i>	<i>Doits M.</i>		<i>Doits entiers.</i>	
8	25	42	0	0	Commencement.	
	48	42	4	27	4	à 8 <sup>h</sup> 48' 57 <sup>"</sup>
	52	42	5	15	5	à 8 51 27
	55	42	5	44	6	à 8 57 7
	58	17	6	13		
9	0	52	6	42	7	à 9 2 5
	6	47	7	41		
	7	57	7	55	8	à 9 8 25
	9	22	8	10		
	10	42	8	25		
	12	7	8	39		
	13	32	8	53	9	à 9 14 4
	14	52	9	8		
	16	14	9	22		
	17	47	9	36		
	19	15	9	51	10	à 9 20 11
	20	57	10	5		
	22	47	10	10		
	24	47	10	34		
	26	47	10	46		
	31	42	10	58	La plus grande obscurité.	
	34	57	10	46		
	36	57	10	34		
	39	8	10	19		
	40	42	10	5	10	à 9 41 17
	42	17	9	51		
	43	50	9	36		
	45	22	9	22		
	46	52	9	8		
	48	20	8	53	9	à 9 47 39



H.		"	Doits. M.	Doits entiers.
9	49	47	8 39	
	51	12	8 25	
	52	42	8 10	
	54	12	7 56	8 à 9 <sup>h</sup> 53' 46"
	55	37	7 41	
	57	4	7 27	
	58	32	7 12	
10	0	2	6 57	7 à 9 59 44
	1	32	6 42	
	3	2	6 28	
	4	27	6 13	
	5	57	5 59	6 à 10 5 51
	7	27	5 44	
	8	57	5 29	
	10	27	5 15	
	11	57	5 2	5 à 10 12 8
	13	22	4 47	
	14	42	4 33	
	15	57	4 19	
	17	12	4 5	4 à 10 17 40
	18	37	3 50	
	20	2	3 36	
	21	32	3 21	
	22	57	3 7	3 à 10 23 37
	25	47	2 37	
	27	7	2 22	
	28	37	2 7	
	29	52	1 53	2 à 10 29 14
	31	7	1 39	
	32	22	1 25	
	33	57	1 10	
	35	28	0 56	1 à 10 35 2
	36	57	0 41	
	8	22	0 27	
	41	6	0 0	

Fin de l'Eclipse observée  
fort exactement.

A la fin de l'Eclipsé il paroissoit au bord de la Lune deux petites ondes ou éminences.

On doit remarquer que dans le fort de cette Eclipsé on ne laissoit pas de voir fort clair, quoiqu'il n'y eut que la douzième partie du Soleil qui fut découverte : mais il sembloit que le Ciel fut fort couvert de tous côtés à l'horizon, quoiqu'il fut fort serein.

Après avoir construit mes Tables Astronomiques sur toutes les observations que j'avois faites depuis un grand nombre d'années, & sur celles dont l'exactitude m'étoit connue, je n'ay donné pour exemple des Eclipses que celles qui devoient arriver depuis 1702, qui est l'année où elles ont été imprimées, afin d'éviter le reproche qu'on fait à quelques Astronomes, de ne rapporter pour exemple que quelques-unes de celles qui sont passées, auxquelles ils font convenir leurs hypotheses.

Cette Eclipsé de Soleil est une de celles dont j'ay donné le calcul dans mes Tables, où j'avois trouvé qu'elle devoit commencer à  $8^h 27' 11''$ , & finir à  $10^h 45' 37''$ , & que sa quantité seroit de 10 doigts  $48'$ . Mais la Connoissance des tems que M. Lietaud de l'Academie calcule toujours sur mes Tables, comme on fait aussi nos Ephemerides, marque le commencement de cette Eclipsé à  $8^h 27' 4''$ , la fin à  $10^h 45' 49''$  & la quantité de 11 doigts  $8'$ . Je ne parle point du milieu de l'Eclipsé, dont le tems ne peut pas être observé exactement.

La difference de quelques secondes qui se trouvent entre nos calculs, peut venir des parties proportionnelles où l'on peut faire quelque erreur, ce qui ne merite pas d'y avoir égard.

J'ay voulu faire cette observation avec un très grand soin; & pour ce sujet je me suis retiré tout seul dans la Tour orientale de l'Observatoire, afin de n'être point interrompu par une foule de curieux, qui ne nous permettent pas le plus souvent de donner toute l'attention nécessaire dans ces rencontres; & j'ay trouvé que l'Eclipsé avoit commencé à  $8^h 25' 42''$ , qu'elle avoit fini à  $10^h$

$41' 6''$

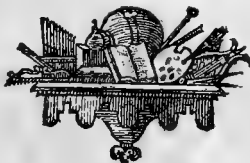
41' 6", & que la quantité avoit été de 10 doigts 58', comme je l'ay rapporté cy-devant.

Ceux qui ne sçavent pas qu'il y a de grandes difficultés, & qu'il faut employer beaucoup d'éléments dans la construction des Tables, pourront s'étonner de voir que mon calcul ne s'accorde pas exactement avec l'observation; mais au contraire les Sçavans seront surpris qu'on ait pû arriver à une si grande justesse, & admireront la connoissance qu'on a acquise du mouvement des corps celestes; car il paroît que les anciens Astronomes étoient fort éloignés de prétendre à une aussi grande précision.

Chacun pourra faire la comparaison de mon observation avec les Ephemeriques qui ont été publiées, & qui ont été calculées par des Particuliers sur des Tables dont la plupart laissent à juger qu'ils sont les Auteurs.

Cette Eclipse a été observée au Château de Marly en présence du Roy & de toute la Cour, par deux Astronomes de l'Academie qui y avoient été mandés par Sa Majesté.

La hauteur du Pole au Château de Marly est de  $48^{\circ} 31' 35''$ , & la différence des meridiens entre ce Château & l'Observatoire Royal est de  $14' 18''$  de degré ou de  $57''$  d'heure, comme je l'ay conclu des observations qui en ont été faites.



## COMPARAISON

De Forces centrales avec les Pesanteurs absolues des corps usés de viesses variées à discrétion le long de telles Courbes qu'on voudra.

PAR M. VARIGNON.

1706.  
24 Avril.

ON sçait que tout corps qui se meut en rond, ou en ligne courbe quelconque, est dans un effort continuél pour s'échaper suivant la tangente de cette Courbe à chaque point où il se trouve : de maniere qu'il s'échaperoit effectivement suivant cette touchante, s'il n'étoit incessamment retiré ou repoussé vers le dedans de cette même Courbe.

De cet effort pour s'échaper suivant la touchante de la Courbe que ce corps décrit, à chaque point où il se trouve, il en résulte nécessairement un autre effort en vertu duquel ce même corps tend à s'éloigner de cette Courbe. C'est ce dernier effort que sent la main qui fait tourner une pierre attachée au bout d'une corde qu'elle retient ; soit que cette main lui fasse décrire un cercle, en ne lui permettant qu'une certaine longueur, toujours la même, de cette corde ; ou qu'elle lui fasse décrire quelqu'autre Courbe que ce soit, selon qu'elle lui en lâchera plus ou moins : c'est aussi ce même effort qu'on appelle d'ordinaire la *Force centrifuge* de cette pierre, ou de tout autre corps qui se meut en ligne courbe. Mais comme il y en a aussi de *centripetes*, telles que celle qu'il faudroit pour décrire une Hyperbole par raport au foyer de son opposée, vers lequel le corps qui la décriroit, tendroit toujours à s'approcher ; nous les avons appellées jusqu'ici du nom commun de *Forces centrales*, de même que celles que le corps *Décrivant* doit avoir en sens contraire (soit qu'on le tire, soit qu'on le pousse) vers le dedans de la Courbe qu'il décrit ; lesquelles Forces

doivent toujours être égales à celles-là (chacune à celle qui lui est directement opposée) pour les contre-balancer, & pour empêcher ainsi ce corps de s'écarter de cette Courbe. L'égalité de ces Forces-ci avec les centrales qu'elles contre-balancent, fera que dans la suite on les prendra indifféremment les unes pour les autres, selon qu'il sera plus facile de les exprimer.

J'ay déjà donné plusieurs Regles générales pour connoître le rapport de ces forces entr'elles, dans les Memoires de 1700 J'ay même donné la manière d'en trouver à l'infini dans ceux de 1701. J'ay donné encore en 1703 la manière d'en trouver aussi une infinité de pareille étendue pour le cas où plusieurs de ces forces centrales agiroient toutes à la fois sur le corps *décrivant*, quelles que fussent leurs directions & la Courbe résultante de leur concours d'action. De sorte que pour rendre cette Theorie complete, il ne reste plus (ce me semble) qu'à trouver de pareilles Regles pour connoître absolument ces forces, c'est-à-dire, pour connoître leur rapport à quelque force connue, telle qu'on suppose d'ordinaire la pesanteur des corps: En voici encore à l'infini, & toutes aussi générales que les précédentes, dans la Solution du Problème suivant, & dans les conséquences qui s'en tirent.

### *Avertissement.*

Pour démêler les Forces centrales des Corps d'avec leurs Pésanteurs, on supposera par tout dans la suite, que les Courbes qu'on leur fera décrire, seront toutes sur des surfaces mathématiques horizontales, lesquelles rendent ces corps comme sans pesanteur, en soutenant ce qu'ils en ont.

## PROBLEME.

*Trouver le rapport des Forces centrales ( tant centrifuges que centripetes ) aux Pésanteurs absolues des Corps mis de vitesses variées à discretion le long de telles Courbes qu'on voudra.*

## SOLUTION.

Construction  
& définitions

FIGURE I.

I. Soit une Courbe quelconque  $MLN$  décrite par le corps  $L$  mù suivant  $MLN$  avec telle variation de vitesses qu'on voudra , en tendant toujours vers un point quelconque  $C$  du plan de cette Courbe , ou directement à contre-sens : On demande le raport de la pesanteur absolue de ce corps , avec ce qu'il fait d'effort à chaque point  $L$  de cette Courbe pour s'en écarter en suivant la tangente  $LQ$  , ou ( ce qui revient au même ) avec les forces qui égales à ces efforts , le retiennent toujours sur cette Courbe , en l'attirant ou en le repoussant incessamment & directement contr'eux suivant  $LC$ . Le point  $C$  s'appellera le *Centre* de ces forces ; & les droites  $LC$  ,  $lC$  , &c. leurs *Rayons*.

Soit l'arc  $Ll$  indéfiniment petit , des extrémités duquel partent les rayons  $LC$  ,  $lC$  , avec la petite droite  $lP$  parallèle à  $LC$  , & qui rencontre en  $P$  la tangente  $LQ$ . Soit de plus  $HL$  la hauteur de laquelle le corps  $L$  tombant par sa pesanteur , il acquieroit en  $L$  en vertu de cette seule pesanteur , la vitesse qu'il a effectivement en ce point suivant  $Ll$  , ou pour suivre  $LP$  : Cette hauteur s'appellera dans la suite *Déterminatrice* de cette vitesse , pour n'être pas obligé de repeter cette grande phrase toutes les fois qu'on en parlera.

Expression  
des tems requis au corps  
L écrivain ,  
pour acquies  
en tombant la  
vitesse qu'il a  
le long de cha-  
que élément

II. Cela posé , il est visible que si l'en prend la tangente  $LQ$  double de la verticale  $HL$  , & qu'on imagine le corps  $L$  se mouvoir uniformément de cette vitesse suivant  $LQ$  ; non-seulement il parcourra cette longueur  $LQ$  dans un tems égal à celui qu'il auroit mis à tomber de  $H$  en  $L$  , en commençant en  $H$  ; mais encore si l'on prend la partie

Indefiniment petite  $LP$  de cette tangente pour le tems de la Courbe qu'il décrir. qu'il mettroit à parcourir de cette même vitesse cet élément  $LP$ , c'est-à-dire (*hyp.*) pour le tems qu'il met à parcourir effectivement  $LI$ , l'on aura aussi  $LQ$  pour celui pour par- qu'il employeroit à parcourir ainsi cette même  $LQ$ , ou à courir ces élé- ment de cette même vitesse. tomber de  $Hen$   $L$  par sa seule pesanteur.

III. Cela étant, si l'on suppose que la force centrifuge Expression de ou centripete (qui feroit parcourir  $LP$  au corps  $L$  dans le l'espace que le tems qu'abandonné à lui-même il parcourroit  $LP$ , ou que corps l'écri- retenu sur la Courbe il parcourt effectivement l'élément  $LI$ ) agit incessamment & uniformément sur le corps  $L$  vant parcou- suivant  $PI$ , de même que la pesanteur fait de haut en bas roit en vertu dans l'hypothèse de Galilée; on verra que puisque cette de sa force cen- force centrale en  $L$ , est capable de lui faire parcourir  $PI$  trale constan- dans le tems  $LP$ ; si l'on fait cette analogie  $LP : LQ ::$  te pendant un  $PI : LQ \times PI$ . Ce quatrième terme sera l'espace que cette tems égal à force centrale inhérente comme une espèce de pesanteur celui qu'il lui dans le corps  $L$ , lui feroit parcourir dans le tems  $LQ$  que faudroit pour sa pesanteur (*art. 2.*) le fait tomber de même de  $H$  en  $L$ ; acquérir en puisqu'alors les espaces seroient comme les quarrés des tombant en tems. versu de sa

IV. Donc  $HL$  &  $\frac{LQ \times PI}{LP}$  sont les espaces que la pesan- Regle de com- teur du corps  $L$ , & sa force centrale en  $L$  suivant  $LC$ , lui paraison des feroient parcourir de la même maniere en tems égaux. forces centra- Par conséquent ces deux forces doivent être entr'elles les avec les comme ces espaces: c'est-à-dire que si l'on prend  $p$  pour pesanteurs des la pesanteur de ce corps, &  $f$  pour sa force centrale en  $L$  corps. par rapport au centre  $C$ , l'on aura  $f.p :: \frac{LQ \times PI}{LP}$ .  $HL$  ( $\frac{LQ \times PI}{LP}$  cause que suivant l'art. 2.  $LQ$  est  $= 2HL$ , &  $LP = LI$ ):  $HL$ . Ce qui donne  $f = \frac{4p \times HL \times PI}{LI \times LI}$  (en prenant aussi  $b$  pour  $HL$ )  $= \frac{4pb \times PI}{LI \times LI}$  pour une Regle générale de comparaison entre les forces centrales & les pesanteurs des corps. Ce qu'il falloit trouver.

*Autremaniere de démontrer la même Règle.*

V. *Autrement.* Puisqu'on suppose (art. 1.) l'élément  $LI$  de la Courbe  $MLN$ , parcouru d'une vitesse égale à ce que le corps  $L$  qui la décrit, en auroit acquis en  $L$  en vertu de sa chute de  $H$  en  $L$ , & que d'ailleurs ce corps mû de cette vitesse uniforme parcourroit le double de  $HL$  dans le tems de cette chute; ce tems de sa chute de  $H$  en  $L$ , sera au tems qu'il met à parcourir  $LI$  ::  $2HL$ .  $LI$ . Donc en appellant  $dt$  la durée de l'instant que ce corps employe à parcourir l'élément  $LI$ , l'on aura  $\frac{2HL \times dt}{LI}$  pour le tems de sa chute faite de  $H$  en  $L$  en vertu de sa seule pesanteur. Par conséquent les espaces ainsi parcourus en vertu des forces constantes & incessamment appliquées, telles qu'on suppose d'ordinaire la pesanteur, & que toute force centrale l'est à chaque instant, étant en raison composée de ces forces & des quarrés des tems employés à parcourir ces espaces; l'on aura aussi (en prenant encore  $f$  pour la force centrale du corps  $L$  suivant  $Pl$  ou  $LC$ , &  $p$  pour sa pesanteur)  $Pl. HL :: f dt^2. p \times \frac{4HL}{LI} \frac{dt^2}{LI}$ .

Ce qui donnera encore  $f = \frac{4p \times HL \times Pl}{LI \times LI}$  (en prenant aussi  $h$  pour  $HL$ )  $= \frac{p \times Pl}{LI \times LI}$ , ainsi qu'on le vient de trouver dans l'art. 4.

*Troisième maniere de démontrer la même Règle.*

VI. *Autrement encore.* Toutes choses demeurant les mêmes que dans l'art. 2. si l'on prend  $H\lambda$  pour ce que le corps tombant de  $H$  parcourroit de la hauteur  $HL$  en vertu de sa seule pesanteur, dans l'instant que sa force centrale lui fait faire  $Pl$ , cette force centrale ( $f$ ) se trouvera pour lors être à la pesanteur ( $p$ ) de ce corps ::  $Pl. H\lambda$ . Mais ce tems par  $Pl$ , ou par  $H\lambda$ , étant (art. 2.) à celui de la chute de  $H$  en  $L$  ::  $LP (LI). LI$  ( $2HL$ ). L'on aura de plus  $H\lambda. HL :: LI \times LI. 4HL \times HL$ . ou  $H\lambda = \frac{LI \times LI}{4HL}$ . Donc ou aura aussi pour lors  $f.p :: Pl \frac{LI \times LI}{HL}$ . Ce qui donne encore  $f = \frac{4p \times Hl \times Pl}{LI \times LI} = \frac{4p \times Pl}{LI \times LI}$ , comme dans les art. 4. & 5.

*Quatrième maniere de*

VII. *Autrement encore.* Dans la Remarque des Memoi-



res de 1700. pag. 234. supposant les Courbes  $MLN$ , *démontrer la même Règle par une autre des Mem. de 1700.*  
 $ZET$ , décrites par deux corps  $L$ ,  $E$ , dont les masses étoient  $m$ ,  $\mu$ ; leurs forces centrales  $f\phi$ , vers  $C$ ,  $D$ ; les longueurs parcourues en vertu de ces forces à chaque instant, étoient  $Pl$ ,  $Fe$ , parallèles à  $LC$ ,  $ED$ ; enfin ces instans étoient  $dt$ ,  $d\theta$ : Cela (dis-je) supposé dans cette Remarque, on y a conclu de la page 111. des Mem. de 1693, cette Règle générale  $Pl \times m \phi d\theta^2 = Fe \times \mu f dt^2$ , ou  $\frac{f dt^2}{m \times Pl} = \frac{\phi d\theta^2}{\mu \times Fe}$ , laquelle sera encore démontrée ci-après dans l'art 10.

VIII. Soit présentement  $p$  la véritable pesanteur du corps  $E$ , telle qu'on la suppose d'ordinaire dans l'hypothèse de Galilée, &  $h$  une hauteur finie que ce corps parcourt en vertu de cette pesanteur dans un tems quelconque  $\theta$ , au lieu de tourner autour du point  $D$  sur la Courbe  $ZET$ , comme ci-dessus art. 7. il est visible qu'en substituant  $p$  au lieu de  $\phi$ ,  $h$  au lieu de  $Fe$ , &  $\theta^2$  au lieu de  $d\theta^2$ , dans la dernière équation de cet art. 7. L'on aura ici  $\frac{f dt^2}{m \times Pl} = \frac{p \theta^2}{\mu h}$ . *Comment la Règle en question se déduit de celle des Mem. de 1700. rapportée dans le précédent article 7.*

Mais si l'on suppose que la vitesse instantanée, & par conséquent uniforme pendant son instant, avec laquelle l'élément  $Ll$  est parcouru par le corps  $L$ , soit égale à ce que la pesanteur ( $p$ ) du corps  $E$  en donneroit à ce même corps  $E$  à la fin de sa chute faite de la hauteur quelconque  $h$ , & qu'on prenne cet élément  $Ll$  pour le tems ou l'instant ( $dt$ ) employé par le corps  $L$  à le parcourir: l'on aura aussi  $2h$  pour le tems ( $\theta$ ) employé par le corps  $E$  à tomber de la hauteur  $h$ ; puisque (suivant Galilée) dans ce même tems cette même vitesse acquise (*hyp.*) à la fin de la chute de ce corps, faite de la hauteur  $h$ , demeurant uniforme, lui feroit parcourir le double de  $h$ ; & que d'ailleurs on sçait que les tems sont toujours comme les espaces parcourus avec des vitesses uniformes & égales.

Donc en substituant  $2h$  pour  $\theta$ ,  $4hb$  pour  $\theta^2$ , &  $Ll$  pour  $dt$ , dans l'équation  $\frac{f dt^2}{m \times Pl} = \frac{p \theta^2}{\mu h}$  trouvée au commen-

cement de cet article-ci, l'on aura encore ici  $\frac{f \times Ll^2}{m \times Pl} = \frac{4ph}{\mu}$ . Par conséquent en supposant le corps  $L$  égal au corps  $E$ ,

184 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE  
c'est-à-dire  $m = \mu$ , & sa pesanteur aussi  $= p$ , l'on aura de

même  $\frac{f \times l}{Pl} = 4 p h$  par rapport au seul corps  $L$ , ou bien encore  $f = \frac{4 p h \times Pl}{Ll \times Ll}$ , comme dans les art. 4, 5. & 6.

*Introduction  
du rayon oscu-  
lateur dans  
la presente  
Regle de com-  
paraison des  
forces centra-  
les avec les  
pesanteurs des  
corps, en consi-  
derant les élé-  
mens des cour-  
bes que ces  
corps décri-  
vent, comme  
courbes eux-  
mêmes.*

FIG. I.

I X. Il est ici à remarquer qu'en regardant (ainsi qu'on l'a fait par tout cy-dessus)  $Pl$  comme parcourüe d'un mouvement accéléré pendant que  $LP$  est parcourüe d'un mouvement uniforme, l'élément  $Ll$  décrit par le concours de ces deux mouvemens, doit être icy regardé comme courbe, & comme un véritable arc dans lequel la Courbe  $MLN$  est baissée par son cercle osculateur en cet endroit; & par conséquent comme un véritable arc de ce cercle, & non comme un côté droit de Polygone, ainsi qu'on le suppose d'ordinaire, & qu'on l'a supposé jusqu'ici dans la recherche des Rayons des Developpées. Donc en prenant  $R$  pour le centre de ce cercle osculateur en  $Ll$ ;  $LR$  pour celui de ses rayons qui est perpendiculaire à la touchante en  $L$ ; &  $Rl$  pour un autre de ses rayons infiniment près de celui-là, & qui prolongé rencontre en  $E$  cette même touchante  $LQ$ ; la Prop. 36. du Liv. 3. d'Euclide donnera  $LE \times LE = El \times ER + LR = 2LR \times El$ , ou  $El = \frac{ER \times E}{2 \times R} = \frac{Ll \times Ll}{2LR}$ .

Or, en faisant  $lF$  perpendiculaire en  $F$  sur la tangente  $LQ$ , &  $LD$  perpendiculaire en  $D$  sur l'ordonnée  $Cl$ , laquelle prolongée rencontre en  $S$  cette même tangente  $LQ$ ; les triangles rectilignes semblables  $EFl$ ,  $ELR$ , &  $SPl$ ,  $SLC$ , donneront  $El.Fl :: ER.LR$ . Et  $Sl.Pl :: SC.LC$ . Et par conséquent aussi  $El = Fl$ , &  $Sl = Pl$ , à cause que l'arc indéfiniment petit  $Ll$  rend  $ER = LR$ , &  $SC = LC$ . De plus les triangles rectilignes semblables  $SFl$ ,  $SDL$ , donneront pareillement  $LS$  ou  $Ll.LD :: Sl$  ou  $Pl.lF$  ou  $El = \frac{D \times Pl}{Ll}$ .

Donc ayant déjà  $El = \frac{Ll \times Ll}{2 \times R}$ , l'on aura enfin  $\frac{L^2 \times Pl}{Ll} = \frac{Ll \times Ll}{2 \times R}$ , ou  $Pl = \frac{Ll \times Ll \times Ll}{2LR \times LD}$ . Donc aussi en substituant cette valeur

valeur de  $Pl$  dans la formule générale  $f = \frac{4pb \times Pl}{Ll \times Ll}$  des art. 4, 5, 6, & 8. l'on aura  $f = \frac{2pb \times Ll}{LR \times LD}$ . De sorte que si présentement on appelle  $LR, r$ ;  $Ll, ds$ ; &  $LD, dx$ ; l'on aura de même en général  $f = \frac{2pbds}{r dx}$  pour la règle de comparaison des Forces centrales avec les pesanteurs des corps *Ce qu'il falloit trouver.*

## SCHOLIE.

X. Afin de n'être pas obligé de recourir aux Mémoires de 1700. ni de 1693. qu'ils supposent pour la preuve de la Règle de l'art. 7. où l'on vient de les citer, voici encore une autre démonstration de cette Règle.

*Démonstration de la règle des Mem. de 1700. rapportée ci-dessus art 7.*

Toutes choses demeurant les mêmes que ci-dessus art. 8. soient de plus les Courbes  $GHI, OFW$ , décrites par les corps  $H, V$ , mûs suivant  $Hh, Vu$ , en tendant toujours aux centres  $A, B$ , avec des forces lesquelles les empêchent de suivre les tangentes  $HK, VT$ , en les retirant ou repoussant incessamment vers ces Courbes, de manière à leur faire parcourir  $Kh, Tu$ , parallèles à  $AH, BV$ , dans les instans qu'ils parcourent effectivement les élémens  $Hh, Vu$ , de ces mêmes Courbes. Tout le reste demeurant comme on le voit dans les Figures 1, 2, 3, 4. soient donc

FIGURE I.  
II.  
III.  
IV.

Les corps mûs en lignes courbes . . .  $L, H, V, E$ .

Les quantités dont ils s'approchent de ces Courbes en s'éloignant de leurs tangentes à chaque instant. }  $Pl, Kh, Tu, Fe$ .

Ces mêmes instans . . . . .  $dt, dt, d\theta, d\theta$ .

Les Forces centrales en vertu desquelles se font ces approches instantanées . . . . . }  $f, \phi, \phi, \phi$ .

Les masses de ces corps . . . . .  $m, m, m, \mu$ .

Ces noms supposés, l'on aura }  $Pl. Kh :: f. \phi$   
 }  $Kh. Tu :: dt^2 d\theta^2$   
 }  $Tu. Fe :: \mu. m$ .

Donc en multipliant ces trois analogies par ordre, l'on

aura aussi  $Pl. Fe :: \mu f dt^2. m \phi d\theta^2$ . Et par conséquent  $Pl \times m \phi d^2 :: Fe \times \mu f dt^2$ , ou  $\frac{f dt^2}{m \times Pl} = \frac{\phi d\theta^2}{\mu \times Fe}$ , ainsi que dans l'art. 7.

*On ne s'arrêtera point ici aux Corollaires qu'on pourroit tirer de cette Regle, ne s'agissant ici que de celle qu'on vient de trouver dans l'art. 9. En voici encore deux Démonstrations différentes dans les deux Solutions suivantes.*

## AUTRE SOLUTION.

*Reg'e de comparaison des forces centrales entr'elles.*

**FIG. I.** XI. Toutes choses demeurant les mêmes que dans les art. 4, & 9. les triangles rectilignes semblables  $RLE, lFE$ , donneront  $RL. RE :: lF. lE$ . De sorte que l'angle (*hyp.*) infiniment petit  $LRE$  rendant  $RL = RE$ , l'on aura pareillement  $lF = lE$ . Donc la nature du cercle osculateur en  $Ll$ , comme de tout autre, donnant  $lE = \frac{LE \times LE}{ER + Rl} = \frac{Ll \times Ll}{2 RL}$ , l'on aura de même  $lF = \frac{Ll \times Ll}{2 RL}$  (*art. 9.*)  $= \frac{Ll^2}{2r}$ . Donc les triangles rectilignes semblables  $SDL, SF l$ , donneront aussi  $SL$  ou  $lL(ds). DL(dx) :: Sl. Fl :: f$  (force suivant  $SC$  ou  $LC$ ).  $\frac{f dx}{ds}$  (force suivant  $Fl$ ). De sorte que l'espace  $Fl \left( \frac{ds^2}{2r} \right)$  est ce qu'il y en a de parcouru en vertu de cette force  $\left( \frac{f dx}{ds} \right)$  pendant l'instant  $dt$  que le corps  $L$  décrit l'arc élémentaire  $Ll$  au lieu de suivre la tangente  $LQ$ , comme il auroit fait sans cette force ou sans  $f$ . Donc cette force instantanée  $\left( \frac{f dx}{ds} \right)$  lui ayant été continuellement appliquée pendant ce tems  $dt$ , & d'ailleurs étant constant (*art. 10.*) que des espaces ainsi parcourus par un même corps en vertu de forces toujours les mêmes le long de chacun de ces espaces, & toujours appliquées (ainsi qu'on le pense ordinairement de la pesanteur), sont comme les produits de ces forces par les quarrés des tems de leur application non interrompue; l'on aura déjà  $\frac{ds^2}{2r} = \frac{f dx}{ds} \times dt^2$ , ou  $f = \frac{ds^3}{2r dx dt^2}$  pour une Regle générale du rapport des forces centrales entr'elles, tendantes vers  $C$  ou directement à

contre-sens, quelques variées qu'elles soient sur une même Courbe quelconque  $MLN$ , en conséquence de la variété des vitesses avec lesquelles cette Courbe peut être décrite par un même corps.

XII. *Autrement.* Soient de plus les ordonnées  $CL$ ,  $Cl$ , &c. appelées  $y$ ; & par conséquent  $Dl = dy$ . Les triangles rectilignes semblables  $SDL$ ,  $SFl$ , donneront ici  $LD$  ( $dx$ ).  $SD$  ou  $LD$  ( $dy$ ) ::  $LF$  ( $\frac{ds^2}{2r}$ ).  $SF = \frac{dyds^2}{2r dx}$ . Et  $SL$  ou  $LL$  ( $ds$ ).  $SD$  ou  $LD$  ( $dy$ ) ::  $SL$ .  $SF$  ::  $f$  (force suivant  $SC$  ou  $LC$ ).  $\frac{f dy}{ds}$  (force suivant  $SF$ ). Donc on aura encore (comme ci-dessus art. 11.)  $\frac{dyds^2}{2r dx} = \frac{f dy}{ds} \times dt^2$ , ou  $f = \frac{ds^3}{2r dx dt^2}$ , c'est-à-dire, encore la même Règle que dans le précédent art. 11.

*Autre démonstration de la même Règle.*

XIII. *Autrement encore.* Les triangles rectilignes semblables  $SDL$ ,  $SFl$ , donneront aussi  $DL$  ( $dx$ ).  $SL$  ou  $Ll$  ( $ds$ ) ::  $Fl$  ( $\frac{ds^2}{2r}$ ).  $Sl = \frac{ds^3}{2r dx}$ . Donc on aura encore (comme ci-dessus art. 11.)  $\frac{ds^3}{2r dx} = f dt^2$ , ou  $f = \frac{ds^3}{2r dx dt^2}$ , c'est-à-dire, encore la même Règle que dans les deux derniers art. 11, & 12.

*Troisième démonstration de la même Règle.*

XIV. Concevons présentement comme dans la première Solution, art. 1, 2, & 3. que  $HL$  est une hauteur d'où le corps  $L$  tombant, il acquieroit en  $L$  une vitesse égale à ce que sa rotation suivant  $MLN$  lui en donne en  $L$  suivant  $LQ$ . Cela étant, si l'on suppose aussi  $LQ$  double de  $HL$ , non-seulement cette vitesse demeurant uniforme pourroit porter ce corps de  $L$  en  $Q$  suivant  $LQ$ , dans le tems qu'il auroit mis à tomber de  $H$  en  $L$  en vertu de sa seule pesanteur; mais encore ce tems seroit à ce qu'il en auroit mis à parcourir  $LF$  ou  $LS$  de cette même vitesse uniforme, c'est-à-dire, à ce qu'il en met à parcourir effectivement  $LL$ , comme  $LQ$  est à  $LF$  ou  $LS$  ou  $LL$ : de sorte qu'en prenant  $LQ$  pour le tems que le corps  $L$  mettroit à tomber de  $H$  en  $L$ , l'on aura aussi  $LL$  pour l'instant qu'il emploie à parcourir cet élément de la Courbe  $MLN$

*Règle de comparaison des forces centrales avec les pesanteurs des corps, tirée de la précédente en considérant encore les éléments des Courbes que ces corps décrivent, comme Courbes eux-mêmes.*

Qu'on le suppose décrire. Donc si l'on prend cet instant pour le premier de sa chute pendant lequel il parcourt  $H\lambda$ , l'on aura  $L\overline{Q} : \overline{Ll} :: HL : H\lambda = \frac{HLx - l^2}{l\overline{Q}}$  ( à cause qu'on suppose ici  $Ll = ds$ , &  $L\overline{Q} = 2HL = 2h$ )  $= \frac{ds^2}{4h}$ .

Mais cet instant que le corps  $L$  emploie à parcourir  $Ll$ , est aussi celui que ces forces (*art. 11, 12, 13.*)  $\frac{flux}{ds}, \frac{f dy}{ds}, f$ , emploient à lui faire parcourir  $Fl, SF, Sl$ , d'un mouvement accéléré à la maniere de celui que sa pesanteur lui donneroit de  $H$  en  $\lambda$  pendant ce même instant. Donc sa pesanteur (appelée  $p$ ) est à chacune de ces forces, comme  $H\lambda (\frac{ds^2}{4h})$  est à chacune des longueurs  $Fl (\frac{ds^2}{2r})$ ,  $SF (\frac{dy ds^2}{2r dx})$ ,  $Sl (\frac{ds^3}{2r dx})$ , qui leur répondent dans les *art. 11, 12, 13.* c'est à dire,

$$\begin{aligned} 1^{\circ}. \quad p. \quad \frac{f dx}{ds} &:: H\lambda (\frac{ds^2}{4h}). \quad Fl (\frac{ds^2}{2r}). \\ 2^{\circ}. \quad p. \quad \frac{f dy}{ds} &:: H\lambda (\frac{ds^2}{4h}). \quad SF (\frac{dy ds^2}{2r dx}). \\ 3^{\circ}. \quad p. \quad f &:: H\lambda (\frac{ds^2}{4h}). \quad Sl (\frac{ds^3}{2r dx}). \end{aligned}$$

Et toutes ces Analogies donnent également chacune  $f = \frac{2hp ds}{r dx}$ , qui est la même Regle de comparaison des forces centrales des corps avec leurs pesanteurs, qu'on a déjà trouvée dans la Solut. 1. *art. 9. Ce qu'il falloit encore trouver.*

# SCHOLIE.

*Indentité de la précédente Regle de comparaison des forces centrales entr'elles trouvée dans les art. 11, 12 & 13. avec celle qui se trouve pour le même sujet dans les Mé-* XV. On voit dans cette seconde Solution, non-seulement (*art. 14.*) le raport de la pesanteurs d'un corps quelconque aux forces centrales qu'il auroit sur une Courbe aussi quelconque qu'il décriroit de telle vitesse qu'on voudroit, c'est-à-dire, uniforme ou variée à discrétion, en tendant toujours vers un même point (quel qu'il fut) du plan de cette Courbe; mais encore (*art. 11, 12, 13.*) le raport de ces mêmes forces entr'elles, lequel s'exprimant ici par  $f = \frac{ds^3}{2r dx dt^2}$ , marque que ces forces centrales ( $f$ )

doivent toujours être entr'elles comme les fractions cor-  
respondantes  $\frac{ds^3}{r dx dt^2}$ ; ce qui s'accorde avec la Règle  $f =$  1701.

$\frac{ds^3}{r dx dt^2}$  que j'ay donnée de ce dernier raport dans les Mem.  
de 1701. pag. 21. & 22. où l'on appelloit  $n, y, dz$ , ce que l'on  
appelle ici  $f, r, dx$ . Le signe d'égalité dans les choses dispa-  
rates & hétérogenes (telles que sont ces forces & les gran-  
deurs qui les expriment ici) ne signifiant que des égalités  
de rapports. De sorte que  $f = \frac{m ds^3}{r dx dt^2}$  ne signifie autre chose  
non-plus, sinon que le raport des forces centrales  $f$  en-  
tr'elles, est toujours le même que celui qui se trouve en-  
tre les fractions correspondantes  $\frac{ds^3}{r dx dt^2}$ , quelque nombre  
(entier ou rompu, &c.) ou quelqu'autre grandeur con-  
stante que  $m$  puisse signifier: soit que  $m$  signifie l'unité,  
comme dans la formule  $f = \frac{ds^3}{r dx dt^2}$  de 1701. où qu'elle signi-  
fie un demi, comme dans la formule  $f = \frac{ds^3}{2r dx dt^2}$  des ar-  
ticles 11, 12, 13. sans qu'il s'ensuive  $\frac{ds^3}{r dx dt^2} = 2 \frac{ds^3}{r dx dt^2}$ , ou  
 $1 = 2$ , quoique la force  $f$  soit ici la même de part & d'au-  
tre; parceque ce ne seroient plus ici des égalités de ra-  
ports, mais de grandeurs homogenes entr'elles. Aussi cet-  
te expression  $f = \frac{m ds^3}{r dx dt^2}$  du raport des forces centrales en-  
tr'elles, se trouvera-t-elle comme les précédentes  $f =$   
 $\frac{ds^3}{r dx dt^2}$ ,  $f = \frac{ds^3}{2r dx dt^2}$ .

Car puisque les espaces  $Fl \left( \frac{ds^2}{2r} \right)$  parcourus (art. 11.) en  
vertu des forces instantanées  $\frac{f dx}{ds}$ , continuellement appli-  
quées chacune suivant le sien, & toujours les mêmes cha-  
cune pendant l'instant  $dt$  de son application non inter-  
rompue, sont entr'eux (art. 10.) comme les produits  $\frac{f dx}{ds} \times dt^2$   
de chacune de ces forces par le quarré de son instant; & que  
d'ailleurs ces espaces  $\frac{ds^2}{2r}$  sont aussi entr'eux comme leurs

produits  $\frac{m d s^2}{r}$  par quelque grandeur constante  $2 m$  que ce soit ; l'on aura aussi ces produits  $\frac{m d s^2}{r}$  en même raison que les autres  $\frac{f d x}{d s} \times d t^2$  : ce qui donnera  $\frac{r d s^2}{r} = \frac{f d x}{d s} \times d t^2$ , ou  $f = \frac{m d s^2}{r d x d t^2}$ , par la même raison qu'on a trouvé ci-dessus (*art.* II.)  $\frac{d s^2}{2 r} = \frac{f d x}{d s} \times d t^2$ , ou  $f = \frac{d s^2}{2 r d x d t^2}$ , & dans les Mem. de 1701.  $\frac{d s^2}{r} = \frac{f d x}{d s} \times d t^2$ , ou  $f = \frac{d s^2}{r d x d t^2}$  ; tout cela ne signifiant autre chose sinon que les forces centrales  $f$  tendantes suivant des lignes qui passent toutes par un point quelconque du plan de quelque Courbe que ce soit, décrite avec telle variation de vitesse qu'on voudra, seront par tout entr'elles comme les fractions correspondantes  $\frac{d s^2}{r d x d t^2}$ , ainsi qu'on le vient de dire, & qu'on l'avoit déjà dit dans les Mem. de 1701.

*Solution de* XVI. La seconde Solution précédente se peut encore  
*Part. 14.* trouver sans toucher à ce raport des forces centrales entr'elles, en reprenant seulement ici quelque chose de ce  
*sans toucher* qui y a conduit dans l'art. 12. Et comme il y a peu de chose  
*au raport* à répéter de cet article, nous l'allons faire pour rendre  
*des forces cen-* ici cette Solution complete, en appliquant seulement  
*trales entr'elles.* l'art. 14. à ce que nous allons démontrer, comme il se trouve appliqué à l'art 12.

Toutes choses demeurant donc encore les mêmes que dans les art. 4. & 9. les triangles rectilignes semblables  $RLE$ ,  $IFE$ , donneront  $RL : RE :: IF : IE$ . De sorte que l'angle (*hyp.*) infiniment petit  $LRE$  rendant  $RL = RE$ , l'on aura pareillement  $IF = IE$ . Donc le cercle osculateur de la Courbe  $MLN$  en son élément  $Ll$  pris, non comme un côté droit de polygone, mais comme un véritable arc de cercle, donnant ( par sa nature de cercle )  $IE = \frac{LE \times LE}{ER + RL} = \frac{Ll \times Ll}{2 RL}$ , l'on aura de même  $IF = \frac{Ll \times Ll}{2 RL}$  (*art.* 9.)  $= \frac{d s^2}{2 r}$ .

De plus les triangles rectilignes semblables  $SDL$ ,  $sFl$ ,



donneront aussi  $DL (dx) \cdot SD$  ou  $LD (dy) :: Fl \left( \frac{ds^2}{2r} \right)$ .

$SF = \frac{dy ds^2}{2r dx}$ . Et  $SL$  ou  $LL (ds) \cdot SD$  ou  $LD (dy) :: Sl \cdot SF ::$

$f$  (force suivant  $SC$  ou  $LC$ )  $\cdot \frac{f dy}{ds}$  (force suivant  $SF$ ).

Ajoutez à ceci l'art. 14. & il en résultera, comme de l'art. 12. La formule  $f = \frac{2h p ds}{r dx}$  trouvée dans ce même art. 14. & dans l'art. 9.

*Cet art. 16. n'est que pour faire sentir comment on auroit pu se passer de la Regle des forces centrales entr'elles, pour trouver les trois Solutions de l'art. 14. Ce qu'on vient de dire de la seconde, se dira de même de la premiere & de la troisième, en se servant des art. 11. & 13. comme l'on vient de faire de l'art. 12.*

### TROISIÈME SOLUTION.

XVII. Jusqu'ici nous avons regardé la force centrale du corps  $L$  en chaque point  $L$  de la Courbe  $MLN$  qu'on le suppose décrire de telle vitesse qu'on voudra, comme une espece de pesanteur ou de force constante tendante vers  $C$ , laquelle agissant incessamment sur ce corps, lui feroit parcourir d'un mouvement arithmetiquement accéléré le côté  $LK$  du parallelogramme  $PK$ , ou son opposé  $PL$ , pendant l'instant que libre en  $L$ , sa vitesse de rotation en ce point  $L$  suivant  $LQ$ , lui feroit parcourir d'un mouvement uniforme la partie infiniment petite  $LP$  de cette tangente; & le mouvement résultant de ces deux-là suivant l'élément  $LL$ , devant se faire en ligne courbe, nous avons été obligés de regarder cet élément & les autres de la Courbe  $MLN$ , comme veritablement courbes en ces endroits, & la tangente  $ILQ$  au seul point  $L$ , comme celle suivant laquelle la vitesse de rotation du corps  $L$  tend à l'emporter.

Mais si l'on veut regarder cette Courbe  $MLN$  comme un polygone infiniti-latere, dont les éléments  $ML$ ,  $IL$ , &c. soient autant de petits côtés droits les plus petits qui se puissent supposer; en ce cas le petit côté  $ML$  prolongé vers  $T$ , devenant la tangente suivant laquelle la vitesse

*Démonstration de la même Regle de comparaison des forces centrales avec les pesanteurs des corps, tirée présentement de la consideration des Courbes sous la forme de polygones infiniti-latere rectilignes*  
FIG. V.

de rotation en  $L$  du corps *décrivant*, tend à l'emporter d'un mouvement uniforme; il lui faut supposer encore une autre force suivant  $LC$ , capable de lui faire parcourir aussi d'un mouvement uniforme le côté  $LG$  du parallélogramme  $YG$ , ou son opposé  $YL$ , pendant le même instant que sa vitesse de rotation emploieroit à lui faire parcourir  $LY$ , ou qu'il emploie effectivement à parcourir  $LL$ . Or si l'on considère que la vitesse précédente (*Solut. 1. & 2.*) de ce corps  $L$ , accélérée de  $P$  en  $l$  à la manière de celle des chutes des corps pesans, devroit lui donner en  $l$  une vitesse qui uniforme seroit capable de lui faire parcourir  $YL$  double de  $Pl$ , dans un instant égal à celui qu'il auroit mis à tomber (pour ainsi dire) de  $P$  en  $l$  en vertu de sa seule force centrale regardée comme une espece de pesanteur tendante en  $C$ , ou qu'il a effectivement mis à parcourir  $LL$ ; on verra que du concours de cette vitesse uniforme en  $L$  suivant  $LG$ , avec celle de rotation suivant  $LY$ , ce corps non-seulement parcourroit la diagonale  $LL$  du parallélogramme  $YG$  pendant ce même instant; mais aussi qu'il arriveroit en  $l$  avec la même vitesse que s'il arrivoit (comme ci-dessus *Solut. 1. & 2.*) par le concours de sa vitesse de rotation suivant  $LQ$ , avec la précédente vitesse accélérée de  $P$  en  $l$ . Donc ce corps  $L$  décrira l'élément  $Ll$  dans des instans égaux, & avec une même vitesse en  $l$ , soit qu'il le décrive par le concours de cette vitesse accélérée de  $P$  en  $l$  avec sa vitesse uniforme de rotation suivant  $LQ$ , ou qu'il le décrive par le concours de cette vitesse uniforme suivant  $LT$  avec une autre pareillement uniforme suivant  $LG$  ou  $YL$ , égale à l'acquise en  $l$  par cette accélération. Donc aussi les deux côtés  $LY$ ,  $LG$ , du parallélogramme  $YG$ , sont entr'eux comme ces deux vitesses uniformes, ou (ce qui revient au même) comme les forces productrices de ces vitesses: c'est-à-dire, que  $LY$  est à  $LG$ , comme la force acquise en  $L$  par la chute de  $H$  en  $L$  du corps  $L$  en vertu de sa seule pesanteur, est à sa force acquise en  $l$  par une semblable chute de  $P$  en  $l$  en vertu de sa seule force centrale.

XVIII. Or il est manifeste que la pesanteur d'un corps agissant également sur lui dans tous les instans de sa chute, & tous ces efforts égaux chacun à sa pesanteur, se conservant & s'accumulant ( pour ainsi dire ) dans toute la durée de sa chute, leur nombre à chaque instant doit être comme le nombre des instans écoulés depuis le commencement de cette même chute jusqu'à cet instant; & par conséquent leur somme, c'est-à-dire, la force acquise de ce corps à chaque instant doit être égale au produit de sa pesanteur par le nombre de ces instans, ou par la durée de sa chute jusqu'à ce même instant.

*Continuation de la même démonstration*

On sçait aussi que la force totale de ce corps en  $L$ , acquise par sa chute de  $H$  en  $L$  en vertu de sa seule pesanteur, seroit seule capable de lui faire parcourir  $LT$  double de  $HL$  d'une vitesse uniforme égale à ce qu'il en auroit acquis en  $L$  en vertu de sa chute, & dans un tems égal à celui de cette chute de  $H$  en  $L$ . Donc la force totale de ce corps à la fin de sa chute en  $L$  en vertu de sa seule pesanteur, est égale au produit de sa pesanteur par le tems qu'il emploieroit à parcourir  $LT$  double de  $HL$  d'une vitesse uniforme égale à ce qu'il en auroit ainsi acquis en  $L$ , c'est-à-dire (*hyp.*) égale à sa vitesse de rotation en  $L$ .

On prouvera de même que la force de ce corps acquise en  $l$  par son espece de chute de  $P$  en  $l$  en vertu de sa seule force centrale, doit aussi être égale au produit de cette force centrale par le tems qu'elle emploieroit à le faire ainsi tomber de  $P$  en  $l$ , ou (*hyp.*) que sa vitesse uniforme de rotation emploieroit à lui faire parcourir  $LP$  ou  $LY$ .

Donc en prenant les longueurs  $LT$ ,  $LY$ , pour le tems que le corps  $L$  emploieroit à les parcourir de cette vitesse uniforme de rotation;  $p$ , pour la pesanteur de ce corps; &  $f$ , pour sa force centrale en  $L$  suivant  $LC$ ; l'on aura  $p \times LT$  pour la force totale de ce corps acquise en  $L$  par sa chute de  $H$  en  $L$  en vertu de sa seule pesanteur; &  $f \times LY$  pour la force totale pareillement acquise en  $l$  par une semblable chute de  $P$  en  $l$  en vertu de sa seule force centrale. Donc aussi

(art. 17.)  $LY.LG::p \times LT.f \times LY$ . ou  $f = \frac{p \times LT \times LG}{LY \times LY}$  (à cause qu'on suppose ici  $LT = 2 HL$ , &  $LG = Yl$ )  $= \frac{2p \times HL \times Yl}{LY \times LY}$   
 $= \frac{2p \times HL \times Yl}{Ll \times Ll}$ .

*Conclusion.* XIX. Cela étant, si l'on prend (comme l'on vient de faire art. 17.) la Courbe  $MLN$  pour un polygone infinitesimale, dont  $RL$ ,  $Rl$ , soient deux rayons de sa Développement, & que  $lZ$  soit un arc de cercle décrit du centre  $L$ ; la ressemblance des triangles  $LRl$ ,  $lLZ$ , donnera  $RL.Ll::Ll.lZ = \frac{Ll \times Ll}{RL}$ . Et si l'on prolonge  $Cl$  jusqu'à la rencontre en  $X$  de la tangente  $LT$ , la ressemblance des triangles  $XDl$ ,  $XZl$ , donnera aussi  $DL.LX$  ou  $Ll::Zl(\frac{Ll \times Ll}{RL})$ .  $Xl = \frac{Ll \times Ll \times Ll}{RL \times DL}$ . Mais les triangles  $Xyl$ ,  $XLc$ , que  $yl$  (*hyp.*) parallèle à  $Lc$ , rend semblables, donnant  $Xl.Yl::Xc.Lc$ . Et l'angle  $XCL$  (*hyp.*) infiniment petit, rendant de plus  $Xc = Lc$ ; l'on aura pareillement  $Xl = Yl$ . Donc aussi  $Yl = \frac{Ll \times Ll \times Ll}{RL \times DL}$ . Par conséquent en substituant cette valeur de  $Yl$  dans la formule  $f = \frac{2p \times HL \times Yl}{Ll \times Ll}$  qu'on vient de trouver à la fin de l'art. 18. l'on aura de même  $f = \frac{2p \times HL \times Ll}{RL \times DL}$ . Donc en appelant encore  $HL$ ,  $h$ ;  $RL$ ,  $r$ ;  $Ll$ ,  $ds$ ; &  $DL$ ,  $dx$ ; l'on aura encore ici  $f = \frac{2phds}{r dx}$  pour Règle générale de comparaison des forces centrales avec les pesanteurs des corps, comme dans les art. 9. & 14. Ce qu'il falloit encore trouver.

S C H O L I E.

Règle générale du rapport des forces centrales entr'elles,

XX. Puisque (art. 18.)  $f \times LY$  est la force totale du corps  $L$ , acquise en  $l$  par sa chute (pour ainsi dire) de  $P$  en  $l$  en vertu de sa seule force centrale  $f$ , & que  $LY$  exprime l'instant que cette force centrale emploieroit à lui faire parcourir  $Yl$  d'un mouvement uniforme, ou que ce même corps emploie à parcourir effectivement  $Ll$ ; si l'on prend  $dt$  pour cet instant, l'on aura  $fdt$  pour la force qui

pourroit lui faire parcourir ainsi  $rl$  d'un mouvement uniforme pendant ce même instant ; & par tout de même. Or on sçait qu'en ce cas le produit  $f dt$  d'une telle force  $f dt$  par son instant  $dt$ , est toujours proportionel à cette  $rl$  correspondante. Donc ici  $\frac{f dt^2}{rl}$  est une fraction constante égale, par exemple, à telle grandeur constante  $m$  qu'on voudra, c'est-à-dire  $\frac{f dt^2}{rl} = m$  ; & par conséquent aussi  $f = \frac{m \times rl}{dt^2}$ . Mais on vient de trouver (art. 19.)  $rl = \frac{Ll \times Ll \times Ll}{RL \times DL}$ .

Donc enfin  $f = \frac{m \times Ll \times Ll \times Ll}{RL \times DL \times dt^2}$  : de sorte qu'en appellant encore  $RL$ ,  $r$  ;  $DL$ ,  $dx$  ; &  $Ll$ ,  $ds$  ; l'on aura de même  $f = \frac{m ds^3}{r dx dt^2}$  pour la Regle générale du rapport des forces centrales entr'elles, ainsi qu'on l'a déjà trouvée sur la fin de l'art. 15. Ce qui fait voir ici, comme là, que les forces centrales d'un même corps quelconque suivant des ordonnées concourantes en quelque point que ce soit du plan d'une Courbe aussi quelconque qu'il décriroit avec telle variation de vitesses que ce fût, doivent toujours être entr'elles comme les fractions  $\frac{ds^3}{r dx dt^2}$  correspondantes.

XXI. Il est encore à remarquer que cette même Regle du rapport des forces centrales entr'elles, se peut encore tirer de celle du rapport de ces forces aux pesanteurs des corps qui en sont affectés, trouvée ci-dessus art. 9. 14. & 19. Car  $2p$  étant constant dans cette Regle  $f = \frac{xphs}{r dx}$ , elle fait déjà voir que sur une même Courbe quelconque décrite par un même corps aussi quelconque avec telle variété ou variation de vitesses que ce soit, les forces centrales ( $f$ ) doivent toujours être entr'elles comme les fractions correspondantes  $\frac{h ds}{r dx}$ . Mais les hauteurs  $h$  d'où ce corps devoit tomber pour aquerir à la fin de ses chutes les mêmes vitesse qu'il a à chaque point de la Courbe qu'il décrit, étant (suivant Galilée) comme les quarrés  $vv$  de ces vitesses que j'appelle  $v$  ; si l'on substitue  $vv$  au

lieu de  $h$  dans la fraction précédente  $\frac{h ds}{r dx}$ , il en résultera celle-ci  $\frac{v ds}{r dx}$  qui suivra aussi toujours la raison de celle-là. Donc les forces centrales ( $f$ ) seront de même ici toujours entr'elles comme les fractions  $\frac{v ds}{r dx}$  correspondantes. Mais on sçait d'ailleurs que les vitesses ( $v$ ) avec chacune desquelles chaque élément  $Ll$  ( $ds$ ) est parcouru pendant chaque instant ( $dt$ ), sont aussi toujours entr'elles comme les fractions  $\frac{ds}{dt}$  correspondantes. Donc en substituant cette fraction dans la présente à la place de  $v$ , on trouvera encore ici les forces centrales ( $f$ ) en raison des fractions correspondantes  $\frac{ds^3}{r dx dt^2}$ , ou  $\frac{ds^3}{2r dx dt^2}$ , ou  $\frac{m ds^3}{r dx dt^2}$ , ainsi que les donnent les Regles  $f = \frac{ds^3}{r dx dt^2}$ ,  $f = \frac{ds^3}{2r dx dt^2}$ , &  $f = \frac{m ds^3}{r dx dt^2}$ , trouvées dans les Mem. de 1701. pag. 21. 22. & ci-dessus art. 11, 12, 13, 15, & 20. lesquelles ne signifient toutes que le même raport de forces centrales entr'elles.

Pour ce qui est de la Regle  $f = \frac{2phds}{r dx}$  du raport de ces mêmes forces centrales avec la pesanteur de ce corps, trouvée ci-dessus dans les art. 9. 14. 19. on la trouvera encore de deux autres manieres ci-après dans les art. 47. & 56. En attendant en voici seulement quelques Corollaires où ces pesanteurs seront prises à l'ordinaire pour des forces finies.

## COROLLAIRES.

De la Regle  $f = \frac{2phds}{r dx}$  trouvée dans les art. 9, 14, & 19. Fig. 1, & 5.

Premier cas  
où les forces  
centrales doi-  
vent être in-  
finies par ra-  
port aux pé-  
santeurs.  
Figure 1.  
V.

XXII. Corol. 1. Il suit en général de cette Regle.  
1°. Que lorsque les forces centrales agissent suivant des rayons ou des directions qui touchent les Courbes qu'elles font décrire aux corps où elles se trouvent; alors  $ds$  se trouvant infinie par raport à  $dx$  qui pour lors devient nulle par raport à cet élément  $ds$  de la Courbe en question, la valeur  $\frac{phds}{r dx}$  de la force centrale ( $f$ ) du corps qu'on sup-

pose décrire cette Courbe, devient aussi infinie par rapport à sa pesanteur, soit que le rayon ( $r$ ) de la Développée de cette même Courbe soit fini ou zero, tout le reste  $2ph$  étant (*hyp.*) fini dans cette fraction.

2°. Que non-seulement en ces points d'atouchement, mais encore par tout où le rayon ( $r$ ) de la Développée de la Courbe en question sera zero, les forces centrales ( $f$ ) du corps qui la décrira, seront encore infinies par rapport aux pesanteurs; puisque leur valeur générale  $\frac{2phds}{rdx}$  le sera toujours aussi pour lors, à cause que la grandeur  $2phy$  sera toujours finie, & que  $ds$  ne peut jamais être moindre que  $dx$ . *Second cas où les forces centra esdoivent encore être infinies par rapport aux pesanteurs.*

3°. Au contraire si le rayon ( $r$ ) de la Développée de la Courbe en question se trouvoit infini, la force centrale ( $f$ ) qui répondroit au point de cette Courbe où ce rayon osculateur aboutiroit, seroit alors seulement finie ou zero, selon que le rayon ou la direction de cette force toucheroit cette Courbe en ce point, ou non : Dans le premier cas cette force seroit finie ou de même genre que la pesanteur, parce qu'alors  $ds$  seroit infinie par rapport à  $dx$  comme  $r$  le seroit par rapport à  $h$ ; & dans le second cette force seroit nulle ou zero par rapport à la pesanteur, parce qu'alors la fraction  $\frac{2hds}{dx}$  le seroit par rapport à  $r$ . *Cas où les forces centrales ne peuvent être que finies ou nulles.*

Le premier de ces deux cas est aussi celui du mouvement d'un corps suivant une ligne droite qui passeroit par le centre de ces forces, par exemple, suivant une verticale qui passe par le centre de sa pesanteur, toute ligne droite pouvant être regardée comme une Courbe dont les rayons osculateurs sont par tout infinis; puisqu'une Courbe dont tous les rayons osculateurs deviendroient ainsi infinis, dégénéreroit en ligne droite.

4°. Au contraire en tout autre cas que les précédens (*n. 1, 2, & 3.*) les forces centrales ( $f$ ) seront toujours finies tant que les pesanteurs ( $p$ ) des corps où elles se trouvent, & leurs vitesses ou les hauteurs ( $h$ ) qui les déterminent aux différens points des Courbes que ces corps décrivent, seront finies, ainsi qu'on les suppose par tout dans *Cas où les forces centrales sont toujours finies.*

cet écrit. Je dis tant que les pésanteurs ( $p$ ) & les hauteurs ( $h$ ) seront finies : parceque quand il n'y auroit qu'une de ces deux grandeurs  $p$  ou  $h$  qui fût infinie dans la Regle  $f = \frac{2phds}{rdx}$ , il est manifeste que le rayon ( $r$ ) de la Développée de la Courbe en question, y devroit être infini pour que la force ( $f$ ) y demeurât finie. Et si les deux grandeurs  $p$  &  $h$  sont toutes deux infinies dans cette Regle, il n'est pas moins clair que la force centrale ( $f$ ) du corps décrivant où cela se trouveroit, seroit infinie dans tous les points de la Courbe qu'il décriroit, même en ceux où le rayon ( $r$ ) de sa Développée seroit infini,  $dx$  ne pouvant jamais être infinie par rapport à  $ds$ .

Rapport des forces centrales aux pésanteurs des corps, lorsque les directions de ces forces sont suivant les rayons osculateurs des Courbes que ces corps décrivent.

XXIII. Corol. 2. Il suit de la même Regle  $f = \frac{2p'ds}{rdx}$  que lorsque le centre  $C$  des forces est en  $R$ , c'est-à-dire, lorsque les forces centrales du corps  $L$  qu'on suppose décrire la Courbe  $MLN$ , tendent suivant les rayons  $RL$  correspondans de la Développée de cette Courbe, ou que leur centre  $C$  est sur cette Développée; alors  $LD$  se confondant avec  $LL$ , & rendant par là  $dx = ds$ , l'on aura  $f = \frac{2ph}{r}$ , ou  $f.p : 2h.r :: h. \frac{1}{2}r$ . C'est-à-dire en général, qu'alors en chaque point  $L$  de quelque Courbe  $MLN$  que ce soit, la pésanteur du corps  $L$  qu'on suppose la décrire en tendant toujours suivant le rayon  $LR$ , correspondant de la Développée de cette Courbe, sera à sa force centrale ou de tendance suivant  $LR$ , comme la moitié de ce rayon de Développée, à la hauteur d'où ce corps tombant auroit acquis à la fin de sa chute en vertu de sa seule pésanteur, une vitesse égale à celle ( quelle qu'elle soit ) qu'il a effectivement en chaque point  $L$  suivant l'élément correspondant  $LL$  de cette même Courbe  $MLN$ .

Cas où les forces centrales dirigées suivant les rayons osculateurs des Courbes en question, sont égales entr'elles.

XXIV. Corol. 3. Donc lorsque de telles hauteurs ( $h$ ) seront comme les correspondans des rayons ( $r$ ) de la Développée de cette Courbe  $MLN$ , c'est-à-dire, lorsque les vitesses le long de cette Courbe  $MLN$  seront comme les racines de ces rayons correspondans; les forces centrales



tendantes suivant ces mêmes rayons, seront égales entr'elles : puisque le raport de  $h$  à  $\frac{1}{2}r$ , se trouvant alors constant, celui de  $f$  à  $p$  constante le seroit de même.

XXV. *Corol. 4.* D'où il suit de plus que toutes ces forces du corps  $L$  seroient non-seulement égales entr'elles, mais aussi égales chacune à la pesanteur de ce corps, si ce raport constant des hauteurs ( $h$ ) aux moitiés des rayons ( $r$ ) correspondans de la Développée de la Courbe  $MLN$  qu'on le suppose décrire avec les vitesses que ces hauteurs déterminent, étoit un raport d'égalité : c'est-à-dire, si chacune de ces hauteurs ( $h$ ) étoit égale à la moitié de chaque rayon ( $r$ ) correspondant de la Développée de cette Courbe  $MLN$ ; ou (ce qui revient au même) si les vitesses de ce corps à chaque point  $L$  suivant cette Courbe, étoient chacune la même que celle qu'il acquieroit en vertu de sa seule pesanteur en tombant de la hauteur de la moitié du rayon osculateur correspondant. Et réciproquement, &c.

XXVI. *Corol. 5.* Il suit de tout cela que la Développée du cercle se réunissant toute au centre de ce même cercle, non-seulement la force centrale du corps qui le décrira de quelque vitesse que ce soit, en tendant toujours suivant des lignes qui passent toutes par ce point, c'est-à-dire, suivant les rayons de ce cercle, sera toujours à la pesanteur de ce même corps, comme la hauteur déterminatrice de sa vitesse en chaque point de la circonférence de ce cercle, sera à la moitié du rayon de ce même cercle; mais aussi que lorsque cette hauteur se trouvera égale à la moitié de ce rayon, la force centrale du corps qui décrira ainsi ce cercle, devra être de même égale à sa pesanteur, ainsi que *M. Hugen*s l'a trouvé, & plusieurs autres après lui.

Il suit réciproquement que lorsque ces deux forces seront égales entr'elles, cette hauteur déterminatrice de la vitesse du corps décrivant, sera aussi égale à la moitié du rayon du cercle qu'on le suppose décrire.

XXVII. *Corol. 6.* Puisque (*art. 24.*) les forces centrales suivant les rayons d'un cercle, qu'auroit un corps qui

Ces forces centrales d'un même corps sur une même courbe, seroient non-seulement égales entr'elles, mais aussi à la pesanteur de ce corps.

Sur un cercle les forces centrales dirigées suivant ses rayons, seroient à la pesanteur du corps qui les décriroit, comme chacune des hauteurs déterminatrices des vitesses correspondantes de ce corps sur ce cercle, seroit au demi-rayon de ce même cercle; &c. par conséquent égales à cette pesanteur, quand cette hauteur le seroit au demi-rayon.

Ces forces centrales ainsi

dirigé sur  
un cercle,  
dissent aus-  
si toujours  
être entr'elles  
les comme les  
quarrés des  
vitesse du  
corps décri-  
vant.

le décrirait avec quelque variété de vitesses que ce fût, seroient toujours chacune à la pesanteur de ce corps, comme la correspondante des hauteurs déterminatrices de ses vitesses aux différens points de ce cercle, seroit au demi-rayon de ce même cercle, il suit encore de là que ces forces centrales du corps décrivant doivent toujours être entr'elles comme les correspondantes des hauteurs déterminatrices de ses vitesses sur le cercle qu'il décrit, & par conséquent aussi comme les quarrés de ces mêmes vitesses, puisque ces quarrés suivent toujours la raison de ces hauteurs dans l'hypothèse de pesanteur constante dont il s'agit ici.

Manière de  
rendre la Re-  
gle de com-  
paraison des  
forces cen-  
trales aux  
pesanteurs  
des corps,  
trouvées dans  
les art 9,  
14, & 19 fa-  
cilement ap-  
plicable à  
toutes sortes  
de Courbes.  
F 16. I.

XXVIII. Corol. 7. Pour rendre présentement la Re-

gle générale  $f = \frac{2phds}{rds}$  des art. 9, 14, & 19. facilement applicable à toutes sortes de Courbes, soit géométriques, soit mécaniques, en sorte qu'il suffise d'y introduire l'équation de chacune de ces Courbes pour avoir tout d'un coup le rapport des forces centrales à la pesanteur absolue du corps qui la décrit; il y faut substituer les six valeurs infiniment générales du rayon ( $r$ ) de la développée de la Courbe  $MLN$  en question, lesquelles se trouvent dans les Mem. de 1701. art. 10. & 14. pag. 27. & 29, ou ce rayon s'appelle  $n$ . Pour cela outre  $Ll = ds$ , &  $LD = dx$ , il faut

aussi supposer  $LC = y$ , avec l'arc circulaire  $MG = z$  décrit du centre  $C$ , & d'un rayon quelconque  $MC = a$ ; ce qui donnant  $CG(a).CL(y) :: Gg(dz).LD(dx) = \frac{ydz}{a}$ .

changera déjà cette équation  $f = \frac{2phds}{rds}$  en  $f = \frac{2aphds}{rydz}$ . Alors ces six valeurs de  $r$  substituées dans ces deux équations, sçavoir, les trois premières dans la première, & les trois autres dans la seconde, les changeront en autant de Formules ou Regles toutes aussi générales pour comparer les forces centrales avec les pesanteurs absolues du corps mus en lignes courbes quelconques, & avec telle variété de vitesses qu'on voudra: Les voici ces six Regles.

## FORMULES

## FORMULES OU REGLES

*Infiniment générales des rapports des Forces centrales avec les pesanteurs absolues des corps mûs de vitesses variées à discrétion le long de telles Courbes qu'on voudra.*

$$1^{\circ}. f = \frac{dx dy ds + y ds dx - y dx ds}{y dy dx ds} \times 2 ph.$$

$$2^{\circ}. f = \frac{ds dx^2 + y dy ds - y ds dy}{y ds dx^2} \times 2 ph.$$

$$3^{\circ}. f = \frac{dx ds^2 + y dy dx - y dx dy}{y dx ds^2} \times 2 ph.$$

$$4^{\circ}. f = \frac{dz dy ds + y ds dz - y dz ds}{y dy dz ds} \times 2 ph.$$

$$5^{\circ}. f = \frac{y ds dz^2 + a dy ds - a ds dy}{y y ds dz} \times 2 ph.$$

$$6^{\circ}. f = \frac{dz ds^2 + dz dy^2 + y dy dz - y dz dy}{y dz ds^2} \times 2 ph.]$$

XXIX. Corol. 8. Ces six Formules ou Regles des forces centrales comparées aux pesanteurs des corps mûs en lignes courbes, se diversifieront à l'infini selon ce qu'on leur supposera de constant, ainsi que celles des rayons osculateurs des art. 10. & 14. pag. 27. & 29. des Mem. de 1701. qu'on y vient d'introduire, se diversifient dans les art. 11. & 15. pag. 27. 28. 29. & 30. de ces mêmes Mem. Par exemple.

1<sup>o</sup>. Si l'on suppose  $dx$  constante, c'est-à-dire  $ddx = 0$ , la première de ces Formules du précédent art. 28. donnera

$$f = \frac{dy ds - y ds}{y dy ds} \times 2 ph; \text{ \& la troisième, } f = \frac{ds^2 - y ddy}{y ds^2} \times 2 ph.$$

2<sup>o</sup>. Si l'on fait  $dy$  constante, c'est-à-dire  $d dy = 0$ , la seconde de ces mêmes Formules générales du précédent

article 28. donnera  $f = \frac{ds dx^2 + y dy ds}{y ds dx^2} \times 2 ph$ ; la troisième,

$$f = \frac{dx ds^2 + y dy dz}{y dx ds^2} \times 2 ph; \text{ la cinquième, } f = \frac{y ds dz^2 + a dy ds}{y y ds dz} \times 2 ph;$$

\& la sixième,  $f = \frac{dz ds^2 + dz dy^2 + y dy dz}{y dz ds^2} \times 2 ph$ .

3<sup>o</sup>. Si l'on fait  $ds$  constante, c'est-à-dire  $dds = 0$ , la première des mêmes Formules générales de l'art. 28. don-

*Maniere de  
détailler les  
six Regles  
précédentes  
en une infini-  
té d'autres,  
selon la va-  
riété infinie  
de tout ce  
qu'on y peut  
supposer de  
constant.*

nera  $f = \frac{dx dy + y ddx}{y dy dx} \times 2ph$ ; la seconde,  $f = \frac{dx - y ddy}{y dx^2} \times 2ph$ ; la quatrième,  $f = \frac{2 dy dz + y d dz}{y dy dz} \times 2ph$ ; & la cinquième,  $f = \frac{y dx^2 - a ddy}{y y dz^2} \times 2ph$ .

4°. Si l'on fait  $dz$  constante, c'est-à-dire,  $ddz = 0$ , ce qui est la même chose (*art.* 28.) que  $\frac{dx}{y}$  constante, ou  $y ddx - dx dy = 0$ : la première & la quatrième des mêmes Regles du précédent *art.* 28. donneront  $f = \frac{2 dy ds - y dds}{y dy ds} \times 2ph$ ; la troisième & la sixième donneront pareillement aussi  $f = \frac{ds^2 + dy^2 - y d^2 y}{y ds^2} \times 2ph$ .

5°. Si l'on fait presently le produit  $y dx$  constant; c'est-à-dire  $dx dy + y ddx = 0$ , ou  $ddx = -\frac{dx dy}{y}$ ; la substitution de cette valeur de  $ddx$  dans la première & dans la troisième des Formules générales du précédent *art.* 28. changera la première en  $f = -\frac{dds}{y ds} \times 2ph$ , & la troisième en  $f = \frac{dx^2 - y ddy}{y ds^2} \times 2ph$ .

6°. De même si l'on fait le produit  $dx dy$  constant, c'est à-dire,  $dx ddy + dy ddx = 0$ , ou  $ddx = -\frac{dx dy}{dy}$ ; la substitution de cette valeur de  $ddx$  dans la troisième des Formules générales du précédent article 28. donnera  $f = \frac{ds^2 - 2y ddy}{y ds^2} \times 2ph$ .

Cette même Formule se trouvera encore si l'on considère que cette hypothèse de  $dx dy$  constant, donnant aussi  $dds (\frac{dx ddx + dy ddy}{ds}) = \frac{-dx^2 ddy + dy^2 ddy}{dy ds}$ ; la substitution de cette valeur de  $dds$ , & de la valeur précédente de  $ddx$  dans la première des Formules générales du précédent article 28. la changera encore de même en celle-ci :

$$f = \frac{dx dy^2 ds^2 - y dx ds^2 ddy + y dx^2 ddy - y dx dy^2 ddy}{y dx dy^2 ds^2} \times 2ph \text{ à cause de } \\ -ds^2 + dx^2 = -dy^2) = \frac{dx dy^2 ds^2 - 2y dx ddy^2 dy}{y dx dy^2 ds^2} \times 2ph = \\ = \frac{ds^2 - 2y ddy}{y ds^2} \times 2ph, \text{ comme ci-dessus nomb. 6.}$$

C'est ainsi que les six Regles générales de l'art. 28. en produiront de nouvelles à l'infini, selon la variété infinie des termes constans que peut fournir  $xyms^ndz^rdxdy^qdsr$ ; ce qui est presentement trop visible pour s'y arrêter davantage. Passons donc à quelques exemples qui en fassent voir l'usage: la seconde des Formules de cet article-ci nous suffira; on se servira de même des autres à l'infini.

## E X E M P L E I.

XXX. Soit la Spirale logarithmique ordinaire  $MLN$ , dont  $C$  soit le centre auquel tende sans cesse le corps qui la décrit de quelque vitesse que ce soit. Toutes choses demeurant les mêmes que ci-dessus art. 28. sçavoir  $CL=y$ ,  $LD=dx$ , &c. la nature de cette Courbe étant de faire par tout des angles égaux avec ses ordonnées  $CL$ , & par consequent de rendre par tout la fraction  $\frac{dy}{dx}$  constante; si l'on suppose de plus chaque  $dx$  constante par rapport aux immédiatement suivantes de part & d'autre; cette hypothese de  $ddx=0$ , rendra pareillement ici  $ddy=0$ . Donc cette même hypothese de  $dx$  constante donnant d'ailleurs (art. 29. nomb. 1.)  $f=\frac{ds^2-yddy}{yds^2} \times 2ph$  pour toutes sortes de Courbes, l'on aura pour celle-ci  $f=\frac{ds^2}{yds^2} \times 2ph \frac{2ph}{y}$ , ou  $f.p::h.\frac{2}{3}y$ . C'est-à-dire que les forces centrales du corps  $L$  suivant  $LC$ , doivent être ici à sa pesanteur, comme les hauteurs ( $h$ ) determinatrices de ses vitesses en chaque point  $L$  suivant  $Ll$ , sont à la moitié de chacune des ordonnées correspondantes  $LC$  ( $y$ ).

M. De Fontenelle a remarqué en faisant l'extrait de ceci, que la même chose se peut encore tirer immédiatement de la troisième des Regles générales de l'art. 28. sans y supposer de constant que la fraction  $\frac{dy}{dx}$  rendue telle par la nature de la Courbe en question. En effet cette fraction donnant ici  $dxddy=dyddx$ , si l'on substitue un des membres de cette équation à la place de l'autre dans cette troisième Regle, cette même Regle se chan-

Cc ij

FIG. VI.

Sur la Spirale logarithmique, les forces centrales dirigées suivant les ordonnées ou par le centre de cette courbe, sont à la pesanteur du corps qui la décrit, comme les hauteurs determinatrices de ses vitesses à chaque point, sont à la moitié des ordonnées correspondantes.

gera pour ici en  $f = \frac{dx ds}{y dx ds} \times 2 p h = \frac{2 p h}{y}$  : D'où résulte  $f.p. : b. \frac{1}{2} y$ . comme ci-dessus.

*Les forces centrales dirigées, suivant une ordonnée quelconque de Spirale logarithmique & ensuite, suivant son Rayon osculateur correspondant, sont égales entr'elles, tant que les hauteurs déterminatrices des vitesses correspondantes du corps Décrivant seront comme ces lignes.*

XXXI. Mais on a vû dans l'art. 23. que si les forces centrales du corps  $L$  tendoient suivant les rayons correspondans  $LR$  de la Développée  $PR$  de la Spirale logarithmique  $MLN$  dont il est ici question, l'on auroit aussi pour lors  $f.p. : b. \frac{1}{2} LR$ . Donc sçachant d'ailleurs (*Anal. des infin. petits*, art. 91.) que les ordonnées  $LC$  de cette Spirale sont toutes proportionnelles aux rayons correspondans  $LR$  de sa Développée, il est visible qu'à chaque point  $L$  les forces centrales du corps  $L$  tendant successivement suivant l'ordonnée  $LC$  & suivant le rayon  $LR$  correspondans, seront égales entr'elles, tant que les hauteurs ( $h$ ) déterminatrices des vitesses en ce point pour l'un & pour l'autre de ces cas, seront comme ces lignes : c'est-à-dire, tant qu'au même point  $L$  la vitesse (suivant  $LL$ ) de ce corps tendant vers  $C$ , sera à la vitesse de ce même corps tendant vers  $R$ , comme la racine quarrée de  $LC$  à une pareille racine de  $LR$ ; & ces hauteurs seront aussi proportionnelles entr'elles.

*Nouvelle preuve des art. 26. & 27.*

XXXII. Il est ici à remarquer que le cercle pouvant passer pour une espece de Spirale logarithmique perpendiculaire à toutes les ordonnées, lesquelles seront ici tout à la fois les rayons de la Développée de cette Spirale logarithmique & ceux de ce cercle au centre duquel toute cette Développée se réuniroit; il suit encore de l'art. 30. ce qui a déjà été trouvé dans l'art. 26. sçavoir que les forces centrales d'un corps quelconque suivant les rayons d'un cercle qu'il décriroit avec telle variété ou variation de vitesses qu'on voudroit, seroient toujours chacune à sa pesanteur, comme la hauteur déterminatrice de sa vitesse en chaque point correspondant de ce cercle, seroit au demi-rayon de ce même cercle; & conséquemment aussi que lorsque cette hauteur se trouvera égale à ce demi-rayon de cercle, cette force centrale le fera parcelllement égale à la pesanteur du corps qui le décrira.

Dela suit encore l'art. 27. ainsi qu'on l'a déjà conclu de l'art. 26. qu'on voit renfermé dans celui-ci.

## EXEMPLE II.

XXXIII. Soit en général  $CLMLN$  une Spirale Fermatienne quelconque, dont  $C$  soit le centre, aussi-bien que de l'arc infiniment petit  $LD$ , & du cercle  $MEFM$  repondant à telle revolution qu'on voudra de cette Spirale. Toutes choses demeurant les mêmes que ci-dessus art. 28. sçavoir  $CL=y$ ,  $LD=dx$ ,  $Ll=ds$ ; soit la circonference  $MEFM=c$ , & son rayon  $CM$  ou  $CE=a$ .

L'on aura la somme ( $\int Ee$ ) des  $Ee$ , pour l'abscisse de cette circonference depuis le commencement des révolutions jusqu'en  $E$ ; ce qui donnera  $c. \int Ee :: a^m. y^m$ . D'où résulte  $c y^m = a^m \times \int Ee$  pour l'équation de ces Spirales en général. Donc  $m c y^{m-1} dy = a^m \times Ee$ . Mais  $CL(y). CE(a) :: LD(dx). Ee = \frac{adx}{y}$ . Donc aussi  $m c y^{m-1} dy = \frac{a^m + 1 dx}{y}$ , ou

$$dy = \frac{a^m + 1 dx}{m c y^m}; \text{ ce qui donne } \frac{a^{2m+2} dx^2}{m m c c y^{2m}} + dx^2 = dy^2 +$$

$$dx^2 = ds^2, \text{ ou } ds^2 = \frac{a^{2m+2} + m m c c y^{2m}}{m m c c y^{2m}} \times dx^2; \text{ \& de plus (en}$$

$$\text{faisant } dx \text{ constante) l'on aura } ddy = \frac{-a^m + 1 y^{m-1} dy dx}{c y^{2m}} =$$

$$\frac{-a^m + 1 dy dx}{c y^{m+1}} \left( \text{\& \& cause de } dy = \frac{a^m + 1 dx}{m c y^m} \right) = \frac{-a^{2m+2} dx^2}{m c c y^{2m+1}}.$$

Donc cette hypothese de  $dx$  constante, donnant (art.

29. nomb. I.)  $f = \frac{ds^2 - y ddy}{y ds^2} \times 2ph$ , la substitution de ces valeurs de  $ds^2$  & de  $ddy$  dans cette formule, donnera aussi

$$f = \frac{\frac{a^{2m+2} + m m c c y^{2m}}{m m c c y^{2m}} \times dx^2 + \frac{a^{2m+2}}{m c c y^{2m}} \times dx^2}{y a^{2m+2} + m m c c y^{2m+1}} \times 2ph =$$

$$\frac{-m + 1 \times a^{2m+2} + m m c c y^{2m}}{y a^{2m+2} + m m c c y^{2m+1}} \times 2ph: \text{ c'est-\&-dire en gé-$$

neral pour toutes ces Spirales Fermatiennes à l'infini,  $f.p.:$

$$h. \frac{y a^{2m+2} m m c c y + 2m+1}{2m+2 \times a^{2m+2} + 2 m m c c y^{2m}}.$$

Rapport géne-  
ral de for es  
centrales aux  
pesanteurs  
des corps sur  
zoutes sortes  
de Spirales  
Fermatiennes  
suivant les  
ordonnées  
desquelles  
ces forces se-  
roient diri-  
gées.

FIG. VII.

Il n'y a plus qu'à détailler cette Formule ou Analogie par la substitution de telle valeur qu'on voudra donner à  $m$ , pour avoir le raport de  $p$  à  $f$ , c'est à-dire, de la pesanteur du corps qu'on suppose décrire la Spirale déterminée par cette valeur de  $m$ , aux forces centrales de ce même corps suivant les ordonnées de cette Spirale. Par exemple, la Spirale d'Archimede, qui est la premiere de ces Fermatiennes, ayant  $m=1$ , l'Analogie précédente donnera pour elle  $f.p :: h. \frac{ya^4 + ccy^3}{4aa + 2ccy}$ . Au contraire la premiere des Spirales hyperboliques Fermatiennes ayant  $m=-1$ , l'on aura pour elle  $f.p :: h. \frac{ya^0 + ccy^{-1}}{2ccy^{-1}} :: h. \frac{y^3 + ccy}{2cc}$ . Et ainsi de toutes les autres Spirales Fermatiennes, tant paraboliques que hyperbolique à l'infini.

On trouvera aussi de même le raport des forces centrales aux pesanteurs des corps mûs suivant toutes les autres Spirales resultantes de la génération générale qu'on en a donné dans les Mem. de 1704. pag. 69. &c.

## EXEMPLE II.

Raport des  
forces cen-  
trales aux  
pesanteurs  
des corps sur  
l'Ellipse or-  
dinaire, par  
un des foyers  
de laquelle  
ces forces se-  
roient diri-  
gées.

FIG. VIII.

XXXIV. Soit  $MLN$  l'Ellipse ordinaire décrite par le corps  $L$  mû comme l'on voudra en tendant toujours suivant des directions ou lignes droites qui passent toutes par un de ses foyers, par exemple, par le foyer  $C$ ; soit  $MN=a$  le grand axe de cette Ellipse, & la distance de ses foyers entr'eux  $=c$ , Tout le reste demeurant le même que ci-dessus art. 28. sçavoir les ordonnées  $CL, Cl$ , indéfiniment proches l'une de l'autre; l'arc  $LC$  décrit du centre  $C$ ;  $CL=y$ ,  $LD=dx$ ,  $Ll=ds$ .

La nature de cette Ellipse donnera  $dy \sqrt{aa - cc} = dx \sqrt{cc - aa} + 4ay - 4yy$  pour son équation à son foyer  $C$ , ou (en prenant  $bb=aa-cc$  ( $b dy = dx \sqrt{4ay - 4yy - bb}$ ). Donc  $4ay - 4yy \times dx^2 = b b dy^2 + b b dx^2 = b b ds^2$ , ou  $ds^2 = \frac{4ay - 4yy}{bb} \times dx^2$ . Or en faisant (si l'on veut)  $dx$  constante, cette même équation  $b dy = dx \sqrt{4ay - 4yy - bb}$  donnera



de plus  $d dy = \frac{2adydx - 4ydydx}{b\sqrt{4ay - 4yy - bb}} = \frac{2adx - 4ydx^2}{bb}$ . Donc cette même hypothèse de  $dx$  constante, donnant (*art. 29. nomb. 1.*)

$f = \frac{ds - yddy}{yds^2} \times 2ph$ , elle donnera aussi dans le cas présent

$$f = \frac{4ay - 4yy \times x^2 - 2ay + 4yy \times dx^2}{4ay - 4yy \times ydx^2} \times 2ph = \frac{2ay}{4ay - 4y^3} \times 2ph =$$

$$= \frac{aph}{ay - yy}, \text{ ou } f.p. : h. \frac{ay - yy}{a}. \text{ D'où l'on voit que les forces}$$

centrales tendantes suivant des directions ou des lignes droites qui passent toutes par un des foyers de l'Ellipse ordinaire, sont toujours à la pesanteur du corps qui la décrit, comme les hauteurs ( $h$ ) déterminatrices des vitesses de ce corps le long de cette Courbe, aux fractions  $\frac{ay - yy}{a}$  faites des  $y$  ( $CL$ ) correspondantes aux points où il a effectivement les vitesses que ces hauteurs déterminent, c'est-à-dire, les mêmes vitesses qu'il acquieroit en tombant de ces hauteurs ( $h$ ) en vertu de sa seule pesanteur.

XXXV. Si presentement on suppose que l'Ellipse précédente (*art. 34.*) se change en un cercle dont  $C$  soit le centre, &  $MN$  ( $a$ ) le diametre; en ce cas  $CL(y)$  se trouve

Nouvelle  
preuve des  
art. 26 & 27.  
et 32.

vant le rayon ( $r$ )  $\frac{1}{2}a$  de ce cercle, la formule  $f = \frac{aph}{ay - yy}$  qu'on vient (*art. 34.*) de trouver, se changera ici en

$$f = \frac{aph}{\frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}aa} = \frac{aph}{\frac{1}{2}aa} = \frac{4ph}{a} = \frac{4ph}{2r} = \frac{2ph}{r}. \text{ Ce qui donnera ici}$$

$f.p. : h. \frac{1}{2}r$ . C'est-à-dire que les forces centrales d'un corps qui décriroit un cercle avec telles vitesses qu'on voudroit, en tendant toujours suivant les rayons de ce cercle, comme lorsqu'il le décrit attaché à un des bouts d'une corde non extensible & fixe par l'autre bout au centre de ce cercle, seroient à sa pesanteur en chaque point de la circonférence de ce cercle, comme la hauteur déterminatrice de la vitesse en ce point seroit à la moitié de son rayon, ainsi qu'on l'a déjà trouvé dans les *art. 26.* & *32.* D'où l'on voit encore (comme dans ces deux *art.*) que lorsque cette hauteur sera égale à ce demi-rayon, la force centrifuge de ce corps sera aussi précisément égale à sa pesanteur; & réciproquement.

*Rapport des forces centrales aux pesanteurs des corps sur l'hyperbole ordinaire, par le foyer interieur de laquelle ces forces seroient dirigées.*

XXXVI. De la maniere dont on vient de trouver (art. 34.)  $f = \frac{aph}{ay-yy}$  pour l'Ellipse, on trouvera aussi  $f = \frac{aph}{ay+yy}$ , ou  $f.p :: h.\frac{ay+yy}{a}$ . pour l'hyperbole dont le centre C des forces ou des tendances du corps L en la décrivant, seroit le foyer interieur; puisqu'en prenant  $bb=cc-aa$ , à cause que la distance (c) des foyers de cette Courbe est plus grande que son diametre transverse (a), son équation à ce centre ou foyer C, sera  $b.dj = dx\sqrt{4ay+yy-bb}$ .

*Quel est ce rapport lorsque ces forces sont dirigées par le foyer exterieur de l'hyperbole.*

XXXVII. Mais si ce centre C des forces du corps L, est le foyer exterieur de l'hyperbole; alors cette Courbe ayant  $b.dj = dx\sqrt{4yy-4ay-bb}$  pour son équation à ce foyer, on trouvera de même pour elle  $f = \frac{-aph}{yy-ay} = \frac{-aph}{ay-yy}$ , laquelle formule semble la même que celle qu'on vient de trouver pour l'Ellipse dans l'art. 34. Mais celle-ci ayant  $y > a$ , elle doit être négative, au lieu que l'autre est positive: aussi les forces centrales sont-elles ici centripetes de centrifuges qu'elles étoient-là & dans le précédent art. 36. où elles tendent suivant des directions qui passent par des foyers interieurs.

*Quel est aussi ce rapport sur la parabole, lorsque les forces centrales sont dirigées par son foyer*

XXXVIII. Dans les articles 34. & 36. si l'on suppose l'autre foyer infiniment éloigné; alors  $a$  devenant infinie, toutes ces formules se réduiront à  $f = \frac{aph}{ay} = \frac{ph}{y}$  pour la Parabole; ce qui donnera  $f.p :: h.y$ . pour cette Courbe: c'est-à-dire, que les forces centrales d'un corps qui décrit une Parabole en tendant toujours suivant des directions qui passent toutes par son foyer, sont à la pesanteur absolue de ce même corps, comme les hauteurs déterminatrices des vitesses de ce corps en differens points de cette Courbe, sont aux distances où il se trouve alors du foyer de cette même Parabole.

## EXEMPLE IV.

XXXIX. Soit  $MLN$  un cercle décrit par le corps  $L$  Rapport general des forces centrales aux pesanteurs des corps sur un cercle par que: que point du plan de ce cercle que ces forces soient dirigées. mû encore comme l'on voudra en tendant toujours suivant des directions  $LC$  qui passent toutes par quelque point  $C$  pris à discretion sur le plan de ce cercle dont le centre soit  $F$ . Par ce point  $C$  soit le diametre  $MN$  avec les lignes de direction  $CL$ ,  $Cl$ , indéfiniment proches l'une de l'autre; soit aussi l'arc  $LD$  décrit du centre  $C$ , avec  $FG$  perpendiculaire sur  $CL$ . Soient enfin  $CF = c$  &  $FL = r$  constantes, outre  $CL = y$ ,  $LD = dx$ , &  $Ll = ds$ , comme ci-dessus art. 9. & 28.

FIG. IX.  
X.

Cela posé, l'on aura  $Ll(ds)$ ,  $LD(dx) :: FL(r)$ .  $LG = \frac{rdx}{ds}$ . Et  $Ll(ds)$ ,  $LD(dy) :: FL(r)$ .  $FG = \frac{rdy}{ds}$ . Donc  $CG(\sqrt{FC} - \sqrt{FG}) = Vcc - \frac{rrdy^2}{ds^2}$ . Donc aussi  $CL(y) = \frac{rdx}{ds} + \frac{\sqrt{ccds^2 - rrdy^2}}{ds}$ , ou  $yds - rdx = \sqrt{ccds^2 - rrdy^2}$ ; & en quarrant,  $yyds^2 - 2rydxds = cc ds^2 - rrdy^2 - rrdx^2 = cc ds^2 - rrd ds^2$ , ou  $2rydx = yy + rr - cc \times ds$  (soit  $2nn = yy + rr - cc$ )  $= 2nnds$ , ou bien encore  $\frac{rryydx^2}{n^4} = ds^2 = dx^2 + dy^2$ : ce qui donne aussi  $\frac{rryy - n^4}{n^4} \times dx^2 = dy^2$ , ou  $dy = \frac{dx \sqrt{rryy - n^4}}{nn}$ . Donc en faisant  $dx$  constante, l'on aura pour lors

$$ddy = \frac{rrnny dx dy - 2n^4 dx dn}{\sqrt{rryy - n^4}} - \frac{2n dx dn \sqrt{rryy - n^4}}{n^4 \sqrt{rryy - n^4}} = \frac{rrnny dx dy - 2n^4 dx dn - 2r y y n x dx dn + 2n^4 dx dn}{n^4 \sqrt{rryy - n^4}} = \frac{rrnny dx y - 2r y y n x dx dn}{n^4 \sqrt{rryy - n^4}}$$

Mais puisque (hyp.)  $nn = \frac{yy + rr - cc}{2}$ , l'on aura  $2n dn = y dy$ .

Donc aussi l'on aura  $ddy = \frac{rrnny dx dy^2 - rry^3 dx^2}{n^4 \sqrt{rryy - n^4}}$  (à cause de

$$dy = \frac{dx \sqrt{rryy - n^4}}{nn}) = \frac{rrnny^2 dx^2 - rry^3 dx^2}{n^6}$$

, outre  $ds^2 = \frac{rryy dx^2}{n^4}$ . Par conséquent la presente hypothèse de  $dx$  constante, don-

nant aussi (art. 29. nomb. 1.)  $f = \frac{ds^2 - y ddy}{y ds^2} \times 2ph$ , l'on aura en-

$$\text{fin } f = \frac{nnr^2 dx^2 - nnr^2 y dx^2 + r y^3 dx^2}{nnr^2 y dx^2} \times 2ph = \frac{2pyb}{nn} \text{ (à cause de$$

$nn = \frac{yy+rr-cc}{2} = \frac{4yph}{yy+rr-cc}$ , ou  $f.p :: h. \frac{yy+rr-cc}{4y}$ . C'est-à-dire (art. 4.) que la force centrale du corps  $L$  suivant  $LC$ , sera toujours à sa pesanteur absolue, en quelque point  $L$  de la circonference circulaire  $MLN$  que ce corps se trouve, comme la hauteur d'où il aquieroit en tombant ce qu'il a de vitesse en ce point  $L$ , seroit à la fraction  $\frac{yy+rr-cc}{4y}$  dont les  $y$  ( $CL$ ) passeroient par ce même point  $L$ .

*Nouvelle preuve des art. 26, 27, 32, & 35.* XL. On voit delà que si le centre  $C$  des Forces ( $f$ ) étoit en  $F$  au centre de ce cercle; alors ayant  $c = 0$ , &  $y = r$ , la dernière Analogie du précédent art. 39. se changeroit

en  $f.p :: h. \frac{2rr}{4r} :: h. \frac{1}{2}r$ . c'est-à-dire que les forces centrales du corps  $L$  tendantes alors suivant  $LF$ , seroient à sa pesanteur en chaque point  $L$  de la circonference circulaire qu'il décriroit, comme la hauteur d'où il aquieroit en tombant ce qu'il a de vitesse en ce point, seroit à la moitié du rayon de ce cercle, ainsi qu'on l'a déjà trouvé dans les art. 26. 32. & 35.

*Rapport des pesanteurs aux forces centrales pour le cas où le centre de ces forces seroit un point quelconque de la circonference de ce cercle.*

XL I. Mais si le centre  $C$  des Forces ( $f$ ) étoit à l'extrémité  $M$  du diamètre de ce même cercle; ayant alors  $c = r$ , ou  $rr - cc = 0$ , il suit de même de la dernière Analogie de l'art. 39. que ces forces centrales ( $f$ ) tendantes alors en  $M$ , seroient à la pesanteur ( $p$ ) du corps  $L$  en chaque point  $L$  de la circonference qu'on le suppose décrire ::  $h. \frac{1}{2}y$ . c'est-à-dire, comme la hauteur d'où il aquieroit en tombant ce qu'il a de vitesse en ce point, seroit au quart de sa distance ( $CL$ ) au centre du foyer  $C$  des forces alors en  $M$ .

*Quel seroit le rapport si le centre de ces forces étoit hors la circonference de ce cercle sur son plan.*

FIG. X.

XL II. Si presentement on suppose que le centre  $C$  des Forces ( $f$ ) soit hors du cercle, comme dans la Figure 10. Alors ayant  $rr - cc$  (art. 39.)  $= FM \times FM - FC \times FC = NC \times NC = LC \times LC$ ; &  $yy = LC \times LC$ , ou  $yy = LC \times LC$ ; la dernière Analogie de l'art. 39. se changera ici en  $f.p :: h. \frac{LC \times LC - LC \times LC}{LC} :: h. \frac{LC - LC}{4} :: h. \frac{1}{4} LC :: h. \frac{1}{4} LG$ . depuis  $N$  de part & d'autre jusqu'aux points  $T$  ou  $CL$  &  $CL$  deviennent touchantes du cercle en question; Et en

$f.p::h.\frac{\Delta C \times \Delta C - L G \times \Delta C}{4 \Delta C}::h.\frac{\Delta C - L G}{4}::h.-\frac{1}{2}L\lambda::h.-\frac{1}{2}L G.$   
 depuis  $M$  de part & d'autre jusqu'aux mêmes points d'at-  
 touchement.

XLIII. D'où l'on voit que lorsque le corps  $L$  sera en  $N$  ou en  $M$ , c'est-à-dire aux extrémités du diametre  $MN$  qui passe par le centre  $C$  des forces ( $f$ ) de ce corps, l'on aura  $f.p::h.\pm\frac{1}{2}NF(\pm\frac{1}{2}r)$ . sçavoir en  $N::h.+\frac{1}{2}r$ . Et en  $M::h.-\frac{1}{2}r$ . c'est-à-dire de part & d'autre,  $f.p::h.\pm\frac{1}{2}r$ . par raport au centre  $F$  du cercle  $MLN$ , comme si le centre  $C$  des Forces ( $f$ ) étoit en ce centre  $F$ , ainsi qu'on l'a trouvé par ce cas-ci dans les art. 26. 32. 35. & 40.

*Nouvelle  
 preuve en-  
 core des art.  
 26, 27, 32,  
 35, & 40.*

XLIV. Il suit aussi de l'art. 39. que ces forces centrales (qui sont centrifuges depuis  $N$  de part & d'autre jusqu'aux points d'attouchement  $T$ , & centripetes depuis  $M$  aussi de part & d'autre jusqu'à ces mêmes points d'attouchement) doivent être infinies en l'un & en l'autre de ces points  $T$  par raport à la pesanteur du corps où elles se trouvent; parce que  $L\lambda$  ou  $L G$  devenant nulles en ces mêmes points, l'Analogie  $f.p::h.\pm\frac{1}{2}L G$ . commune (art. 42.) à ces deux cas, se changera là en  $f.p::h.0$ . sans que  $h$  cesse d'être réelle, le mouvement du corps  $L$  étant supposé se continuer toujours en ces points d'attouchement. Ce qui s'accorde parfaitement avec l'art. 22. nomb. 1. où cela se voit convenir à routes sortes de Courbes.

*Cas où les  
 forces cen-  
 trales se-  
 roent infi-  
 nies sur le  
 cercle.*

C'est-là un Paradoxe qu'on va voir expliqué dans un éclaircissement particulier. On y verra aussi que quelque changement qu'il arrive en chacun de ces points d'attouchement  $T$  aux forces centrales ( $f$ ) du corps  $L$ , en devenant centripetes ou centrifuges, de centrifuges ou centripetes qu'elles étoient jusqu'en ce point; ce corps ne sçauroit continuer sa route suivant  $NTM$  ou  $MTN$ , c'est-à-dire, décrire seulement le demi cercle  $NTM$ , tant que le centre  $C$  de ces forces centrales se trouvera hors ce demi cercle. Mais auparavant il est bon de faire les Remarques suivantes.

## REMARQUE I.

Sur l'étendue des trois derniers articles 42. 43. & 44.

Regle de  
comparaison  
des forces  
centrales  
avec les pé-  
santeurs des  
corps dans  
le cas où les  
directions de  
ces forces se-  
roient paral-  
leles entr'el-

XLV. Il est premièrement à remarquer que ces trois derniers Corollaires où art. 42. 43. & 44. sont encore vrais dans le cas où le centre  $C$  des forces est infiniment éloigné, la distance n'y étant point déterminée. Ce qui a été démontré de ces forces pour ce cas dans les Mem. de 1700. p. 232. Corol. 2. du Prob. 6. prouve aussi qu'elles doivent être infinies dans les points où les touchantes tirées de leur centre  $C$ , rencontrent le cercle en question. La même chose se démontrera encore par rapport à toute autre Courbe dans les points où elle seroit rencontrée par des touchantes tirées d'un pareil centre de forces. La formule  $f = \frac{-dd y}{a s^2} \times 2 ph$ , qui dans ce cas particulier du centre  $C$  des forces ( $f$ ) infiniment éloigné, résulteroit de celle ( $f = \frac{ds^2 - y d^2 y}{y ds^2} \times 2 ph$ ) dont on vient de se servir dans l'article 39. donneroit aussi la même chose en se servant d'équations dont les ordonnées (appelées aussi  $y$ , quoique finies) suivant lesquelles tendroit le corps décrivant, seroient parallèles entr'elles, & terminées à un axe dont les élémens seroient  $dx$ .

Application  
de la précé-  
dente Regle  
à toutes les  
Sections co-  
niques.

Par exemple, en se servant de l'équation  $yy = \frac{abx + bxx}{a}$  commune à toutes les Sections coniques, cette nouvelle formule  $f = \frac{-2phddy}{ds^2}$  (en faisant  $dx$  constante) donnera en général  $f = \frac{2aabbph}{4aay^3 + yxab + 2bx}$ , pour toutes les Sections coniques: c'est-à-dire,

$$1^{\circ}. f = \frac{2aabbph}{4aay^3 + yxab + 2bx} \text{ pour l'Hyperbole;}$$

$$2^{\circ}. f = \frac{2aabbph}{4aay^3 + yxab + 2bx} \text{ pour l'Ellipse.}$$

$$3^{\circ}. f = \frac{2aaph}{4y^3 + yxa - 2x} \text{ pour le Cercle en faisant } b = a;$$

$$4^{\circ}. f = \frac{2bbph}{4y^3 + bby} \text{ pour la Parabole en prenant } a \text{ infini.}$$

Ce qui donne (dis-je) encore par tout là,  $f = \frac{2 a a b b p h}{o}$  (en prenant  $x = o$  &  $y = o$ ) ; c'est-à-dire les forces centrales ( $f$ ) infinies dans les points d'attouchement des touchantes parallèles aux ordonnées ( $y$ ), ou aux directions de ces forces. Et ainsi d'une infinité d'autres Courbes auxquelles on pourroit appliquer de même la formule  $f = \frac{-2 p h d d y}{d s^2}$ . Mais l'usage de cette formule d'ordonnées parallèles, de même que celui de toutes les autres formules que l'art. 29. fournit encore, & que les autres Regles de l'art. 28. pourroient fournir aussi à l'infini pour les ordonnées concourantes, & ensuite pour les ordonnées parallèles par la supposition de  $y$  infinie, étant le même que celui qu'on vient de faire de  $f = \frac{d s^2 - y d d y}{y d s^2} \times 2 p h$ , l'on ne s'y arrêtera pas davantage.

## REMARQUE II.

*Sur le raport de la pesanteur aux forces centrales dont le foyer ou centre est différent de celui des ordonnées de la Courbe en question.*

XLVI. Il est aussi à remarquer que si le centre des Forces, tant centrifuges que centripètes, du corps qui décrit une Courbe quelconque, étoit différent du centre des ordonnées de cette Courbe sur le plan de laquelle il fût; la formule  $f = \frac{4 p b \times P l}{d s^2}$  des art. 4, 5, 6, & 8. fourniroit encore des Regles plus générales que celles de l'art. 28. puisqu'en confondant ces deux centres en un, les regles de cet art. 28. deviendroient autant de Corollaires de celles-là.

Pour le voir, soit encore la Courbe  $MLN$  telle qu'on voudra, décrite par un corps  $L$  dont les forces centrales ( $f$ ) soient toutes dirigées par  $F$  suivant  $LF$ , pendant que les ordonnées  $LC$  de cette Courbe continuent de s'assembler en  $C$ . Soient aussi  $Ll = ds$ , les élémens de cette même Courbe;  $CL$  ou  $Cl = y$ , ses ordonnées;  $LD = dx$ , perpendiculaire sur  $Cl$ , & qui prolongée rencontre  $F$

*Regle de comparaison des forces centrales avec les pesanteurs des corps qui décrivent des Courbes dont le centre des ordonnées seroit différent de celui de ces forces, en considérant les élémens des Courbes comme courbes aux-mêmes.*

FIG II.

en  $A$ ; laquelle  $Fl$  rencontre aussi en  $K$  la tangente  $LQ$ , que  $Cl$  prolongée rencontre pareillement en  $S$ . Soient de plus  $FL$  ou  $Fl = q$ , les rayons des forces ( $f$ ). Soient enfin  $lo$ ,  $lp$ , parallèles à  $LD$ ,  $LF$ ; & du diametre  $CF$ , le cercle  $CBF$  que  $CL$ ,  $Cl$ , rencontrent en  $B$ ,  $b$ ; & dont  $CB$  ou  $Cb = m$ ,  $FB$  ou  $Fb = n$ , sont les cordes.

Cela fait, les triangles (*constr.*) semblables  $Fbl$ ,  $ADl$ , donneront  $bl(y-m)$ .  $Fl(q) :: Dl(dy)$   $Al$  ou  $AK = \frac{qdy}{y-m}$ . Et  $bl(y-m)$ .  $Fb(n) :: Dl(dy)$ .  $AD = \frac{ndy}{y-m}$ .

Ce qui donne  $AL = dx + \frac{ndy}{y-m} = \frac{ydx - mdx + ndy}{y-n}$ . Mais les triangles (*hyp.*) semblables  $KAL$ ,  $Klo$ , donnent aussi  $AK(\frac{qdy}{y-m})$ .  $AL(\frac{ydx - mdx + ndy}{y-m}) :: lK.lo = \frac{ydx - mdx + ndy}{qdy} \times lK$ . De plus les triangles (*hyp.*) semblables  $SDL$ ,  $Slo$ , donnent pareillement  $SD$  ou  $lD(dy)$ .  $DL(dx) :: Sl.lo = \frac{dx}{dy} \times Sl$ . Donc  $\frac{dx}{dy} \times Sl = \frac{ydx - mdx + ndy}{qdx} \times lK$ ; & par conséquent aussi  $Sl = \frac{ydx - mdx + ndy}{qdx} \times lK$ .

Or en considerant l'élément  $Ll$  de la Courbe proposée, non comme un côté droit de polygone réctiligne, mais comme un véritable arc de cercle, on a aussi trouvé ci-dessus (*art. 13.*)  $Sl = \frac{ds^2}{2r dx}$ . Donc on aura ici  $\frac{ydx - mdx + ndy}{q dx} \times Kl = \frac{ds^2}{2r dx}$ ; & par conséquent  $Kl = \frac{ds^2}{2r \times \frac{q ds^2}{2r \times ydx - mdx + ndy}}$ . Mais on vient de supposer  $q = LF = \sqrt{y-m^2 + nn}$ . Or les triangles (*constr.*) semblables  $KlP$ ,  $KFL$ , donnant  $Pl.lK :: LF.FK$ . Et l'angle  $LFK$  (*hyp.*) infiniment petit, rendant  $\frac{LF.FK}{lK}$ , l'on aura de même  $Pl = Kl$ . Donc  $Pl = \frac{ds^2}{2r} \times \frac{\sqrt{y-m^2 + nn}}{ydx - mdx + ndy}$ . Donc aussi en

substituant cette valeur de  $Pl$  dans la formule générale  $f = \frac{4pb \times Pl}{ds^2}$  des art. 4, 5, 6, & 8. l'on aura enfin  $f = \frac{2pbds}{r} \times$



$\frac{\sqrt{y-m^2+nn}}{ydx-mx+ndy}$  pour une Regle infiniment générale de comparaison des pésanteurs des corps avec leurs forces centrales, dont le centre seroit tout autre que celui des ordonnées de la Courbe qu'il décrit. *Ce qu'il falloit trouver.*

XLVII. Si presentement on suppose que le centre de ces forces centrales devienne le même que celui des ordonnées de la Courbe en question, c'est-à-dire que ces forces tendent toutes suivant ces mêmes ordonnées; ces centres  $C$  &  $F$  alors confondus en un seul & même point, rendant par-là  $CB (m)$  &  $FB (n)$  nulles, c'est-à-dire,  $m=0=n$ , la précédente Regle générale  $f = \frac{2phds}{r} \times$

$\frac{\sqrt{y-m^2+nn}}{ydx-mx+ndy}$  de l'article 46. se changera pour lors en  $f = \frac{2phds}{r} \times \frac{\sqrt{yy}}{ydx} = \frac{2phds}{r dx}$ , qui est celle qu'on a déjà trouvée pour ce cas-ci dans les art. 9, 14, & 18.

XLVIII. La Regle du centre des forces different de celui des ordonnées de la Courbe en question, qu'on vient de trouver dans l'art. 46. en considerant les élémens de cette Courbe comme Courbe eux-mêmes, se peut encore trouver en les considérant comme autant de petites lignes droites ou de côtes infiniment petits du polygone infinitesimale rectiligne sous la forme duquel cette Courbe se peut aussi considerer.

Pour cela, supposons presentement  $LQ$  en ligne droite avec le petit côté  $ZL$  de ce polygone  $MLN$ , qui prolongé vers  $Q$ , fera ici une nouvelle tangente  $LQ$  suivant laquelle la vitesse de rotation en  $L$  du corps décrivant tendra à l'emporter. Tout le reste demeurant le même par rapport à cette nouvelle tangente que ci-dessus (art. 46.) par rapport à l'autre, on trouvera ici non-seulement  $Pl$  double de ce qu'elle étoit dans cet art. 46. comme l'on a trouvé dans l'art. 17. Fig. 5.  $Yl$  double de  $Pl$ ; mais encore  $LP. Pl :: p \times LQ. f \times LP.$  comme l'on a trouvé  $LY. LG$  ou  $Yl :: p \times TL. f \times LY.$  dans l'art. 18. Fig. 5. en supposant encore ici  $LQ$  double de la hauteur ( $h$ ) d'où le corps

Regles des  
art. 9. 14.  
& 19. tirées  
de la précé-  
dente.

Autre dé-  
monstration  
de la Regle  
du penultié-  
me art. 46.  
tirée presen-  
tement de la  
considé-  
ration des  
courbes sous  
la forme de  
polygones in-  
finitesimales  
rectilignes.

tombant aquieroit en  $L$  la vitesse qu'il y a suivant  $LQ$ , de même qu'on a supposé là  $LT$  double de cette même hauteur. Donc on aura pareillement ici  $LP$ .  $Pl :: p \times 2h$ .  
 $f \times LP$ . ou  $f = \frac{2ph \times Pl}{LP \times LP} = \frac{2ph \times Pl}{Ll \times Ll}$ .

Mais en prenant encore  $r$  pour le rayon osculateur de la Courbe  $MLN$  en  $L$ , on trouvera de plus ici  $Sl = \frac{Ll \times Ll \times Ll}{r \times DL}$

de la même manière qu'on a trouvé  $Xl = \frac{Ll \times Ll \times Ll}{RL \times DL}$  dans l'art. 19. Fig. 5. où cette Courbe étoit pareillement considérée sous la forme de polygone infiniti-latere réctiligne.

Donc ayant aussi en général (art. 46.)  $Sl = \frac{ydx - mdx + ndy}{qdx} \times Kl$ , soit que cette Courbe soit considérée sous la forme de polygone ou non, l'on aura pour ici  $\frac{ydx - mdx + ndy}{qdx} \times Kl =$   
 $= \frac{Ll \times Ll \times Ll}{r \times DL}$  (en appellant encore  $Ll, ds$ ; &  $LD, dx$ ).  $=$

$= \frac{ds^3}{r \times dx}$ . Et par conséquent  $Kl = \frac{ds}{r} \times \frac{q}{ydx - mdx + ndy}$ . Or les triangles semblables  $KlP, KFL$ , donnant  $Pl :: LF.FK$ . Et l'angle  $LFK$  (hyp.) infiniment petit, rendant  $LF = FK$ , l'on aura de même  $Pl = Kl$ . Donc  
 $Pl = \frac{ds^3}{r} \times \frac{q}{ydx - mdx + ndy}$  (à cause que  $q = \sqrt{y^2 - m^2 + n^2}$  suivant l'art. 46.)  $= \frac{ds}{r} \times \frac{\sqrt{y^2 - m^2 + n^2}}{ydx - mdx + ndy}$ . Donc aussi en sub-

stituant cette valeur de  $Pl$  dans l'équation  $f = \frac{2ph \times Pl}{Ll \times Ll} =$   
 $= \frac{2ph \times Pl}{ds^2}$  trouvée cy-dessus, la presente hypothese de la Courbe polygone donnera encore la même formule  
 $f = \frac{2phds}{r} \times \frac{\sqrt{y^2 - m^2 + n^2}}{ydx - mdx + ndy}$  qui a été trouvée dans l'art. 46. en considérant cette Courbe comme faite d'éléments courbes eux-mêmes. Ce qu'il falloit encore trouver.

Regle d'ura-  
 port que doi-  
 vent avoir  
 entr'elles les  
 forces cen-  
 trales dont  
 le centre se  
 rois differe.

**XLIX.** Puisque l'article 46. & ce dernier 48. donnent  
 $f = \frac{2phds}{r} \times \frac{\sqrt{y^2 - m^2 + n^2}}{ydx - mdx + ndy}$ , soit que la Courbe  $MLN$  soit  
 considérée sous la forme de polygone ou non, & que  $2p$  est  
 (hyp.) une grandeur constante; les forces centrales dont il  
 s'agit

s'agit ici, feront entr'elles dans l'une & dans l'autre de ces deux hypothèses, comme les fractions correspondantes

$\frac{bds}{r} \times \frac{\sqrt{y-m+nn}}{ydx-mdx+ndy}$ . Mais les hauteurs ( $h$ ) d'où le corps *décrivant* de celui des ordonnés de la Courbe sur laquelle il se trouve. devrait tomber pour acquérir les vîteses qu'il a aux

différens points de la Courbe qu'il décrit, étant comme les quarrés de ces vîteses, c'est-à-dire (en prenant  $v$  pour le nom de chacune de ces vîteses, &  $dt$  pour celui de chacun des instans que le corps *décrivant* employe à parcourir chacun des élémens de la Courbe qu'il décrit)  $h = vv = \frac{ds^2}{dt^2}$ ; ces mêmes forces seront aussi entr'elles comme les

fractions  $\frac{ds^2}{dt^2} \times \frac{\sqrt{y-m+nn}}{ydx-mdx+ndy}$  correspondantes.

L. Pour faire usage de cette expression du rapport que doivent avoir entr'elles les forces centrales dont il s'agit ici, & de la Règle  $f = \frac{2phds}{r} \times \frac{\sqrt{y-m+nn}}{ydx-mdx+ndy}$  de leur rapport aux pesanteurs des corps, trouvée ci-dessus art 46. & 48. Manieres de rendre les deux Regles des trois articles precedens 46, 48, & 49. facilement applicables à toutes sortes de Courbes où le centre des ordonnées seroit différent de celui des forces centrales. il est à remarquer que ces formules en fourniront encore six autres toutes aussi générales pour le même sujet que chacune d'elles, en y substituant les six valeurs infiniment générales du rayon osculateur, qui se trouvent dans les Mem. de 1701. pag. 27. & 29. art. 10. & 14. en supposant pour les trois dernières l'arc de cercle  $MG$  ( $z$ ) décrit du centre  $C$ , & de tel rayon  $CM$  ( $a$ ) qu'on voudra, ainsi qu'on les a substitués ci-dessus art. 28. dans la formule

$f = \frac{2phds}{r}$  des art. 9. 14. & 19. pour en tirer les six autres Regles de cet art 28. Et les six qui resulteront ainsi de l'expression  $\frac{ds^2}{dt^2} \times \frac{\sqrt{y-m+nn}}{ydx-mdx+ndy}$  qu'on vient de trouver (art.

49.) du rapport que doivent avoir entr'elles les forces centrales dont il s'agit ici, seront précisément les mêmes que les six qui sont aussi pour le même sujet dans les pag. 35. & 36. art. 23. de ces Mem. de 1701. le signe d'égalité n'y signifiant qu'égalité de rapports. Voici donc seulement celles qui résultent de même de la précédente

$f = \frac{2phds}{r} \times \frac{\sqrt{y-m^2+nm}}{ydx-mx+ndy}$ , où le signe d'égalité signifie égalité de grandeurs, lesquelles sont ici homogènes, au lieu que là elles sont hétérogènes.

### REGLES DES FORCES CENTRALES.

*Comparées aux pesanteurs des corps, plus générales encore que l'article 28.*

$$\begin{aligned} 1^{\circ}. f &= \frac{2ph\sqrt{y-m^2+nm}}{ydyds} \times \frac{dxdds + ydsdx - ydxds}{ydx-mx+ndy} \\ 2^{\circ}. f &= \frac{2ph\sqrt{y-m^2+nm}}{ydxds} \times \frac{dsdx^2 + ydydds - ydsdy}{ydx-mx+ndy} \\ 3^{\circ}. f &= \frac{2ph\sqrt{y-m^2+nm}}{yds^2} \times \frac{dxds^2 + ydydx - ydxddy}{ydx-mx+ndy} \\ 4^{\circ}. f &= \frac{2ph\sqrt{y-m^2+nm}}{adyds} \times \frac{2dzdyds + ydsdz - ydzds}{ydx-mx+ndy} \\ 5^{\circ}. f &= \frac{2ph\sqrt{y-m^2+nm}}{aydzds} \times \frac{ydsdz^2 + aadyds - aadsdy}{ydx-mx+ndy} \\ 6^{\circ}. f &= \frac{2ph\sqrt{y-m^2+nm}}{ads^2} \times \frac{dzds^2 + dzdy^2 + ydydz - yzddy}{ydx-mx+ndy} \end{aligned}$$

On fera sur ces nouvelles Regles du raport des forces centrales aux pesanteurs des corps, les mêmes reflexions qui se trouvent dans les Mem. de 1701. pag. 36. & 37 art. 24. sur de pareilles Regles du raport de ces forces entr'elles. En voici seulement deux exemples, pour en faire voir l'usage.

### EXEMPLE I.

*Raport des forces centrales à la pesanteur d'un corps qui décrirait un cercle dont les ordonnées auroient leur centre à sa circonférence pendant que ces forces auroient le leur au centre même de ce cercle.*

LI. Supposons, si l'on veut, que la Courbe proposée  $MLN$  soit un cercle dont  $F$  soit le centre, auquel tendent toutes les forces centrales ( $f$ ) du corps  $L$  qui le décrit, pendant que les ordonnées  $LC$ ,  $lc$ , concourent à la circonférence de ce cercle. Alors tout le reste demeurant le même que dans l'art. 46. Fig. 11. l'égalité des rayons  $FC$  &  $FL$  de ce cercle  $MLN$ , &  $FB$  perpendiculaire sur  $LC$ , donnant  $BC(m) = \frac{1}{2}CL(\frac{1}{2}y)$ ; par conséquent

$y - m = \frac{1}{2} yy$ ; & delà  $mn = rr - \frac{1}{2} yy$ , ou  $4mn = 4rr - yy$ , en prenant  $r$  pour le nom du rayon  $FC$  de ce cercle  $MLN$ : la première des Regles du précédent art. 50. se changera ici en  $f = \frac{2rpb}{ydyds} \times \frac{dx dy ds + y ds dx - y dx ds}{\frac{1}{2} y dx + ndy} = \frac{4rpb}{ydyds} \times \frac{dx dy ds + y ds dx - y dx ds}{y dx + 2ndy}$ . Et si l'on suppose  $dx$  constante, c'est-à-dire  $ddx = 0$ , cette Regle se changera même ici en  $f = \frac{4rpb}{ydyds} \times \frac{dx dy ds - y dx ds}{y dx + 2ndy}$  (à cause que cette hypothèse de  $dx$  constante, donne aussi  $dds = \frac{dy dy}{ds}$ )

$$= \frac{4rpb}{ydyds^2} \times \frac{dx dy ds - y dx dy}{y dx^2 + 2ndy} = \frac{4rpb}{y dx^2 + y dy^2} \times \frac{dx^3 + dx dy^2 - y dx dy}{y dx + 2ndy}.$$

Mais la ressemblance des triangles  $LCD$ ,  $BCE$ , donnera aussi  $BC(\frac{1}{2}y) : LC(y) :: EB(dn) : LD(dx) = 2dn$  ( $nn = rr - \frac{1}{2}yy$  donnant  $dn = \frac{ydy}{4\sqrt{rr - \frac{1}{2}yy}} = \frac{ydy}{4n}$  positif, à cause que  $n$  &  $y$  croissent alternativement)  $= \frac{ydy}{2n}$ . Ce qui dans la présente hypothèse de  $dx$  constante, donne aussi  $d'dx(0) = \frac{nyddy + ndy^2 + ydndy}{2nn}$ , dont le dernier terme du numérateur est positif à cause de ces mêmes accroissemens alternatifs de  $n$  & de  $y$ ; d'où résulte  $ddy = \frac{-ndy^2 - ydndy}{ny}$  (à cause de  $dn = \frac{ydy}{4ny}$ )  $= \frac{-4nndy^2 - yydy^2}{4nny}$  (à cause de  $4nn = 4rr - yy$ )  $= \frac{-4rrdy^2}{4nny} = -\frac{rrdy^2}{nny}$ .

Donc en substituant ces valeurs de  $dx$  & de  $ddy$  dans la précédente équation  $f = \frac{4rpb}{y dx^2 + y dy^2} \times \frac{dx^3 + dx dy^2 - y dx dy}{y dx + 2ndy}$ , il en résultera  $f = \frac{4rpb}{y^3 + 4nny} \times \frac{yy + 4nny + 4rry}{yy + 4nn}$  (à cause de  $4nn = 4rr - yy$ )  $= \frac{4rpb}{4rry} \times \frac{4rry + 4rry}{4rr} = \frac{pb}{r} \times 2 = \frac{2pb}{r}$ ; ce qui donne ici  $f.p :: h.\frac{1}{2}r$ . comme dans les art. 26, 32, 35, 40, & 43.

LII. La même chose se peut encore trouver autrement sans rien supposer ici de constant que les rayons du cercle  $MLN$ . En effet. ayant trouvé ci-dessus (art. 51.)

Autre manière de démontrer le même rapport

Eeij

$f = \frac{4rph}{y dy ds} \times \frac{dx dy ds + y ds dx - y dx ds}{y dx + 2ndy}$ , dont  $dx$ ,  $dy$ ,  $ds$ , sont toutes variables; Et les Mem. de 1701. pag. 27. art. 10. nom-

bre 1. donnant alors  $r = \frac{dx dy ds + y ds dx - y dx ds}{ds}$ , ou

$\frac{r}{y dy ds} = \frac{dx dy ds + y ds dx - y dx ds}{ds}$ , à cause que le rayon du cercle est celui de sa Développée, laquelle se confond toute en son centre: la substitution du second membre de cette égalité pour le premier dans la précédente valeur de  $f$ ,

donnera  $f = \frac{4phds}{y dx + 2ndy}$ .

Or les triangles semblables  $Fbl$ ,  $LDL$ , donnent  $Ll$  ( $ds$ ).  $Dl$  ( $dy$ ) ::  $Fl$  ( $r$ ).  $Fb$  ( $n$ )  $= \frac{r dy}{ds}$ . Donc en substituant cette valeur de  $n$  dans l'égalité précédente, l'on aura

$f = \frac{4phds}{y dx ds + r dy}$ .

Mais les mêmes triangles  $Fbl$ ,  $LDL$ , donnent aussi  $bl$  ( $\frac{1}{y}$ ).  $Fl$  ( $r$ ) ::  $LD$  ( $dx$ ).  $Ll$  ( $ds$ )  $= \frac{r dx}{y}$ . Donc en substituant cette même valeur de  $ds$  dans le diviseur de la dernière valeur de  $f$ , l'on aura enfin  $f = \frac{4phds}{r dx + 2r dy} = \frac{2ph}{r}$ . Ce qui donne encore  $f.p : h. \frac{1}{r}$ . Ainsi qu'on le vient de trouver dans le précédent art. § 1. conformément aux art. 2 6 32, 35, 40, & 41,

### EXEMPLE III.

FIG. XIII

Quel seroit ce rapport dans le cas où le centre de forces, & celui des ordonnées du cercle en question, seroient aux deux extrémités d'un même diamètre de ce cercle.

LIII. Si l'on veut que la Courbe proposée  $MLN$  soit encore un cercle, mais qui ait presentement le centre  $C$  des ordonnées  $LC$ , & le centre  $F$  des forces du corps décrivant, aux extrémités d'un de ses diamètres; & que par conséquent elle se confonde ici avec le demi-cercle  $CBF$ . Alors cette Courbe ayant  $CB$  ( $m$ )  $= CL$  [ $y$ ], ou  $y - m = 0$ , la première des Regles infiniment générales trouvées dans

l'art. 50. se changera ici en  $f = \frac{2rph}{y dy ds} \times \frac{dx dy ds + y ds dx - y dx ds}{ndy} = \frac{2ph}{y} \times \frac{dx dy ds + y ds dx - y dx ds}{y dy ds}$ . Et si l'on suppose  $dx$  constant,

& par conséquent  $dds = \frac{dy dy}{ds}$ , elle se changera même en

$$f = 2ph \times \frac{dx dy ds^2 - y dx ddy}{y dy ds^2} = 2ph \times \frac{dx ds^2 - y x ddy}{y dy ds^2}$$

Mais si l'on prend  $2r$  pour le nom du diametre  $CF$ , l'on aura ici  $4rr - yy = nn$ , ou  $\sqrt{4rr - yy} = n$ ; ce qui donne  $\frac{-y dy}{\sqrt{4rr - yy}} \left( \frac{-y dy}{n} \right) = -dn = -dx$  négatif, à cause que  $n$  &  $y$  croissent alternativement, & que  $EB (dn)$  se confond ici avec  $DL (dx)$ . Et pour cette même raison l'équation résultante  $y dy = n dx$  donnera aussi  $y ddy + dy^2 = -n dx = -dx^2$  négatif encore pour la même raison, & sans  $n ddx$  à cause de  $dx$  (*hyp.*) constante; d'où résulte enfin  $y ddy = -dx^2 - dy^2 = -ds^2$ .

Donc en substituant cette valeur de  $y ddy$  dans la dernière équation  $f = 2ph \times \frac{dx ds^2 - y dx ddy}{y dy ds^2}$ , l'on aura  $f = 2ph \times \frac{dx ds^2 + dx ds^2}{y dy ds^2} = 2ph \times \frac{2dx}{y dy}$  (à cause de  $dx = \frac{y dy}{n}$ )  $= 2ph \times \frac{2y dy}{ny dy} = \frac{4ph}{n}$ . D'où résulte  $f.p. : h. \frac{1}{2} n$ . conformément à l'art. 41.

## REMARQUE III.

*Sur le rapport de la Pesanteur aux forces centrales de differens foyers ou centres.*

LIV. Il est aussi à remarquer que quoique jusqu'ici nous n'ayons considéré à chaque point de la Courbe en question, qu'une seule force centrale dans le corps qui la décrit, la comparaison que nous en avons faite avec la pesanteur de ce corps, se pourra faire de même avec autant d'autres forces centrales qu'on lui en voudra supposer à la fois à chaque point de cette Courbe, par le concours desquelles il l'auroit décrite, en donnant le rapport de ces forces entr'elles de chaque foyer aux autres; & cela de la même manière que les Regles que nous avons données de ces forces en 1701. nous ont conduit à celles que nous avons données de ces forces concourantes en 1703.

*Regle de comparaison des forces centrales dirigées par plusieurs centres ou foyers avec la pesanteur du corps où elles se trouvent.*

Pour le voir, soit encore une Courbe quelconque  $MLN$ , mais décrite presentement à la maniere de M. *Tschirnhausen*, par le corps  $L$  mù suivant  $LN$  par le con-

Fig. XIV.

cours de tant de forces centrales qu'on voudra ; qui agissent toutes à la fois sur lui suivant des lignes qui passent par leurs foyers ou centres fixes  $A, B, C$ , &c. placés d'abord comme l'on voudra dans le plan de cette Courbe. Soit  $ILQ$  la tangente de cette même Courbe en tel point  $L$  qu'on voudra, avec l'arc  $LI$  infiniment petit, par les extrémités duquel soient tirées des centres ou foyers  $A, B, C$ , &c. les droites  $AL, Al; BL, Bl; CL, Cl$ , &c. dont  $Bl, Cl$ , prolongées rencontrent la tangente  $LQ$  en  $V, S$ . Soient aussi  $IK, LG, LD$ , perpendiculaires sur  $AL, Bl, Cl$ , & dont la première  $Kl$  prolongée du côté de  $l$ , rencontre en  $O$  la tangente  $LQ$ , sur laquelle soient pareillement  $IF, KT, GY, DX$ , perpendiculaires en  $F, T, Y, X$ . Soient de plus  $RL, Rl$ , deux des rayons osculateurs de la Courbe  $MLN$ , dont le second prolongé du côté de  $l$ , rencontre aussi en  $E$  la tangente  $LQ$ . Soient  $A, B, C$ , &c. les noms des forces centrales dirigées suivant les droites  $LA, LB, LC$ , &c. qui passent par les foyers ou centres fixes  $A, B, C$ , &c.

Cela fait, les triangles rectangles semblables  $LKO, LTK$ , donneront  $OL$  ou  $Ll. OK$ , ou  $Kl: LK. TK:: A. \frac{A \times Kl}{LI}$  effort de la force  $A$  sur le corps  $L$  suivant  $TK$  perpendiculaire (*hyp.*) à  $LQ$ . Les triangles rectangles semblables  $LGV, GYV$ , donneront pareillement  $VL$  ou  $Ll. LG:: VG. YG:: B. \frac{B \times LG}{LI}$  effort de la force  $B$  sur le même corps  $L$  suivant  $YG$  perpendiculaire (*hyp.*) à  $LQ$ . De même encore les triangles rectangles semblables  $LDS, DXS$ , donneront aussi  $SL$  ou  $Ll. DL:: SD. XD:: C. \frac{C \times DL}{LI}$  effort de la force  $C$  sur le même corps  $L$  suivant  $XD$  perpendiculaire encore (*hyp.*) à  $LQ$ . On trouvera de même les efforts perpendiculaires à  $LQ$  de tant d'autres forces centrales qu'on voudra supposer agir aussi sur le corps  $L$ . Donc en retranchant ce que ce corps reçoit ainsi d'impression vers le dehors de ce qu'il en reçoit vers le dedans de la Courbe  $MLN$ , perpendiculairement à  $LQ$ , & en



supposant que  $B$  est de la première espèce, &  $A, C$ , de seconde; l'on aura ici  $\frac{A \times KL}{Ll} + \frac{C \times DL}{Ll} - \frac{B \times LG}{Ll} \pm \&c.$  ou  $\frac{A \times Kl + C \times DL - B \times LG \pm \&c.}{Ll}$  pour tout ce que ces forces lui donnent ensemble d'effort ou d'impression perpendiculaire à  $LQ$  vers le dedant de cette Courbe dans l'instant qu'il parcourt l'élément  $Ll$ , en vertu duquel effort il est attiré de la tangente  $LQ$  sur cette même Courbe de la valeur de  $Fl$ , aussi perpendiculaire (*hyp.*) à cette tangente, pendant le même instant.

Cela étant, si l'on prend  $HL$  pour la hauteur d'où ce corps tombant en vertu de sa seule pesanteur, acquieroit en  $L$  une vitesse égale à celle qu'il a effectivement suivant  $Ll$ ; il est visible que le tems de cette chute de  $H$  en  $L$ , seroit au tems que ce même corps met à parcourir  $Ll$  ::  $2HL. Ll$  puisque cette vitesse demeurant uniforme, lui feroit parcourir le double de  $HL$  dans le tems de cette chute; & qu'à vitesses égales les espaces sont comme les tems employés à les parcourir. Donc en appellant  $dt$  l'instant que ce corps emploie à parcourir  $Ll$ , l'on aura

$\frac{2HL \times dt}{Ll}$  pour le tems de sa chute faite de  $H$  en  $L$  en vertu

de sa seule pesanteur ( $p$ ). Par conséquent les espaces parcourus par un même corps en vertu de forces constantes & continuellement appliquées, toutes qu'on suppose d'ordinaire la pesanteur, & que toute force centrale l'est à chaque instant, étant (*art. 10.*) en raison composée de ces forces & des quarrés des tems employés à les parcourir,

l'on aura ici  $Fl. HL :: \frac{A \times Kl + C \times DL - B \times LG \pm \&c.}{Ll} \times dt^2$ .

$p \times \frac{4HL \times HL \times dt^2}{Ll \times Ll}$ . Ce qui donnera  $A \times Kl + C \times DL - B \times LG \pm \&c. = \frac{4p \times HL \times Fl}{Ll}$ .

Introduction  
durayon of-  
culateur  
dan la pré-  
ced nte Re-  
gle, en con-  
siderant les  
éléments des  
courbes com-  
me courbes  
eux-mêmes.

LV. Mais en regardant (ainsi que l'on vient de faire)  $Fl$  comme parcourue d'un mouvement accéléré pendant le tems que  $LF$  est parcourue d'un mouvement uniforme, l'élément  $Ll$  décrit par le concours de ces deux mouve-

mens, doit être ici regardé comme courbe, & comme un véritable arc dans lequel la Courbe  $MLN$  est baissée par son cercle osculateur en cet endroit; & par conséquent comme un véritable arc de cercle dont  $R$  seroit le centre, & non comme un côté droit de polygone. Ce qui

donnera  $El = \frac{Ll \times Ll}{2Ll}$  comme dans l'art. 9. De sorte que les triangles (*constr.*) rectangles & semblables  $EFL$ ,  $ELR$ , donnant  $Fl : El :: LR : ER$ . Et l'élément  $Ll$  rendant

$LR = ER$ , l'on aura ici  $Fl = El = \frac{Ll \times Ll}{2LR}$ . Donc en substituant cette valeur de  $Fl$  dans la formule par où finit le précédent art. 54. l'on aura enfin  $A \times Kl - C \times DL - B \times$

$LG + \&c. = \frac{2p \times HL \times Ll}{LR}$ . Et par conséquent en appelant encore  $HL$ ,  $h$ ;  $LR$ ,  $r$ ; &  $Ll$ ,  $ds$ ; l'on aura de même

$A \times Kl - C \times DL - B \times LG + \&c. = \frac{2p h ds}{r}$  pour une Re-

gle générale de comparaison de la pesanteur d'un corps avec tout ce qu'on lui peut imaginer de forces centrales conspirantes ensemble à lui faire décrire quelque Courbe que ce soit, le rapport de ces forces entr'elles étant donné de chacun de leurs foyers aux autres, comme dans le Memoire du 5 Sept. de 1703. ces efforts se faisant ici tous suivant le plan de la Courbe  $MLN$  qu'ils font décrire au corps  $L$ . Et lorsqu'ils seront dans des plans differens, cette même Regle en fournira encore une autre toute aussi générale pour ce cas, en le faisant revenir à l'autre de la manière qu'on l'a fait dans ce Mem. du 5 Sept. 1703. Ainsi il n'est pas nécessaire de nous y arrêter davantage, ni d'avertir que le rayon ( $r$ ) de la Développée de la Courbe  $MLN$  doit ici être pris par rapport à tous les foyers  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , &c. Et le reste comme dans ce même Memoire.

Regles des  
art. 14, 19.  
& 47, tirée  
de la préce-  
dente.

LVI. Si l'on compare cette Analyse avec celle des art. 5. & 9. on verra qu'elle n'en diffère presque point. La Regle qu'elle vient de nous donner, pourroit se trouver de même en suivant l'Analyse des art. 2, 3, 4, & 6. Aussi lorsque tous les foyers qu'on y suppose, se réduisent à un sur le plan de la Courbe en question, cette même Regle du précédent

cedent art. 55. se change-t-elle en celle de l'art. 9. concluë de ces articles-là. En effet, si de tous ces foyers il ne restoit que  $C$ , l'anéantissement des autres  $A$ ,  $B$ , &c. réduiroit cette Regle à  $C \times DL = \frac{2phds}{r}$  : De sorte qu'en appellant la force  $C$ ,  $f$ ; &  $DL$ ,  $dx$ ; l'on auroit aussi  $f dx = \frac{2phds}{r}$ , ou  $f = \frac{2phds}{r dx}$ , comme dans cet art. 9.

LVII. La regle qu'on vient de trouver dans l'art. 55. en considérant les élémens des Courbes comme courbes eux-mêmes, se peut encore trouver en les considérant comme autant de petites lignes droites ou de côté infiniment petits des polygones sous la forme desquels ces Courbes se peuvent aussi considérer.

Pour cela, soit encore une Courbe quelconque  $MLN$  décrite à la manière de M. de *Tschirnhausen* par le corps  $L$  mù suivant  $LN$  par le concours de tant de forces centrales qu'on voudra, qui agissent toutes à la fois sur lui suivant des directions qui passent par leurs centres fixes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , &c. placés comme ci-dessus art. 54. Soient présentement  $ZL$ ,  $Ll$ , deux des côtés infiniment petits de ce polygone infini-latere, dont le premier  $ZL$  prolongé en devienne la tangente sur laquelle je suppose présentement  $LQ$ , enforte que  $LQ$  soit présentement ce petit côté lui-même prolongé. Soit aussi présentement  $lF$  un arc de cercle décrit du centre  $L$  par  $l$ . Soient encore  $LR$ ,  $lR$ , les rayons de la Développée de cette Courbe  $MLN$ . Ensuite après avoir encore fait les droites  $AL$ ,  $Al$ ;  $BL$ ,  $Bl$ ;  $CL$ ,  $Cl$ ; &c. Soient encore aussi  $lK$ ,  $LG$ ,  $LD$ , &c. des perpendiculaires aux droites  $AL$ ,  $Bl$ ,  $Cl$ , &c. ou des arcs de cercles décrits des centres  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , &c. Soit présentement  $DX$ , &c. perpendiculaire au petit côté  $Ll$  de la Courbe.

Cela fait, les triangles semblables  $LDl$ ,  $DXl$ , donneront  $Ll \cdot DL :: Dl \cdot XD :: C \cdot \frac{Cl \cdot DL}{Ll}$  effort de la force  $C$  sur le corps  $L$  suivant  $XD$  perpendiculaire (*hyp.*) à  $Ll$ .

On trouvera de même  $\frac{Ax \cdot lK}{Ll}$ ,  $\frac{Bx \cdot LG}{Ll}$ , &c. pour ce que les

forces  $A, B, \&c.$  font d'efforts perpendiculaires à  $Ll$  sur le même corps *décrivant*. Donc en retranchant encore ce que ce corps reçoit ainsi d'impression vers le dehors de ce qu'il en reçoit vers le dedans de la Courbe  $MLN$ , perpendiculairement à son petit côté  $Ll$ , l'on aura encore ici

$$\frac{A \times Kl + C \times LD - B \times LG}{Ll} + \&c. \text{ ou } \frac{A \times Kl + C \times LD - B \times GL + \&c.}{Dl}$$

pour tout ce que ces forces centrales  $A, B, C, \&c.$  lui donnent ensemble d'effort perpendiculaire à  $Ll$  vers le dedans de cette Courbe dans l'instant qu'il en parcourt cet élément  $Ll$ , en vertu duquel effort il est encore attiré de la tangente  $LQ$  sur cette même Courbe de la valeur de  $Fl$  pendant cet instant, laquelle  $Fl$  se trouvera ici double de ce qu'elle étoit dans les art. 54. & 55. comme l'on a trouvé  $Yl$  double de  $Pl$  dans l'art. 17. Fig. 5.

Si l'on regarde présentement cette force centrale résultante du concours de toutes les autres  $A, B, C, \&c.$  vers le dedans de la Courbe  $MLN$ , comme une force simple suivant  $Fl$  perpendiculaire au petit côté  $Ll$  de cette Courbe considérée sous la forme de polygone infini-latere réctiligne, ainsi qu'on fait ici; & qu'après avoir encore ici supposé  $LQ$  double de  $HL$ , on multiplie cette force par  $LF$ , & la pesanteur ( $p$ ) du corps  $L$  par  $LQ$ : la raison qui a donné  $LY.LG$  ou  $Yl$ : :  $p \times LT.f \times LY$ . dans l'article 18. Fig. 5. donnera de même ici  $LF.Fl$ : :  $p \times LQ$ .  $\frac{A \times Cl + C \times Dl - B \times Gl + \&c.}{Ll} \times LF$ . D'où résultera  $A \times Kl +$

$$+ C \times DL - B \times GL + \&c. = \frac{p \times LQ \times Fl \times Ll}{LF \times LF} \text{ (à cause de } LQ = 2HL, \& \text{ de } LF = Ll) = \frac{2p \times H \times L \times Fl}{Ll}.$$

Mais la Courbe  $MLN$  considérée (ainsi qu'elle l'est ici) sous la forme de la polygone infini-latere réctiligne, donne de plus  $LR.Ll$ : :  $Ll.Fl = \frac{Ll \times Ll}{LR}$ . en prenant en-

core ici  $LR$  pour un des rayons de sa Développée. Donc en substituant cette valeur de  $Fl$  dans la formule où équation précédente, l'on aura enfin  $A \times Kl + C \times DL - B \times GL + \&c. = \frac{2p \times H \times L \times Ll}{LR}$  (en supposant encore  $HL = b$ ;

$LR=r$ , &  $Ll=ds$ )  $= \frac{2phds}{r}$  pour la Regle cherchée de tant de forces centrales qu'on voudra faire conspirer à la description d'une même Courbe quelconque considérée comme polygone infiniti-latere réctiligne, laquelle Regle on voit être la même que celle qui a été trouvée dans l'art. 55. en considerant cette Courbe comme faire d'éléments courbes eux-mêmes. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

LVIII. Puisque les art. 55. & 57. donnent  $A \times Kl +$  Regle du rapport ou des rapports que doivent avoir entr'elles les forces centrales à plusieurs centres ou foyers.  
 $+ C \times DL - B \times GL \pm \&c. = \frac{2 hds}{r}$ , soit qu'on considère la Courbe  $MLN$  sous la forme de polygone, ou non; que  $2p$  est une grandeur constante, & que les hauteurs  $(h)$  d'où le corps *décrivant* devoit tomber pour acquérir les vitesses qu'il a aux differens points de la Courbe qu'il décrit, sont comme les quarrés de ces vitesses, c'est-à-dire, (en prenant  $v$  pour le nom de chacune de ces vitesses, &  $dt$  pour celui de chacun des instans que le corps *décrivant* emploie à parcourir chacun des éléments  $ds$  de la Courbe qu'il parcourt)  $h = v v = \frac{ds^2}{dt^2}$ ; l'on aura  $A \times Kl + C \times DL - B \times GL \pm \&c. = \frac{ds^2}{r dt^2}$  pour l'expression de la raison que chacune des forces centrales  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , &c. dont il s'agit ici, doit suivre pendant sa variation par les differens points de la Courbe  $MLN$  qu'elles font décrire au corps  $L$  par leur concours d'action sur ce même corps, quel que soit le rapport  $(hyp.)$  donné de chacune de ces forces à chacune des autres: Et cette expression est précisément la même que celle que j'ai trouvée pour le même sujet dans les Memoires de 1703. pag. 214. art. 2. Le signe d'égalité ne signifiant ici, non-plus que là, que des égalités de rapports, & non de grandeurs, puisqu'elles n'y sont pas homogenes comme dans les articles précédens.

## REMARQUE IV.

*Touchant les Forces centrales de differens corps sur une même ou différentes Courbes, ou d'un même corps sur des Courbes différentes.*

*Regle de comparaison des forces centrales de differens corps sur une même ou différentes Courbes, ou d'un même corps sur des Courbes différentes.* LIX. Jusqu'ici nous n'avons considéré les Forces centrales que d'un même corps quelconque sur une seule & même Courbe aussi quelconque ; voici présentement pour de pareilles forces de differens corps sur une même ou sur différentes Courbes, ou d'un même corps sur des Courbes différentes: Voici, dis-je, quelles doivent être aussi les regles de comparaison de ces dernieres forces entr'elles, & avec les pesanteurs constantes de ces corps. Pour cela soient,

Les forces centrales . . . . .  $f, F, \phi$ .  
de trois corps dont les Masses soient . . .  $m, m, \mu$ .

Leurs Pesanteurs . . . . .  $p, \pi, \pi$ .

Elémens des Courbes qu'ils décrivent  $ds, d\sigma, d\sigma$ .

Vitesse avec lesquelles ils parcourent }  
ces élémens . . . . .  $u, v, v$ .

Hauteurs déterminatrices de ces vitesses }  
tesses . . . . .  $h, \lambda, \lambda$ .

Rayons osculateurs de ces Courbes terminés aux élémens précédens . . . . .  $r, s, s$ .

Elémens des abscisses de ces mêmes Courbes, tels que  $LD$  par tout ci-dessus. }  $dx, dx, dx$ .

Cela posé les articles 9, 14, 18, 47, & 56. donneront

$$f = \frac{2phds}{r dx}, \text{ \& } F = \frac{2\pi\lambda d\sigma}{p dx}.$$

$$\text{Ainsi l'on aura déjà } f. F :: \frac{phds}{r dx} \cdot \frac{\pi\lambda d\sigma}{p dx}.$$

$$\text{L'on aura aussi de plus } F. \phi :: \frac{m}{\mu}.$$

$$\text{Donc on aura aussi } f. \phi :: \frac{mphds}{r dx} \cdot \frac{\mu\pi\lambda d\sigma}{p dx}.$$

pour la Regle générale de comparaison cherchée, laquelle est aisée à détailler, quelque differens que les rapports des masses des corps entr'elles, & de leurs pesanteurs

entr'elles, puissent être supposés lorsque ces corps sont différens, &c. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

*Toutes ces Regles ainsi établies, il ne reste plus (ce me semble) qu'à expliquer le Paradoxe marqué à la fin de l'art. 44. En voici l'éclaircissement.*

#### ECLAIRCISSEMENT.

*Sur le Paradoxe marqué à la fin de l'art. 44.*

LX. Ce Paradoxe a raport à une difficulté qui me fut faite au mois de Fevrier ou de Mars de 1701. par M. L. C. D. L. fort habile en ces matieres. Il trouvoit étrange que les forces centrales qu'on vient de voir par tout ci-dessus (à quelques cas près marqués dans l'article 22.) être finies, ou de même genre que la pesanteur des corps où elles se trouvent, ne leur fissent cependant parcourir que des espaces infiniment petits du second genre, tels que  $Pl$ ,  $Kh$ ,  $Tu$ ,  $Fe$ , dans les Fig. 1, 2, 3, 4. ci-dessus art. 10. pendant chaque instant qui est un tems infiniment petit du premier genre. Cette force finie, disoit-il, doit faire parcourir un espace fini à un corps fini dans un tems fini. Par conséquent elle doit aussi lui faire parcourir un espace infiniment petit du premier genre dans un tems infiniment petit du premier genre, c'est-à-dire, dans un instant. Par exemple, ajouta-t'il, si  $x$  est l'espace fini que cette force fait parcourir à ce corps dans le tems fini  $t$ , elle devroit aussi lui faire parcourir  $dx$  dans l'instant  $dt$ ; cependant elle ne lui fait parcourir  $ddx$  pendant cet instant; comment concilier cela?

Je lui répondis qu'il en étoit de même de la pesanteur au premier instant de chaque chute; & que cela venoit de ce que si l'on suppose l'une & l'autre de ces deux forces comme la même dans tout le tems  $t$  dès son premier instant  $dt$ , c'est-à-dire, comme constante & toujours agissante sur ce corps ainsi qu'on le pense d'ordinaire de la pesanteur, les espaces que chacune d'elles lui doit faire parcourir pendant ces tems, doivent être comme les quarrés de ces mêmes tems à commencer dès l'origine de l'un & de l'autre.

tre de ces espaces, c'est-à-dire ::  $tt$ .  $dt^2$ . Mais  $dt^2$  est de même genre que  $tdt$ ; puisque tous les  $ddt$  sont entr'eux de même genre, & que celui d'entr'eux qui est troisième proportionel à  $t$  & à  $dt$ , donne  $t ddt = dt^2$ . Donc le genre de l'espace  $x$  que cette force fait parcourir (*hyp.*) pendant le tems  $t$  au corps sur lequel elle agit, doit être au genre de ce qu'elle lui en doit faire parcourir pendant le premier instant  $dt$  de son action sur ce corps, comme le genre de  $tt$  est au genre de  $tdt$ , c'est-à-dire, comme le genre de  $t$  est au genre de  $ddt$ , ou comme le fini à l'infiniment petit du second genre. Donc  $x$  étant (*hyp.*) l'espace fini parcouru dans le tems fini  $t$  en vertu de cette force centrale supposée finie & la même pendant tout ce tems  $t$  que dans l'instant  $dt$ , ou de la pesanteur supposée pareillement finie & constante;  $ddx$  doit être ce qu'elle en fait parcourir au même corps fini pendant l'instant  $dt$ . Mais quand ces forces de l'instant  $dt$  variroient de quelque maniere que ce fût dans le reste du tems  $t$ , cette variation ne changeant rien à leurs valeurs constantes de l'instant  $dt$ , il est visible qu'elles devroient encore faire faire à ce corps chacune le même espace pendant l'instant  $dt$ , que si elles demeuroient constantes pendant tout le tems  $t$ . Donc quelques variables que les forces centrales soient, & quand la pesanteur des corps le seroit aussi, chacune de ces forces ne seroit encore parcourir que  $ddx$  pendant le premier instant  $dt$  de leur action, c'est-à-dire, un espace infiniment petit du second genre à un corps fini dans un tems infiniment petit du premier genre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

*Autre démonstration  
du précédent  
art. 59.*

LXI. La même chose se peut démontrer encore sans calcul. Car puisque la force totale résultante de l'assemblage de tout ce que la pesanteur du corps qui tombe, lui en imprime de nouvelle à chaque instant de sa chute dans un tems fini, ne lui fait parcourir qu'un espace fini dans ce tems fini, cette même force totale ne lui doit faire parcourir qu'une infinitième ou différentielle du premier genre de cet espace dans une infinitième de ce tems, c'est-



à-dire, dans un instant. Donc la pesanteur de ce corps n'étant d'elle-même qu'une infinitième de cette force totale faite d'une infinité d'accroissemens instantanés égaux chacun à cette pesanteur, ne doit plus lui faire parcourir par elle seule à chaque instant qu'une infinitième de cette premiere différentielle d'espace fini, c'est à-dire, seulement une differentio-différentielle ou une seconde différentielle de cet espace. Par conséquent aussi la force centrale d'un corps à chaque instant pouvant être regardée comme une espece de pesanteur ou de force constante de même genre que la pesanteur de ce corps, elle ne doit non-plus lui faire parcourir qu'une différentielle d'espace du second genre pendant cet instant. *Ce qu'il falloit encore démontrer.*

*Puisque (art. 60. & 61.) la pesanteur d'un corps fini, prise comme une force constante à la maniere de Galilée, ne peut lui faire parcourir qu'une différentielle (d'espace) du second genre, pendant que sa force de rotation lui en fait parcourir une du premier; il suit nécessairement que sa pesanteur est infiniment petite par rapport à sa force de rotation, quoiqu'on regarde aussi d'ordinaire cette force de rotation comme une force finie; mais ce sont deux genres différens de forces finies, comme les lignes, les surfaces, & le corps, sont trois différens genres de grandeurs finies: De même, dis-je, que les corps, les surfaces, & les lignes, sont également appelées des grandeurs finies, quoique les lignes soient infiniment petites par rapport aux surfaces, & les surfaces par rapport aux corps; De même aussi les forces de rotation, les pesanteurs; & les forces centrales trouvées ci-dessus de même genre que les pesanteurs, sont également regardées comme des forces finies, quoique les deux dernières soient infiniment petites par rapport à la premiere: De sorte que lorsqu'on a dit ci-dessus (art. 22.) qu'il y a des cas où les forces centrales se trouvent infinies, on a seulement voulu dire qu'elles se trouvent alors infinies par rapport aux pesanteurs, & de même genre que les forces de rotation. C'est ainsi que cela se doit entendre dans tout cet Ecrit.*

*Solution de*

**LXII.** Des articles 60. & 61. suit nécessairement la *la premiere*

partie du pa-  
radoxe mar-  
qué à la fin  
de l'art. 44.

Solution du Paradoxe de l'art 44. duquel il est ici ques-  
tion. En effet, puisque suivant ces deux derniers art. 60.  
& 61. une force centrale finie ou de même genre que la  
pésanteur du corps fini où elle se trouve, ne peut faire  
parcourir à ce corps qu'un espace infiniment petit du se-  
cond genre dans un instant, il est manifeste que pour lui  
en faire parcourir un du premier genre dans ce même  
instant, cette force devrait être infinie par rapport à cette  
pésanteur; puisque cet espace seroit infini par rapport à  
l'autre, & que les effets sont toujours proportionnels aux  
causes. Or c'est justement ce que font les forces centrales  
du corps  $L$  aux points  $T$  où les touchantes tirées du centre  
 $C$  de ces forces, rencontrent le cercle  $MLN$  que ce corps  
est supposé décrire avec telle variété ou variation de vi-  
tesse qu'on voudra: ces forces (dis-je) font parcourir cha-  
cune au corps  $L$  en  $T$ , un espace infiniment petit du pre-  
mier genre dans un seul instant.

Pour le voir soit la sécante  $CL$  infiniment proche de la  
tangente  $CT$ , avec deux autres touchantes  $LP$ ,  $\lambda\tau$ , aux  
points  $L$ ,  $\lambda$ , où cette sécante rencontre le cercle, les-  
quelles touchantes rencontrent la première  $CT$  en  $P$ ,  $\pi$ ,

Cela fait, il est visible que dans l'instant que le corps  $L$ ,  
venant de  $N$  en  $T$ , parcourt l'élément circulaire  $LT$ , il  
parcourroit la tangente  $LP$  s'il n'en étoit point empêché  
par la force centrale qui dans cet instant le tire vers  $C$  de  
la valeur de  $PT$ ; & qu'ainsi  $PT$  est ce que cette force lui  
fait faire alors d'espace pendant cet instant. Or il est vi-  
sible aussi que  $PT$ , ici égale à  $LP$ , est de même genre que  
 $LP$  &  $LT$ . Donc la force centripète de ce corps vers  $C$ ,  
lui feroit parcourir alors un infiniment petit du premier  
genre. Par conséquent suivant le commencement de cet  
article-ci, cette force doit aussi être pour lors infinie par  
rapport à la pésanteur de ce corps.

On trouvera de même que ce corps allant de  $M$  en  $T$ ,  
sa force centrifuge suivant  $CL$ , doit le repousser de la va-  
leur de  $\pi T$  dans l'instant qu'au lieu de parcourir la tan-  
gente  $\lambda\tau$ , comme il seroit sans cette force, cette même  
force

force l'oblige de suivre  $\lambda T$ ; & qu'ainsi  $\pi T$  étant encore un infiniment petit du premier genre, cette force centrale doit encore être infinie par rapport à la pesanteur de ce corps.

Donc de quelque côté  $N$  ou  $M$ , que le corps  $L$  vienne au point d'attouchement  $T$ , ses forces centrales suivant la touchante  $CT$ , doivent toujours être infinies par rapport à sa pesanteur. Et ainsi des Forces centrales tendantes suivant les touchantes de toute autre Courbe, conformément à l'article 22. & à la première partie du Paradoxe marqué à la fin de l'art. 44.

LXIII. L'autre partie de ce Paradoxe est que quelque changement qu'il arrive en chaque point d'attouchement  $T$ , aux forces centrales ( $f$ ) du corps  $L$ , en devenant centrifuges ou centripètes, de centripètes ou de centrifuges qu'elles étoient jusqu'à ce point; ce corps ne s'au-  
So'ution de la seconde partie du même paradoxe.  
 roit continuer sa route suivant  $NTM$  ou  $MTN$ , c'est-à-dire, décrire seulement le demi-cercle  $NTM$ , tant que le centre  $C$  de ces forces ( $f$ ) sera hors ce demi-cercle du côté de sa convexité.

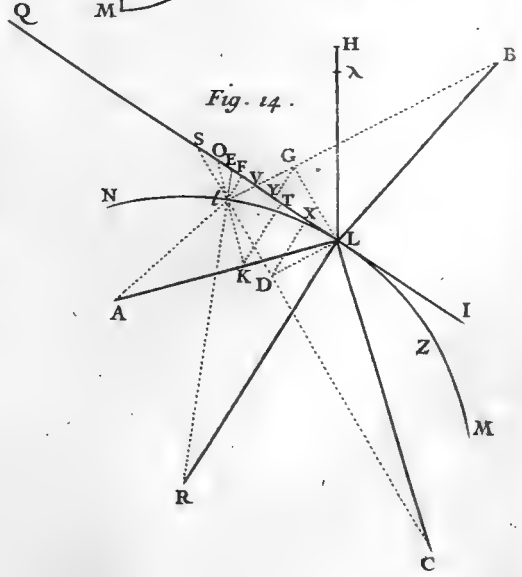
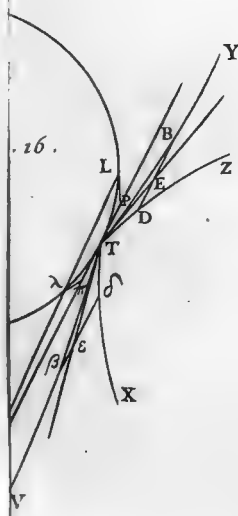
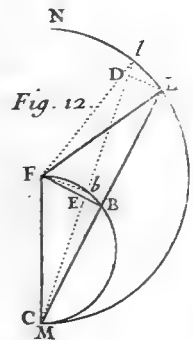
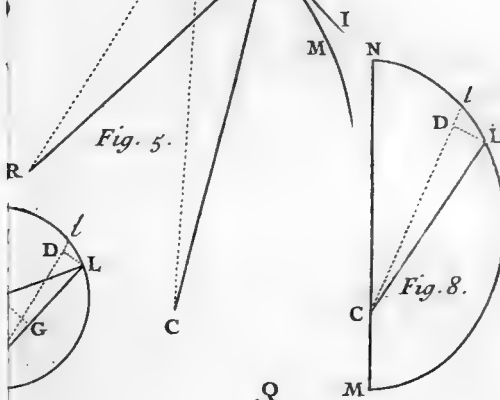
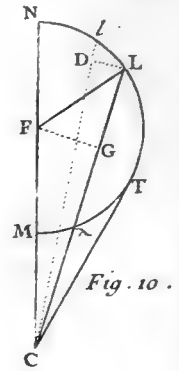
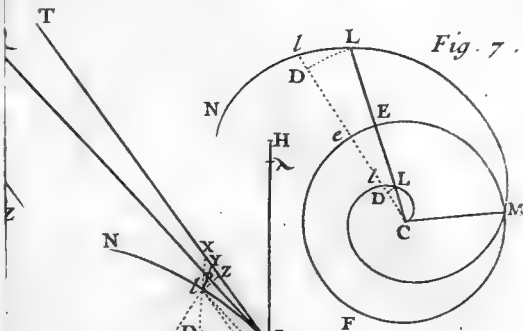
Pour le voir il faut considérer que puisque le corps  $L$  venant de  $N$  en  $T$ , n'arrive en ce point d'attouchement  $T$ , qu'en suivant  $LT$ , & seulement en vertu du concours d'action de son effort suivant  $LP$ , & de sa force suivant  $PT$ ; ce corps abandonné à lui-même, au lieu d'aller vers  $M$  suivant  $T\lambda$ , continueroit sa route suivant la droite  $LT$  prolongée vers  $\epsilon$ : de sorte que quelque changement qu'il arrive alors à sa force centrale ( $f$ ) tendante suivant  $CT$ , elle ne portera jamais ce mobile sur l'arc  $TM$ ; mais sur l'arc  $TX$ , si elle devient centrifuge; ou sur l'arc  $TV$  d'une Courbe qui embrassera ou passera par ce point  $C$ , si cette force continué d'être centripète.

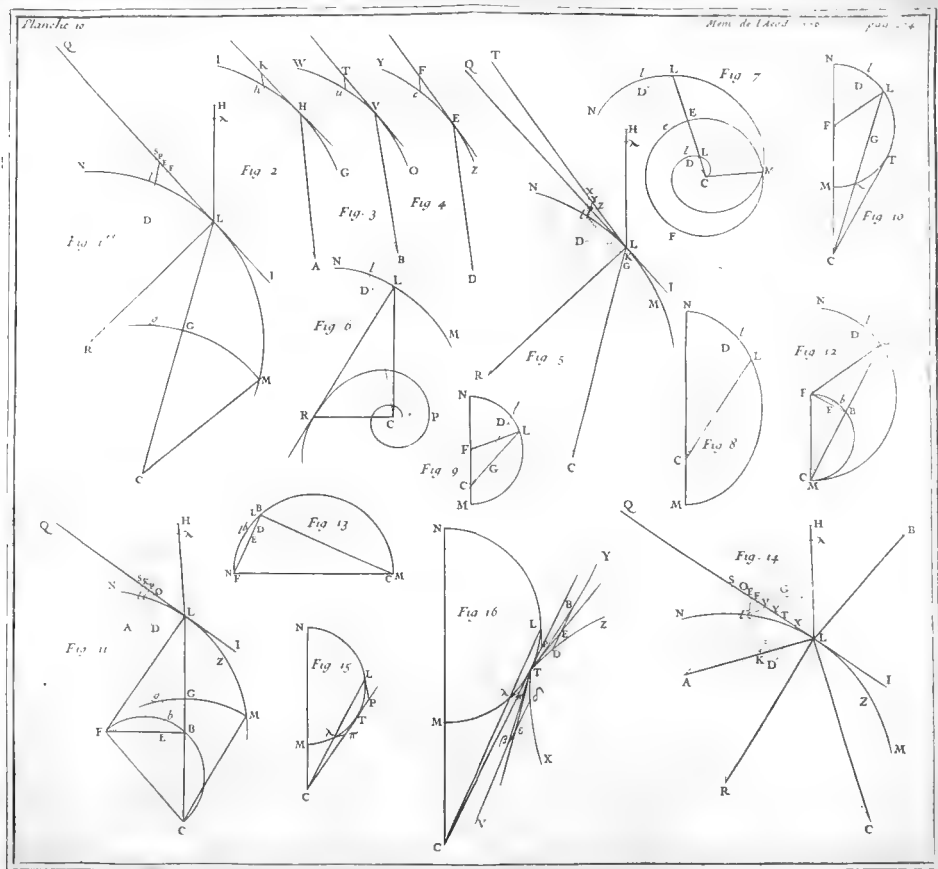
Par exemple, en supposant  $T\epsilon = LT$ , & en faisant par  $\epsilon$  la droite  $\beta\delta$  parallèle à  $CT$ ; il est manifeste que le corps  $L$  parcourroit  $T\epsilon$  dans un instant égal à celui qu'il a employé à parcourir  $LT$ , si toute sa force centrale cessoit en  $T$ ; & que si cette force continué d'être centripète, de

quelque valeur de  $\beta$  qu'elle attire ce corps vers  $C$ , il poursuivra sa route suivant  $T\beta$  élément d'une Courbe  $T\beta\gamma$  comprise entre  $T$  & la tangente  $CT$ , puisque  $\beta$  &  $CT$  sont supposées parallèles entr'elles. Au contraire, si cette force centrale du mobile  $L$  se change en centrifuge en  $T$ , de quelque valeur de  $\alpha$  qu'elle repousse ce corps parallèlement à  $CT$ , il poursuivra sa route suivant  $T\alpha$  élément d'une Courbe  $T\alpha X$  encore plus écartée de  $CT$  cette Courbe se trouvant au-delà de  $T$ .

De même que l'on considère que le mobile venant de  $M$  en  $T$ , n'arrive en ce point d'attouchement  $T$ , qu'en suivant  $\lambda T$ , on verra que ce corps abandonné à lui-même suivroit la droite  $\lambda T$  prolongée vers  $E$ , & que quelque changement qu'il arrive là à la force centrale, elle ne le portera jamais sur l'arc  $TN$ , mais sur l'arc  $TZ$  si elle devient centripète, ou sur l'arc  $TY$  si elle continuë d'être centrifuge, en le tirant de la valeur de  $ED$  dans le premier cas, ou en le repoussant de la valeur de  $EB$  dans le second, le tout suivant  $BD$  aussi parallèle & infiniment proche de  $CT$ . De sorte que l'arc  $BT$  que ce corps décrira dans ce second cas, se trouvera entre l'arc  $TN$  & la droite  $TE$ ; & l'arc  $TZ$  du premier cas, sera encore plus écarté de  $TN$ , cet arc  $TZ$  se trouvant en deçà de  $TE$ .

Donc quelles que soient les forces centrales du mobile  $L$ , elles ne pourront jamais lui faire parcourir le demi-cercle  $NTM$  entier, tant qu'elles auront pour centre un point  $C$  pris hors ce demi-cercle du côté de sa convexité, soit que ce corps vienne de  $N$  ou de  $M$  vers  $T$ , ainsi que le porte la seconde partie qui restoit à résoudre du Paradoxe marqué à la fin de l'art. 44. Au contraire il suit de ce qui vient d'être démontré, qu'en ce point d'attouchement  $T$  ce corps, au lieu de suivre  $TM$  en venant de  $N$  vers  $T$ , continuëra sa route suivant  $T\gamma$  ou  $TX$ , selon que la force centrale en  $T$  continuëra d'être centripète, ou qu'elle y deviendra centrifuge. De même en allant de  $M$  vers  $T$ , au lieu de suivre l'arc  $TN$ , ce corps continuëra sa route par une autre Courbe  $TY$  ou  $TZ$ , selon que la force





centrale en  $T$  continuëra d'être centrifuge, ou qu'elle y deviendra centripete. On voit aussi que ces Courbes  $TV$ ,  $TX$ ,  $TY$ ,  $TZ$ , se diversifieront selon les differens rapports des Forces centrales du corps qui les décrira. Ce que l'on voit ici du demi-cercle  $NTM$ , se démontrera de même de toute autre Courbe en pareilles circonstances. *Et c'est tout ce qui restoit ici à faire voir.*

## S O L U T I O N

*Du Problème proposé par M. Jacques Bernoulli dans les Actes de Leipsik du mois de May de l'année 1697. trouvée en deux manieres par M. Jean Bernoulli son Frere, & communiquée à M. Leibnitz au mois de Juin 1698.*

## SUR LES ISOPERIMETRES.

## PROBLÈME I.

**D**E toutes les Courbes isopérimetres décrites sur un même axe déterminé  $BN$ , trouver la Courbe  $BFN$  telle que ses appliquées  $FP$  élevées à une puissance donnée, ou généralement telle que les fonctions quelconques de ces appliquées, exprimées par d'autres appliquées  $PZ$ , forment ou remplissent un espace  $BZN$  qui soit le plus grand de tous ceux qui peuvent être formés de la même maniere : ou bien ( ce qui revient au même ) une Courbe  $BH$ , qui ait pour axe  $BG$  perpendiculaire à  $BN$ ; étant donnée, déterminer la Courbe  $BFN$  dont les appliquées  $FP$  prolongées jusqu'en  $Z$  en sorte que  $PZ$  soit égale à  $GH$ , fassent un espace  $BZN$  qui soit le plus grand de tous ceux qui peuvent être formés de la même maniere & compris par d'autres courbes quelconques décrites sur  $BN$  & de même longueur que  $BFN$ .

## S O L U T I O N.

Que  $BF\phi$  soit une partie de la Courbe cherchée, & que  $BZ$  soit partie de l'autre Courbe engendrée par celle-ci

Gg ij

Cette Solution étoit Latine dans un paquet cacheté, présenté à l'Académie le 1. Fev. 1701. Il n'y fut ouvert que le 17. Avril 1706 & elle n'y fut lue que le 12. May suivant: cela pour les raisons qui se voient dans l'Histoire.

F I G. I.

suivant les appliquées de la Courbe donnée  $BH$ . Je regarde  $FO\phi$  élément de la Courbe  $BF\phi$ , comme composé de deux petites lignes droites  $FO$ ,  $O\phi$ ; & de même l'élément  $ZL\zeta$  de la Courbe  $BZ\zeta$ , comme composé de deux petites lignes droites  $ZL$  &  $L\zeta$ . Maintenant parce que toute Courbe qui doit donner un *maximum*, conserve aussi dans toutes ses parties les loix de ce même *maximum*, il suit que si des points  $F$  &  $\phi$  on mène deux autres petites lignes droites  $F\omega$ ,  $\omega\phi$ , lesquelles prises ensemble soient égales à  $FO + O\phi$ , & que de ces lignes on en forme par la même loi  $Z\lambda$ ,  $\lambda\zeta$ , de même que de  $FO$ ,  $O\phi$ , on a formé  $ZL$ ,  $L\zeta$ ; il suit, dis-je, que l'espace  $ZP\pi\zeta\lambda Z$  doit être plus grand que tout autre  $ZP\pi\zeta\lambda Z$ . Afin donc de trouver la position requise des petites lignes  $FO$ ,  $O\phi$ , qui doivent donner ce *maximum*, & delà de trouver la nature de la Courbe  $BF\phi$ ; je conçois que des foyers  $F$ ,  $\phi$ , & de la longueur du fil  $FO\phi$ , on ait décrit une petite Ellipse, sur la circonférence de laquelle les deux points  $O$ ,  $\omega$ , soient infiniment proches l'un de l'autre, c'est-à-dire, dont la distance  $O\omega$  soit infiniment plus petite que la distance des foyers  $F$ ,  $\phi$ , quoique la droite  $F\phi$  soit déjà infiniment petite par elle-même, étant la soutendante de l'élément  $FO\omega\phi$  de la Courbe  $BF\phi$ . Donc par la nature du *maxim.* les deux espaces  $ZP\pi\zeta LZ$  &  $ZP\pi\zeta\lambda Z$  seront égaux entr'eux; & en ayant ôté ce qu'ils ont de commun, il restera le triangle  $ZLY$  égal au triangle  $\zeta\lambda Y$ ; ou bien menant les parallèles  $LO$ ,  $\lambda\omega$  ( en négligeant les parties infiniment plus petites  $LYM$  &  $Y\lambda\mu$ ) le triangle  $ZLM$  sera égal au triangle  $\zeta\lambda\mu$ , c'est-à-dire, qu'ayant mené  $ZC$  &  $\zeta D$  parallèles à l'axe  $B\pi$ , comme aussi  $FI$  &  $\phi K$ , l'on aura  $ZC \times LM = \zeta D \times \lambda\mu$ . Mais parceque  $LM$  est la différence des lignes  $LR$ ,  $MR$ , de même que  $\lambda\mu$  l'est des lignes  $\lambda\varrho$ ,  $\mu\varrho$ ; & que  $LR$ ,  $MR$ , &  $\lambda\varrho$ ,  $\mu\varrho$ , sont les fonctions des lignes respectives  $RO$ ,  $RT$ , &  $\varrho\omega$ ,  $\varrho\theta$ ; il est clair que  $LM$  représentera la différence des fonctions qui sont entre  $RO$ ,  $RT$ ; & que  $\lambda\mu$  représentera de même la différence des fonctions qui sont entre  $\varrho\omega$ ,  $\varrho\theta$ . Il faut bien remarquer que la différence des



fonctions de deux lignes comme  $RO$ ,  $RT$ , qui se surpassent d'une quantité  $TO$  infiniment petite du second genre, se trouve en différentiant simplement la fonction de  $RO$ , & en multipliant par  $TO$  ce qui en vient, ayant omis les différentielles : Par exemple, si  $RL$  fonction de  $RO$ , étoit seulement la puissance  $n$  de la même  $RO$ , en quoi consiste le cas de mon Frere, c'est-à-dire, que si la Courbe  $BH$  étoit une Parabole du degré  $n$ , alors  $LM$  ou

$\overline{RO} - \overline{RT}$  seroit  $\overline{nRO} \times TO$ , De même si la Courbe  $BH$  étoit un cercle dont le rayon fût  $\overline{a}$ , alors  $LM$  ou

$$\sqrt{2a \times RO - RO^2} - \sqrt{2a \times RT - RT^2} \text{ seroit } \frac{a - RO}{\sqrt{2a \times RO - RO^2}} \times TO.$$

& ainsi des autres. Il faut aussi remarquer qu'en général on exprimera les différences des fonctions de  $RO$ ,  $RT$ , par  $\Delta RO \times TO$ , en prenant  $\Delta$  pour le signe ou la caractéristique des différences des fonctions où l'on omet les différences des grandeurs dont elles sont fonctions. Donc ayant déjà  $ZC \times LM = \varphi D \times \lambda \mu$ , l'on aura aussi  $FI \times \Delta RO \times TO = \varphi K \times \Delta \varrho \omega \times \theta \omega$ .

Maintenant des centres  $F$  &  $\varphi$  soient décrits les petits arcs  $OX$ ,  $\omega \xi$ , lesquels par la nature de l'Ellipse sont égaux entr'eux. Donc  $TO$  est à  $\theta \omega$ , comme la secante de l'angle  $XOT$  ou  $IFO$  est à la secante de l'angle  $\xi \omega \theta$  ou  $K\varphi \omega$ . Mais on a aussi  $FI. \varphi K :: FOX \sin. FOI. \varphi \omega \times \sin. \varphi \omega K$ . Donc si à la place de  $FI$ ,  $\varphi K$ , & de  $TO$ ,  $\theta \omega$ , on substitue les grandeurs qu'on leur voit ici proportionnelles, on aura  $FOX \sin. FOI \times \Delta RO \times \sec. IFO = \varphi \omega \times \sin. \varphi \omega K \times \Delta \varrho \omega \times \sec. K\varphi \omega$ . Or par les loix des sinus, tangentes, & secantes, le rectangle fait du sinus de l'angle  $FOI$  par la secante de l'angle  $IFO$ , est égal au rectangle fait du sinus de  $\varphi \omega K$  par la secante de  $K\varphi \omega$ . Donc  $FO \times \Delta RO = \varphi \omega \times \Delta \varrho \omega$ ; ou si pour  $RO$  l'on prend son équivalente  $PF$  qui lui est jointe par la petite ligne droite  $FO$ , & que pour  $\varrho \omega$  on prenne de même son équivalente  $\pi \varphi$ , l'on aura  $FO \times \Delta PF = \varphi \omega \times \Delta \pi \varphi$ ; & par conséquent  $\Delta PF. \Delta \pi \varphi :: \varphi \omega (\varphi O). FO :: \sin. OF \varphi. \sin. O \varphi F$ . Et, permutando,  $\Delta PF, \sin. OF \varphi :: \Delta \pi \varphi. \sin. O \varphi F$ . Et par-

ce que  $F\phi$  est la ſoutendante d'un arc infiniment petit  $FO\phi$  de la Courbe  $BFO\phi$ ; & qu'ainſi on peut regarder chacun des angles  $OF\phi$  &  $O\phi F$  comme la moitié de l'angle de la courbure en  $F$  & en  $\phi$ ; il ſuit que  $\Delta PF$  eſt au ſinus de la courbure en  $F$ , comme  $\Delta \pi\phi$  eſt au ſinus de la courbure en  $\phi$ , c'eſt-à-dire, en raiſon conſtante. Ainſi ce Problème eſt ainſi réduit à la pure Analyſe, on peut l'énoncer en cette ſorte.

*Trouver la Courbe  $BF\phi$  dont la nature ſoit telle que le ſinus de ſa courbure dans un de ſes points quelconques  $F$ , ſoit à la fonction différentiée de ſon appliquée reſpective  $PF$  ( ayant négligé la différence de cette appliquée ) en raiſon conſtante.*

FIG. III.

Voici la maniere dont on peut réſoudre ce Problème. Soit  $BF$  la Courbe cherchée, dont l'element ( que l'on prend pour conſtant ) ſoit  $Fl = dt$ ,  $BP = y$ ;  $PF = x$ ,  $Pp = dy$ ,  $Cl = dx$ ; ſoit regardée  $Fm$  comme la tangente en  $F = Fl$ , & par conſéquent  $lFm$  comme l'angle de la courbure, dont le ſinus eſt  $lm$ . Soit enfin le triangle réctangle  $mnl$ , dont les côtés  $mn$ ,  $nl$ , ſoient paralleles aux côtés  $lC$ ,  $CF$ , du triangle  $FCl$ ; l'on aura  $mn = ddx$ , &  $nl = ddy$ . De plus à cauſe de ces triangles ſemblables  $GFl$ ,  $nml$ , on aura auſſi  $Cl ( dx ) : : nl ( ddy )$ .  $ml = \frac{ds ddy}{dx}$ . Mais par là nature de la Courbe,  $ml$  eſt à  $\Delta PF$  en raiſon conſtante. Donc en faiſant  $\frac{ds ddy}{dx} \cdot \Delta x : : dt . a$ . l'on aura cette équation  $addy = \Delta x \times dx$ . Mais comme  $\Delta x \times dx$  eſt la fonction elle-même différentiée, ſi l'on intègre, l'on aura la fonction elle-même ou  $GH$ . Soit donc cette ligne  $GH = X$ , ayant auſſi pris l'intégrale de l'égalité qu'on vient de trouver, on aura  $ady = X \pm c$ ; ou bien ayant multiplié les parties homogenes par la conſtante  $dt$ , on aura  $ady = X dt + c dt$  ( il faut bien remarquer que j'entends par  $c$  une quantité conſtante & arbitraire, dont il eſt permis d'augmenter ou de diminuer l'intégrale d'une différentielle quelconque ); & en quarrant de part & d'autre l'on aura auſſi  $aady^2 = d^2x \times X \pm c = dx^2 + dy^2 \times X \pm c$ , d'où l'on tire enfin

$dy = \frac{dx \sqrt{X+c}}{\sqrt{aa-X+c}}$ , qui sera l'équation générale à la Courbe cherchée, laquelle deviendra fort simple ( il suffit d'en trouver une qui satisfasse ) en supposant  $c=0$  dans cette équation : car il en résultera  $dy = \frac{X dx}{\sqrt{aa-X}}$ , dont

l'intégrale sera ici  $\int \frac{X dx}{\sqrt{aa-X}}$ , suivant laquelle si l'on construit une Courbe, je dis qu'elle sera celle qu'on demande.

*Corol.* Ayant supposé  $c=0$ , & conséquemment  $a dy = X dt$ , l'on aura  $dy : X :: dt : a$ . Mais en supposant  $d\epsilon$  constante,  $dy$  est le sinus de l'angle  $BFP$ . Donc le sinus de l'angle  $BFP$ .  $X (GH) :: dt : a$ . c'est-à-dire, en raison constante. Mais si  $BF$  est la Courbe *Brachystrochrone*, &  $BH$  la Courbe dont les ordonnées  $GH$  expriment les vitesses aux points  $F$ , j'ai fait voir\* dans le tems, que le sinus de l'angle  $BFP$  est à  $GH$  en raison constante. D'où l'on voit que la Courbe  $BF$  a en même tems ces deux propriétés ; puisqu'elle est telle que  $\int X dx$  est un *maximum*, & en même tems  $\int \frac{dx}{X}$  un *minimum*. Mais cette Courbe n'a pas cette propriété lorsque  $c$  n'est pas  $=0$ .

\* Voyez les  
actes de Leip-  
sik de 1697  
pag. 208.  
&c.

## PROBLÈME II.

Les mêmes choses étant posées, si l'on suppose maintenant *Fig. I.* que  $PZ$  soit comme la fonction donnée de l'arc  $BF$ , on demande la nature de la courbe  $BFN$ .

## SOLUTION.

Si l'on suit la même methode que ci-dessus, on résoudra facilement ce Problème. Car le triangle  $ZLY$  sera toujours égal au triangle  $\lambda Y$  par la nature du *maximum*, ou  $ZC \times LM = \lambda D \times \lambda \mu$ . Mais  $LM$  ( $LR=MR$ ) est la différence des fonctions des deux arcs  $BFO$ ,  $BFT$ ; &  $\lambda \mu$  ( $\lambda \epsilon - \mu \epsilon$ ) la différence des fonctions des deux arcs  $BF\omega$ ,  $BF\theta$ ; & l'on trouvera la différence de ces fonctions de la même manière que ci-dessus, en multipliant simplement la fonction différenciée ( ayant négligé la différentielle de l'arc dont

*Fig. II.*

elle est fonction) par la difference des deux arcs  $BFO$ ,  $BFT$ , c'est-à-dire, par  $TX$ . Donc à la place de  $ZC \times LM = \angle D \times \lambda \mu$ , il faut écrire  $FI \times \Delta BFO \times TX = \phi K \times \Delta B F \omega \times \theta \xi$ . Maintenant par la propriété de l'Ellipsée supposée décrite des foyers  $F$ ,  $\phi$ , par le moyen d'un fil  $= FO + O\phi = F\omega + \omega\phi$ , les petites lignes  $OX$  &  $\omega\xi$  sont égales entr'elles. Donc  $TX. \theta\xi :: \text{tang. } IFO. \text{tang. } K\phi\omega$ . De plus on a encore  $FI. \phi K$ , & de  $TX$ , ( $\xi$ ), on prend ces grandeurs qu'on voit leur être proportionnelles, on aura  $FO \times \sin. IFO \times \text{tang. } IFO \times \Delta BFO = \phi\omega \times \sin. \phi\omega K \times \text{tang. } K\phi\omega \times \Delta B F \omega$ . Mais la propriété des sinus, tangentes, & secantes, le sinus de  $FOI \times \text{tang. } IFO = \sin. \text{total} \times \sin. IFO$ ; de même le sinus de  $\phi\omega K \times \text{tang. } K\phi\omega = \sin. \text{total} \times \sin. K\phi\omega \times \Delta B F \omega$ ; ou bien si à la place de  $BFO$  on prend son équivalente  $BF$ ; & à la place de  $B F \omega$ , son équivalente  $B F \phi$ ; l'on aura  $FO \times \sin. IFO \times \Delta BF = \phi\omega \times \sin. K\phi\omega \times \Delta B F \phi$ . Donc  $\sin. IFO \times \Delta BF. \sin. K\phi\omega \times \Delta B F \phi :: \phi\omega (\phi O) FO :: \sin. OF\phi. \sin. O\phi F$ . Et, *permutando*,  $\sin. IFO \times \Delta BF. \sin. OF\phi :: \sin. K\phi\omega \times \Delta B F \phi. \sin. O\phi F$ . en raison constante. De sorte que ce Problème ainsi réduit à la pure Analyse, se peut proposer de cette maniere.

*Trouver une Courbe  $BF\phi$  de telle nature que le sinus de sa courbure dans un de ses points quelconque  $F$ , soit au sinus de  $IFO \times \Delta BF$  en raison constante.*

FIG. III.

Pour résoudre ce Problème soit nommée, comme ci-devant  $B.P$ ,  $y$ ;  $P.F$ ,  $x$ ;  $BF$ ,  $t$ ;  $Pp$ ,  $dy$ ;  $Cl$ ,  $dx$ ;  $Ff$  ou  $Fm$ ,  $dt$ ; & la fonction donnée de l'arc  $B.F$ ,  $v$ ; l'on aura  $ml = \frac{dt ddy}{dx}$ . Donc en faisant (selon la propriété que l'on vient de trouver de la Courbe cherchée)  $\frac{dt ddy}{dx} . dx \times \Delta v$ ,  $\left(\frac{dx dv}{dt}\right) :: dt. a$ . l'on aura cette équation  $\frac{adt ddy}{dx^2} = dv$ , ou  $\frac{adt ddy}{dt^2 - dy^2} = dv$ , dont l'intégrale est  $v = \int \frac{adt ddy}{dt^2 - dy^2}$ , ou (parce que  $a$  &  $dt$  sont supposées constantes)  $v = \int \frac{ddy}{dt^2 - dy^2}$  laquelle

laquelle équation exprime la nature de la Courbe qu'on demande.

## REMARQUE.

On trouvera avec la même facilité, si on le veut, la Courbe  $BF\phi$  en prenant  $PZ$  pour quelque autre fonction que ce soit, composée à volonté des fonctions non-seulement de l'arc  $BF$ , ou de l'appliquée  $PF$ , mais aussi de toutes les deux ensemble de telle manière qu'on voudra. Car on en viendra toujours à cette propriété que le sinus de la courbure dans un point quelconque  $F$ , est à une certaine quantité en raison constante. Ainsi ce Problème étant réduit à la pure Analyse, on trouvera facilement l'équation qui exprime la nature de la Courbe cherchée.

On peut aussi résoudre de la même manière le Problème de *Catenaires* & des *Brachystochrones*, dont les Solutions s'accordent facilement avec celles que j'ay données & que j'avois trouvées par différentes méthodes; ce qui ne contribué pas peu à faire voir l'excellence de celle-ci. A reste comme cette méthode est directe, je vais en ajouter une indirecte prise de la pression des liqueurs, laquelle donnera précisément la même solution; & cet accord merveilleux de ces deux méthodes, tant directe qu'indirecte, nous assurera encore de leur certitude.

Soit un linge  $BFN$  étendu par une liqueur qui le presse par dessus, dont la pesanteur soit uniforme ou non. Il est clair que ce linge prendra une courbure telle qu'elle permettra à la liqueur de descendre le plus bas qu'il est possible: & cela arrivera lorsque les *gravitations* de toutes les parties de la liqueur jointes ensemble feront un *maximum*. Il faut bien remarquer que je ne dis pas que cela arrivera lorsque le centre de pesanteur de la liqueur sera le plus bas; car on ne peut considérer ici le centre de pesanteur, puisque la courbure  $BFN$  variant (quoiqu'elle soit isopérimètre) la quantité de liqueur contenue dans cette courbure changera aussi: ainsi le centre de pesanteur n'y seroit pas le même. Que l'on imagine donc maintenant que l'espace  $BFN$  soit divisé en ses filamens par les appliquées

verticales  $PF$ ,  $pf$ , &c. Et soit la Courbe  $BL$  dont les ordonnées  $GL$  expriment les gravitations de la liqueur suivant la hauteur  $BG$  ou  $PF$ , c'est-à-dire, dont les appliqués  $GL$  &  $ED$  expriment le rapport de ce dont la particule  $FC$  de la liqueur suivant la profondeur  $PF$  pèse plus ou est plus pressée par le poids du filament ou de la colonne  $PFCp$ , qu'une égale particule  $MN$  suivant la profondeur  $PM$  n'est pressée par le poids de la colonne  $PMnp$  : comme donc  $LG$  exprime la gravitation de la particule  $FC$ ; & de toutes les autres qui sont à la même profondeur, ou qui se trouvent dans la droite  $GC$  prolongée; de même comme  $DE$  marque la gravitation de la particule  $Mn$  & des autres qui se trouvent dans la droite  $EM$  prolongée; il est clair que toutes ces appliquées prises ensemble, c'est-à-dire, les espaces  $BLG$  &  $BDE$  marqueront toutes les gravitations ( je ne dis pas les pésanteurs ) prises ensemble de toutes les particules qui se trouvent dans les colonnes  $PFCp$ ,  $PMnp$ . Si donc on décrit une autre Courbe  $BH$ , dont les appliquées  $GH$  soient respectivement comme les espaces  $BLG$ , & si à  $P$  on applique  $PZ = GH$ , l'on aura une nouvelle Courbe  $BZN$  dont les appliquées  $PZ$  exprimeront la somme des gravitations des particules par rapport à leurs colonnes respectives  $PFCp$ ; & par conséquent la somme des appliquées  $PZ$ , c'est-à-dire, tout l'espace  $BZN$  représentera les gravitations de toutes les parties de la liqueur contenuë dans le linge ou la voile  $BFN$ . Donc puisque la voile prend une telle figure ou courbure que toutes les gravitations prises ensemble ( c'est-à-dire l'espace  $BZN$  ) font un *maximum*, il est clair que si l'on emploioit une liqueur d'une pésanteur continuellement différente avec cette loi ou condition que  $LG$ ,  $DE$ , ou les gravitations des particules dans les profondeurs de  $F$ ,  $M$ , fussent dans la raison des différentielles des appliquées  $GH$  ( lesquelles dans le Problème de mon Frere marquent les fonctions des mêmes  $PF$  ) il est clair, dis-je, qu'alors la courbure du linge ou de la voile seroit la même que la courbure que mon Frere m'a

proposée de chercher seulement pour les puissances de *PF*. Mais j'en ai résolu ci-dessus ce Problème par la méthode directe pour une fonction quelconque.

Afin donc que je montre l'accord de cette méthode directe avec l'indirecte, je vais chercher la nature de la Courbe ou courbure que prend un linge ou une voile chargée d'une liqueur dont la gravitation varie suivant le rapport que j'ay marqué: que si je tombe dans la même équation trouvée ci-dessus, qui est-ce qui osera douter de l'infailibilité de ces méthodes? Il se présente ici d'abord un cas fort facile, qui est lorsque la pesanteur de la liqueur est uniforme, ce qui est ordinaire, c'est-à-dire, lorsque les gravitations *LG, DE*, sont entr'elles comme les profondeurs *BG, BE*; ce qui rend la Courbe *BL* une ligne droite, & la Courbe *BH* une parabole ordinaire: alors *BFN* sera la courbure ordinaire du linge, ou de la voile, laquelle courbure mon Frere a attribuée à son *Elastique*, & dont la nature s'exprime (comme je l'ay trouvé autrefois aussi-bien que mon Frere) par cette équation  $y = \int \frac{xx dx}{\sqrt{aa - x^2}}$ .

Maintenant si dans l'équation générale  $y = \int \frac{X dx}{\sqrt{aa - X^2}}$  trouvée ci-dessus (*Sol. Probl. 1.*) par la méthode directe, on met à la place de la fonction générale *X*, le cas particulier *xx* que l'on suppose ici, l'on aura  $y = \int \frac{xx dx}{\sqrt{aa - x^2}}$ , ou (ayant suppléé aux termes homogenes)  $y = \int \frac{xx dx}{\sqrt{aa - x^2}}$ ; ce qui fait voir déjà en ceci l'accord des méthodes.

Si l'on suppose présentement par la loi générale de la gravitation de la liqueur que la Courbe *BDL* soit une Courbe quelconque, & qu'on veuille trouver la nature de la courbure de la voile *BFN*, on le peut faire par la méthode dont je me suis servi autrefois pour trouver la courbure de la voile enflée par le vent, laquelle consiste en ceci que la direction de la pression de la liqueur, qui est par tout perpendiculaire à la Courbe, soit regardée

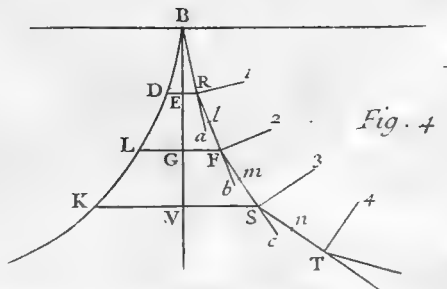
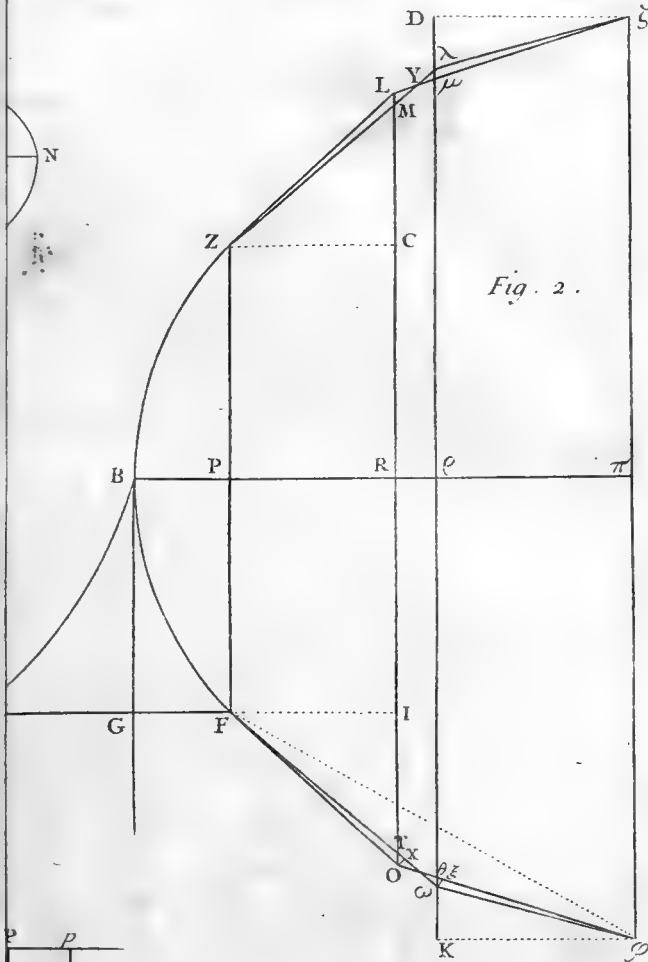
comme composée de deux pressions collaterales, l'une horizontale & l'autre verticale, & que par l'une & par l'autre prise séparément, on cherche quelle est la ténacité requise dans le point le plus bas, ou la force avec laquelle la voile dans le point le plus bas est étendue suivant la tangente  $a$ , qui est la force absoluë étant constante dans quelque point de la courbure que la voile soit suspendue, ou (si on l'aime mieux) qu'elle soit attachée à un clou. Ainsi formant une équation de ce qui viendra, avec une quantité constante prise à volonté, de la manière que je l'avois fait autrefois pour les funiculaires ou catenaires, on trouvera la même équation que j'ay trouvée ci-dessus par la méthode directe. Cette manière d'operer, quoique legitime, est néanmoins plus longue & n'est pas si naturelle que cette autre que j'ay découverte depuis peu de tems, & que je vas rapporter ici.

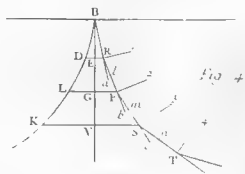
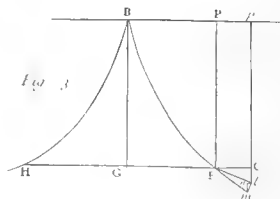
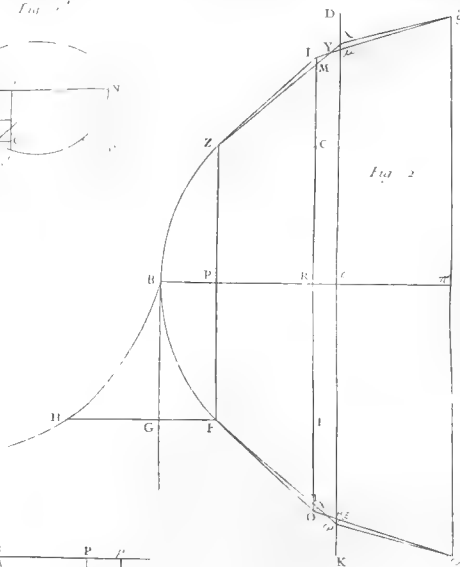
**FIG. I.** Parce que chaque particule  $Ff$  du linge ou de la voile est pressée suivant  $FI$ , qui est une direction perpendiculaire à la Courbe, par le poids de la colonne de liqueur qui appuie dessus, ou par la gravitation de la particule  $FC$  de la liqueur, laquelle gravitation est exprimée par la ligne  $LG$ , la Courbe sera la même que celle qui se forme

**FIG. IV.** roit, si je concevois que le fil  $BRFS T$  fût étendu par des puissances  $R_1, F_2, S_3, T_4$ , &c. perpendiculairement appliquées à tous les points  $R, F, S, T$ , &c. & proportionnelles aux appliquées correspondantes  $ED, LG, VK$ , &c. Or je vas montrer d'une manière facile que cette Courbe, & par conséquent la courbure du linge, est la même que celle que j'ay trouvée ci-dessus par la méthode directe.

Soit la Courbe conçue comme un polygone d'une infinité de côtés  $BR, RF, FS, ST$ , &c. lesquels étant prolongés font des angles  $aRF, bFS, cST$ , &c. qui marquent les courbures de la Courbe dans les points  $R, F, S$ , &c. Maintenant on sçait par les loix de la Mécanique que la puissance  $1R$  qui pousse, est à la puissance  $l$  qui soutient, ou (ce qui est la même chose) à la force de la ténacité requise du fil dans un point quelconque moien entre







$R$  &  $F$ , comme le sinus de l'angle  $ARF$  est au sinus de l'angle  $BRI$ , c'est-à-dire, au sinus total : de même la puissance qui soutient en  $l$ , est à la puissance  $2F$  qui pousse, comme le sinus de l'angle  $2Fm$  ou le sinus total est au sinus de l'angle  $bFS$ ; d'où il est évident que la puissance  $1R$  est à la puissance  $2F$ , comme le sinus de l'angle  $ARF$  est au sinus de l'angle  $bFS$ . On démontrera de la même manière que la puissance  $2F$  est à la puissance  $3S$ , comme le sinus de  $bFS$  est au sinus de  $cST$ ; & ainsi de suite. Donc la puissance  $1R$  est à la puissance  $3S$ , comme le sinus de l'angle  $ARF$  est au sinus de l'angle  $cST$ ; & *permutando*, le sinus de l'angle  $cST$  est à la puissance  $3S$  ( $KV$ ), comme le sinus de l'angle  $ARF$  est à la puissance  $1R$  ( $DE$ ): c'est-à-dire, que le sinus de l'angle de la courbure dans un point quelconque  $R$  est à  $DE$  que je suppose exprimer la fonction différentiée de  $BE$ , en raison constante. Or j'ay prouvé par la méthode directe cette même propriété. Donc la courbure du linage ou de la voile chargée de la manière qu'on le vient de dire, & celle des Isopérimètres, est la même. Donc la méthode directe & l'indirecte se confirment l'une l'autre. *Ce qu'il falloit démontrer.*

## DESCRIPTION

### D'UNE EXOSTOSE MONSTRUEUSE.

PAR M. MERY.

**S**UR la fin de l'hyver dernier on amena à l'Hôtel-Dieu 1706.  
2. Juin.  
un Soldat Irlandois, âgé d'environ 40 ans, dont les deux condils  $A, A$ , première Fig.  $B, B$ , seconde Fig. du femur  $C$ , formoient par leur dilatation extraordinaire une Exostose monstrueuse, tant par sa grosseur que par sa figure.

La violente douleur qu'elle caufoit à ce pauvre malade, le força à me demander avec empressement que j'en

Hh iij

coupasse la cuisse; ce que je fis pour apporter quelque soulagement à ses souffrances.

Après cette operation, j'examinai à loisir dans mon cabinet cette monstrueuse Exostose, sur laquelle je fis les remarques que je vais rapporter.

Premièrement, j'observay que cette Exostose séparée du corps du femur *C*, & de la jambe; mais recouverte encore des tégumens communs, & des aponevroses des muscles qui enveloppent le genou, pesoit environ quinze à seize livres. Revêtuë de ces parties, elle formoit une espece de globe, qui avoit 9 pouces de large, sur  $9\frac{1}{2}$  de haut: sa superficie paroissoit assez unie & assez égale; mais dépouillée de ces parties, elle parut fort inégale & raboteuse, son poids diminua de 4 livres ou environ, sa largeur fut reduite à 7 pouces  $\frac{1}{2}$ , & sa hauteur à 8, comme il paroît dans les deux Figures que l'on en donne à la fin de ce Memoire.

Secondement, je remarquay que tous les tendons des muscles qui servent au mouvement de la jambe, étoient si violemment bandez sur ce globe, que le genou ne pouvoit nullement se plier. Cette extension extraordinaire n'étoit pas cependant la seule cause qui empêchât les mouvemens de la jambe. Les deux condils du femur *A*, *A*, *B*, *B*. avoient tellement changé de figure, que leur partie convexe étoit devenuë plate & meme entoncée *E*, *E*, dans ce globe, de sorte qu'il étoit absolument impossible qu'elle pût rouler dans la partie concave supérieure du tibia. Ces deux causes jointes ensemble s'opposoient donc également aux mouvemens de la jambe.

Troisièmement, après avoir enlevé le perioste qui couvroit cette Exostose, je m'apperçûs qu'elle étoit d'une espece particuliere. Les Exostoses communes ne sont qu'un boursoufflement ou enflure des os mêmes, causée par un suc trop abondant, qui se change en leur substance sans sortir de leurs porosittez, ou une espece de vegetation qui se fait de ce même suc qui s'en échape, & s'ossifie entre le perioste qui couvre les os & leur surface extérieure

avec laquelle il s'unit, tantôt en se confondant avec l'os même, tantôt en ne faisant que s'appliquer sur sa superficie.

L'Exostose dont je fais la description étoit différente de celle - cy, en ce qu'elle formoit un globe creux, rempli en dedans d'une matiere semblable à celles des polypes, qui s'engendrent dans le cœur & dans ses vaisseaux; de sorte qu'il paroît fort vrai-semblable que cette matiere ayant d'abord rompu les fibres osseuses de la partie spongieuse interieure des condils du femur, elle en avoit dilaté ensuite la partie solide exterieure.

Mais parce que cette partie solide qui formoit ce globe, étoit percée d'une infinité de trous de figures irregulieres, & de grandeur fort différente; il y a aussi-bien de l'apparence que les sels corrosifs dont cette matiere étoit empreinte, avoient détruit une partie de ce globe, & dissout les fibres osseuses qui forment par leur assemblage les petites cellules des condils du femur; ce qui donne lieu à cette conjecture, c'est que je trouvay un tartre rougêatre attaché au dedans & au dehors de ce globe, qui en avoit rongé les surfaces.

Mais aussi parceque ce globe osseux étant dépouillé de toutes les parties charnuës qui le couvroient, & vuide entierement de toute la matiere polypeuse qu'il renfermoit dans sa capacité, pesoit étant sec beaucoup plus que ne peuvent faire (en cet état) les condils du femur du plus grand homme; on ne peut, ce me semble, douter qu'une partie de cette matiere n'ait servi à son augmentation.

Quatrièmement, j'observay sur la surface postérieure de ce globe une rainure *F, F, F*, fort profonde, dans laquelle passoient les arteres & les nerfs qui descendoient à la jambe, & les veines qui de cette partie remontoient à la cuisse. Cette rainure étoit percée dans son fond de plusieurs trous, par lesquels quelques rameaux de ces vaisseaux entroient & ressortoient de la capacité de ce globe.

Dans le même endroit je découvris de plus quatre cavernes osseuses, de grandeur & de figure différente. Elles

Fig. II.

Fig. II.  
1, 2, 3, 4.

étoient remplies d'une matiere semblable à celle qui étoit renfermée dans ce globe. Ces cavernes avoient aussi plusieurs ouvertures : par les unes elles communiquoient avec la capacité, & par les autres avec les parties membranueuses & charnuës qui couvrent le genou. Leur cavité étoit fort raboteuse, & paroissoit avoir été rongée par la partie tartareuse de la matiere qui s'y étoit amassée.

Cinquièmement, enfin la dernière observation que je fis sur cette monstrueuse Exostose, fut qu'en plongeant un instrument dans la concavité pour en ôter la matiere polypeuse qui y étoit renfermée, il sortit du centre de cette matiere deux palettes ou environ d'une liqueur jaune & fort claire; ce qui me fit croire qu'il y avoit dans le centre de cette matiere une cavité dans laquelle cette liqueur pouvoit être contenuë.

#### EXPLICATION DES FIGURES.

*Premiere Figure. Moitié de grandeur & faisant le quart de cette Exostose vüe par devant.*

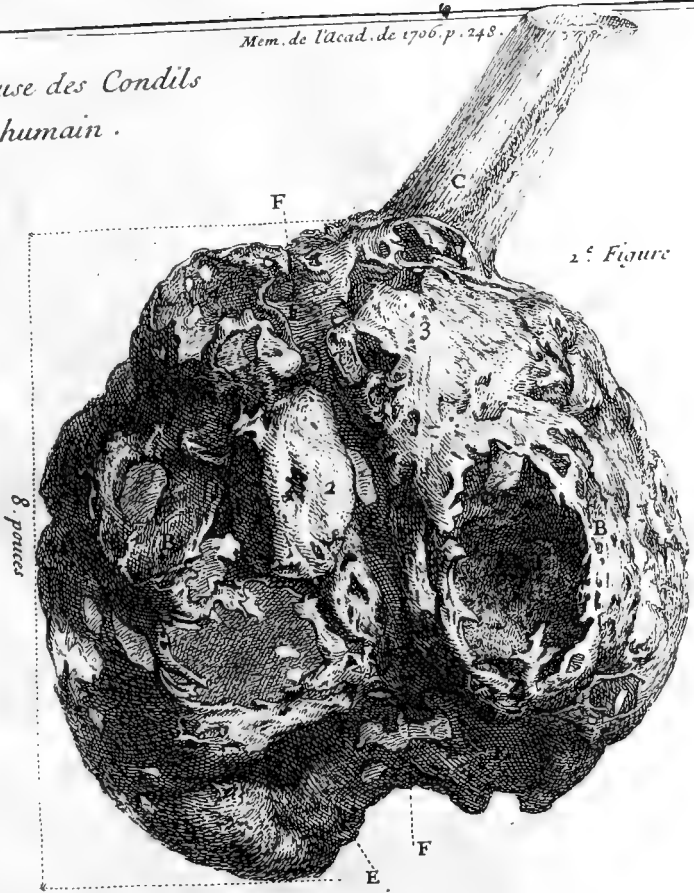
- A, A.* Les deux condils du femur.  
*C.* Le corps du femur.  
*D.* La place de la rotule.  
*E, E.* La place de la partie supérieure du tibia.

*Seconde Figure vüe par derrière.*

- B, B.* Les deux condils du femur.  
*C.* Le corps du femur.  
*E, E.* La place de la partie supérieure du tibia.  
*F, F, F.* La rainure par laquelle passaient les vaisseaux de la jambe.  
*1, 2, 3, 4.* Cavernes osseuses en partie ouvertes & en partie fermées.

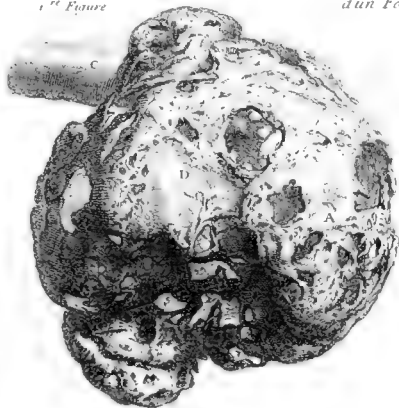
#### REFLEXIONS

onstrueuse des Condils  
oemur humain .



Exostose monstrueuse des Condyles  
d'un Femur humain

1<sup>re</sup> Figure



- pouces  $\frac{1}{2}$

Echelle de 10 pouces.



2<sup>e</sup> Figure





## REFLEXIONS

## SUR L'ECLIPSE DU SOLEIL

Du 12 May 1706.

PAR M. CASSINI.

**J** Amais Eclipsé n'a eu d'Observateurs plus illustres que celle du Soleil qui est arrivée le 12 May de cette année 1706. 23 Juin.

Elle a été observée attentivement à Marli par le Roy & par les Princes en diverses manieres, avec divers instrumens préparés par des Astronomes de l'Academie Royale des Sciences. On l'a vûe directement avec des verres colorés & avec des Lunetes, dont quelques-unes avoient au foyer un reticule qui divisoit le disque du Soleil en 12 doigts, & avec d'autres Lunetes à deux verres convexes, qui étant placées sur des machines dirigées au Soleil, envoioient son image assez grande & assez distincte sur un carton opposé, où étoit un cercle égal à cet image divisé par des circonférences concentriques en doigts & en demi-doigts.

Le Soleil ayant été couvert au commencement de l'Eclipsé, on observoit ses phases à mesure qu'il sortoit des nuages.

Le tems des phases étoit marqué par une pendule à secondes, réglée le jour précédent & le même jour de l'Eclipsé par l'observation des hauteurs du Soleil & de quelques étoiles fixes, & rectifiée par des observations semblables, réitérées à la présence des Princes.

A l'Observatoire Royal, où il y eut un grand concours de Scavans & de personnes illustres par leurs dignités & par leur rang, on observa l'Eclipsé par les mêmes manieres qu'elle fut observée à Marli, & par d'autres où l'on

250 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE  
mit en usage les instrumens plus propres pour les obser-  
vations.

On y emploïa la grande Lunete excellente de 34 pieds exposée sur la terrasse, qui avoit au foyer un papier sur lequel on avoit décrit un cercle égal à l'image du Soleil qu'il recevoit, divisée en doigts par des circonferences concentriques, dont l'exterieure étoit divisée en 360 degrés pour mesurer la distance des cornes pendant la durée de l'Eclipse; ce qui joint à l'observation des doigts auroit servi à bien déterminer la proportion des diametres du Soleil & de la Lune, si quelque agitation de l'air & la foule des spectateurs n'en avoit rendu les observations un peu douteuses.

On observa avec plus d'exaëtitude par le Micrometre placé au foyer des Lunetes, dont l'une étoit placée sur la machine parallatique, & une autre Lunete sur un autre support convenable. Par ce Micrometre on mesuroit les phases de l'Eclipse quand le Soleil étoit dégagé des nuages, & quand les personnes considerables qui vouloient voir cette methode d'observer n'en étoient point empêchées.

La plus grande phase de cette Eclipse, tant à Marli qu'à l'Observatoire Royal, approcha de 11 doigts, à un sixième près, comme on peut voir dans le détail des observations.

Nous avons depuis eu des relations de cette Eclipse observée en plusieurs Villes du Languedoc, de Provence & de Suisse, & particulièrement à Narbonne, à Montpellier, à Arles, à Tarascon, à Marseille, à Avignon, à Geneve & à Zurich, où cette Eclipse a été totale avec une durée de quelques minutes d'heure.

En toutes ces Villes l'air s'obscurcit, de sorte que l'on fut obligé d'allumer les chandelles pour lire & pour travailler, & de quitter le travail à la campagne.

Dans cette obscurité on vit au Ciel proche du Soleil éclipse Saturne, Venus & Mercure. A Arles où l'Eclipse totale a duré un peu plus que dans ces autres Villes, on a vu plus loin du Soleil un grand nombre d'autres étoiles comme en pleine nuit.

Le peuple qui en ce jour-là étoit en grand nombre dans les ruës fit des exclamations, & donna des marques d'une grande épouvante.

Les animaux mêmes sentirent cette Eclipsé. Dans les Villes les oiseaux nocturnes étant sortis de leurs trous, voltigeoient dans l'air en grand nombre ; les autres oiseaux s'étant retirés, comme ils ont coutume de faire pendant la nuit. A la campagne ils montroient avoir de la peine à voler ; & étant chassés avec des pierres, ils voloient bas, comme quand ils sont poursuivis par des oiseaux de proie.

Dans toutes ces Villes au tems de l'Eclipsé totale, on a vû autour de la Lune, qui éclipsoit le Soleil, une couronne d'une lumière pâle.

A Narbonne M. l'Abbé le Pech l'a observée en forme d'un fil lumineux, distinguée en deux anneaux concentriques, dont la lueur étoit néanmoins bien pâle.

A Montpellier Mrs de Plantade, Bon & Clapies virent cette lumière très-blanche, qui formoit autour du disque de la Lune une espèce de couronne de la largeur d'un doigt Ecliptique. Dans ces bornes la lumière conservoit une égale vivacité, qui se changeant ensuite en une faible lueur formoit autour de la Lune une aire circulaire d'environ huit degrés de diametre, & se perdoit insensiblement dans l'obscurité.

A Marseille le P. Laval & M. Chazelle on observé la lumière qui environnoit immédiatement la Lune de la largeur d'un doigt Ecliptique comme à Montpellier.

A Tarascon M. le Comte Marigli vit cette lumière comme une couronne de rayons pressés ensemble. Il vit aussi dans la partie occidentale du Ciel des nuages d'une couleur extraordinaire.

Ce n'est pas la seule fois qu'on a observé un semblable Phenomene dans les Eclipses totales du Soleil.

Dans le recueil que le Pere Riccioli en a fait dans son *Almageste*, il y en a plusieurs où l'on a vû un cercle de lumière autour de la Lune, qui éclipsoit le Soleil.

On a crû que c'étoit un reste du bord du Soleil vû directement, en supposant que c'étoit une Eclipsé annulaire. Une apparence semblable à celle qui a été observée dans cette dernière Eclipsé, pourroit bien avoir fait juger quelquefois annulaires des Eclipses du Soleil, qui à la vérité étoient totales. On les peut examiner par les Tables des modernes, qui depuis l'usage de la Lunete donnent la proportion des diametres apparens du Soleil & de la Lune beaucoup plus exacte que les Tables anciennes.

Tycho Brahé qui travailloit à l'Astronomie avant l'invention de la Lunete, avoit réglé la proportion de ces diametres de sorte que suivant ses dimensions la Lune ne pouvoit jamais cacher entierement le Soleil à la terre. Il auroit donc pû juger qu'un anneau de lumiere semblable à celui qu'on a observé autour de la Lune en cette Eclipsé étoit le bord même du Soleil qui ne fut point éclipsé entierement, ce que nous ne pouvons pas appliquer à cette Eclipsé, dans laquelle on a distingué parfaitement cette lumiere pâle d'avec le bord du Soleil, qui parut avec un grand éclat, aussi-tôt que sa moindre partie sortit de la Lune; & d'ailleurs nous sçavons certainement que le diametre apparent de la Lune étoit plus grand de près de deux minutes que le diametre apparent du Soleil.

Kepler dans son Astronomie optique attribue l'apparence de cette couronne autour de la Lune, lorsqu'elle éclipsé entierement le Soleil, à une matiere celeste qui environne la Lune, & qui est d'une densité capable de recevoir & envoyer vers la terre les rayons du Soleil, & représenter cette apparence de l'anneau lumineux. Il ne fait pas difficulté d'accorder à la Lune une espece d'atmosphère analogue à celle qui environne la terre, capable de causer de la refraction aux rayons du Soleil. Il examine encore dans son Traité de la nouvelle Etoile du Serpenteaire d'autres causes qui peuvent faire cette apparence, où parlant de la densité de la matiere celeste autour de la Lune, il dit qu'elle n'est pas toujours de la même maniere.

Nous avons souvent observé des Eclipses de Saturne , de Jupiter & des Satellites , & de quelques Etoiles fixes causées par la Lune sans nous être apperçû d'aucun changement dans ces astres dans leur Immersion ; ce qui nous donna occasion de juger qu'il n'y avoit pas pour lors d'atmosphère sensible autour de la Lune à l'endroit qui cachoit l'Etoile : mais en quelques-autres observations il nous a paru que l'Etoile s'allongeoit un peu en se cachant derrière la partie tant obscure que claire de la Lune ; ce qui nous a fait juger que pour lors il y avoit en cet endroit de la Lune quelque matiere dense capable d'alterer les rayons de ces Astres & causer ces apparences ; ce qui seroit assez conforme à la pensée de Kepler.

Il y a un grand Phenomene dans le Ciel qui nous a persuadé depuis long-tems qu'il pourroit bien faire paroître une chevelure lumineuse au Soleil dans ses Eclipses totales.

C'est cette lumiere répandue sur le Zodiaque que nous commençâmes d'observer avec admiration au mois de Mars de l'année 1683. Dans le rapport que nous en donnâmes au Journal du mois de Juin de la même année , nous jugâmes *que si on avoit pu voir cette lumiere à la presence du Soleil, elle lui auroit formé peut-être une espee de chevelure.*

Voici le cas qui est arrivé de la pouvoir voir à la presence du Soleil élevé sur l'horison , lorsqu'il étoit entièrement caché par la Lune dans cette Eclipe totale. On commença de voir cette couronne lorsque l'air étoit à un tel degré d'obscurité qu'on pouvoit distinguer des Etoiles qu'on ne commence à voir ordinairement qu'à l'heure que notre Phenomene est prêt de paroître , & lorsque le Soleil est assez plongé sous l'horison pour terminer le crepuscule.

On peut voir les raisonnemens que nous avons faits sur cette lumiere dans le Traité qui est inseré dans le Livre des voyages de l'Academie sur les observations du Printems de l'an 1683 , & sur celles que nous continuâmes d'en faire dans la suite.

On peut voir aussi ce qui en a été écrit dans la suite par M. Fatio, auquel nous fîmes voir ce Phenomene à l'Observatoire Royal, & qui en continua les observations avec une grande assiduité & nous les communiqua avec ses reflexions dans une Lettre qu'il donna depuis au public.

Nous avons supposé qu'il y a alentour du Soleil une matiere lumineuse plus dense proche de cet Astre, & plus rare à une plus grande distance, où elle est facilement effacée par les crepuscules & par la clarté de la Lune. Dans cette Eclipsé on aura pû voir aisément la partie de cette lumiere plus dense qui environne immédiatement le Soleil, comme il est arrivé en divers Villes. La partie la plus rare qui lui succedoit à une plus grande distance du Soleil n'aura pas pû être observée aisément; néanmoins les Astronomes de Montpellier qui apporterent une attention particuliere pour voir s'ils ne distingueroient point notre lumiere, remarquerent autour de cette couronne une aïre lumineuse plus pâle qui s'étendoit jusqu'à la distance de quatre degres de côté & d'autre. Le reste de la lumiere qui s'étend à une distance beaucoup plus grande n'aura pas été visible, à cause que l'obscurité de l'air n'étoit pas assez grande pour pouvoir distinguer la partie la plus rare qui est plus éloignée du Soleil, & qui ne paroît le matin qu'avant que le crepuscule commence, & le soir qu'après qu'il est fini. En effet les Observateurs de Montpellier ont remarqué que cette plus grande obscurité ne pouvoit être comparée ni à la nuit ni au crepuscule.

Au reste nous avons supposé que cette matiere lumineuse est ordinaire au Soleil, quoiqu'elle puisse n'avoir pas toujours la même étendue ni le même éclat, & nous avons cherché tous les Memoires que nous avons pû avoir des observations d'une apparence semblable à celle-ci.

Après avoir rapporté toutes celles que nous avons pû recueillir dans notre Traité, nous en avons trouvé encore d'autres, dont la plus évidente parmi les anciennes nous paroît celle qui est rapportée par Samüel Maïoli Evêque de Volturara dans son Ouvrage des jours Cani-

culaires , où il dit au Chapitre des Meteores qu'il avoit vû très-souvent , particulièrement dans les crepuscules d'Automne , une matiere éclatante & comme ardente en forme d'une colonne , ou d'une poutre , tantôt droite , tantôt oblique.

Ayant donc supposé cette matiere lumineuse , on en pourra voir la partie plus dense qui environne immédiatement le Soleil dans les Eclipses totales , avec quelques differences en divers lieux de la terre , suivant la diverse constitution de l'air.

Les observations de cette Eclipsé étant comparées au calcul tiré de nos Tables Astronomiques , ont fait voir qu'il n'y avoit pas deux minutes de difference entre les tems des phases observées & le tems des mêmes phases calculées , & qu'il n'y avoit que quelques minutes de doit de difference dans la grandeur des phases. Ayant corrigé cette difference , nous avons trouvé qu'après cette petite correction , le calcul representoit exactement l'Eclipsé totale , & sa durée dans les lieux où elle a été observée , & qu'elle representoit aussi avec la même justesse les tems & les phases observées en d'autres lieux où elle a été partielle. Nous en avons une de Rome faite par M. Bianchini , une de Gennes faite par M. le Marquis Salvago , de Bologne faite dans l'Observatoire de M. le Comte Marfigli par M<sup>rs</sup> Manfredi & Stancari , une de Strasbourg faite par M. Eifenschmid , une de Madrid faite par le Pere Casfani , outre celles de l'Eclipsé totale que nous avons déjà rapportées.

Après une semblable rectification des hypotheses , nous avons entrepris de décrire avec la précision que l'état present de la Geographie le peut permettre les autres lieux où cette Eclipsé a été totale , comme nous fîmes dans l'Eclipsé de l'année 1699 , où nous déterminâmes la route de l'Eclipsé centrale sur la surface de la terre , de la maniere qu'elle est décrite dans les Memoires de l'Academie de la même année , qui a été depuis vérifiée par les observations de ces pays-là qui nous ont été communiquées.

On a employé dans cette recherche la methode que nous avons accoutumé de pratiquer depuis que nous travaillons à l'Astronomie, dont il est fait mention il y a près de 50 ans par M. l'Abbé Giustiniani dans son Livre des Auteurs de la Ligurie. Il en a été aussi parlé dans l'Histoire de l'Academie de M. Duhamel, & dans les Ouvrages de quelques autres Auteurs auxquels nous l'avons communiquée.

Mon fils & M. Maraldi ont trouvé par notre methode que cette Eclipsé a commencé de paroître totale au lever du Soleil dans l'Océan atlantique, au milieu du trajet qui est entre l'Isle de Cayenne & les Isles du Cap vert. Ensuite l'Eclipsé parut totale un peu à l'Occident des Isles du Cap vert, l'ombre totale de la Lune ayant parcouru plus de 10 degrés de la circonference de la terre en 4 minutes d'heure. Après elle traversa les Canaries, d'où elle passa vers Cadix, & parcourut la partie Meridionale de l'Espagne, passant par Seville, par Valence, par la Catalogne. Elle entra ensuite dans le Royaume de France par le Roussillon, & passa par la partie Meridionale du Languedoc, l'Eclipsé ayant été observée totale à Perpignan, à Narbonne, à Béziers, à Montpellier & à Arles, où elle a été centrale.

Elle a été aussi observée totale à Tarascon, à Marseille, à Avignon, à Geneve & à Zurich. Elle aura aussi été totale à Valence en Dauphiné, à Grenoble, dans la partie Orientale de la Savoye, à Sion dans les Suisses, à Aulbourg, à Ratisbonne, dans la Bohême, dans la Prusse, dans la partie Septentrionale de la Moscovie, dans la grande Tartarie, & elle aura cessé de paroître totale au coucher du Soleil à 150 degrés de longitude & 52 degrés de latitude Septentrionale, l'ombre totale de la Lune ayant parcouru tout cet espace de terre compris entre l'Océan atlantique & la Tartarie Orientale en 2 heures 50 minutes.

Les lieux de la terre qui ont été éloignés de la trace décrite par le centre de l'ombre jusqu'à la distance d'un degré, c'est-à-dire, de 25 lieuës vers le Midy & d'autant vers



vers le Septentrion , un peu plus , ou un peu moins , auront eu aussi l'Eclipse totale , mais par un moindre espace de tems ; de sorte qu'il y aura des lieux qui ne l'auront vûe totale que pendant un instant.

La durée de l'obscurité totale qui a été estimée à Arles d'environ 6 minutes ( quoiqu'en comparant le commencement & la fin de l'obscurité , où l'on n'a point marqué de secondes , elle ne s'y trouve que de 5 minutes ) aura été des plus grandes ; car l'excès du diametre apparent de la Lune au Soleil diminué par la paralaxe , devoit être parcouru environ en 5 minutes de tems.

Les païs qui ont eu l'Eclipse centrale auront eu la durée de l'obscurité totale un peu différente les uns des autres , à cause de la différence qui résulte de la distance de la Lune en diverses heures du jour à diverses parties de la surface de la terre , & à diverses distances de la Lune à son Perigée , d'où elle s'éloignoit dans cette Eclipse , outre la différence qui est causée par la diverse obliquité des rayons du Soleil à diverses parties de la terre.

Cette trace que le centre de l'ombre dans l'Eclipse a parcouru sur la surface de la terre , a croisé obliquement la trace qui fut décrite dans l'Eclipse centrale du Soleil de l'an 1699 , dont on a fait la description dans les Memoires de l'Academie de la même année. On marqua que l'Eclipse centrale alla du Groëlande par la partie Septentrionale de l'Ecosse , par la partie Meridionale du Danemark , par les parties Septentrionales de la Pomeranie , entre la Pologne & la Transylvanie , par la petite Tartarie , par la Mer noire , par l'Armenie , par la Perse , par le Royaume de Mogol , par les Indes Orientales jusqu'aux confins du Royaume de Siam , y étant toujours allée du Nord-Oüest vers le Sud-Est , au lieu que celle de cette année est allée du Sud-Oüest vers le Nord-Est. Ces deux traces se sont croisées en Pologne.

Nous avons aussi décrit les lieux où l'Eclipse de cette année a été de six doigts , tant du côté du Midy que du côté du Septentrion. Du côté du Midy la phase de six

doigts est arrivée au lever du Soleil dans la mer, où l'Equinoxial coupe le premier Meridien. Delà elle est passée par l'Afrique suivant une ligne qui la traverse depuis la Guinée jusqu'au Golphe de la Sidre. Ensuite elle a traversé la Méditerranée & a passé par l'Isle de Candie, par l'Asie mineure, par la Georgie, par la petite Tartarie & par la partie Meridionale de la grande Tartarie.

La phase Septentrionale de 6 doigts a commencé dans la mer qui est entre l'Isle de Terre-neuve & les Açores, a passé par la partie Orientale de l'Irlande, à l'Occident de l'Isle de Spitberg, & dans les pays qui sont proches du Pole Septentrional.

La ligne qui distingue les pays Meridionaux qui ont eu un peu d'Eclipse de ceux qui ne l'ont point vûe, passe à l'Occident de l'Isle de S. Thomé par la partie Meridionale de l'Egypte, par la partie Septentrionale de l'Arabie, & par le milieu de la Perse & du Mogol.

Du côté du Septentrion une partie de la penombre tombe hors de la terre.

La difference de 2 à 3 minutes d'heure qui s'est trouvée entre les mains des phases de cette Eclipse observée à Paris, & le tems qui avoit été calculé dans les Ephemerides & la Connoissance des Temps, & la difference de quelques parties de doigts qui s'est trouvée dans la grandeur de l'Eclipse ne paroîtra pas considerable à ceux qui n'ignorent point la multitude des principes qui concourent à déterminer une de ces Eclipses, & les observations qu'il faut comparer ensemble pour établir chacun de ces principes.

Du côté du Soleil il y a sa longitude moyenne, le lieu de son Apogée, sa plus grande équation, la methode de la distribuer par divers degrés de distance de l'Apogée pour déterminer son lieu veritable, le demi-diametre apparent du Soleil & les regles de sa variation, sa parallaxe, sa refraction sujette à des irregularités physiques très-difficiles à réduire à quelques regles exactes, & l'obliquité de l'Ecliptique à l'Equinoxial. Il y a aussi l'équation du tems,

qui consiste dans la réduction du tems moÿen au tems véritable, dans laquelle les Astronomes modernes different entr'eux de plusieurs minutes, comme il est arrivé même dans cette Eclipe.

Du côté de la Lune il y a les principes correspondans à ceux du Soleil que nous venons d'indiquer, & plusieurs autres équations qui ne conviennent point au Soleil. Une qui dépend de la distance du Soleil à l'Apogée de la Lune. Une qui dépend de la distance de la Lune au Soleil. Une de la distance même du Soleil à son propre Apogée, qui ont toutes des regles particulieres de variation, aussi-bien que le diametre apparent de la Lune & sa parallaxe, qui font la plus grande diversité des Eclipses totales & partiales. Il y a aussi à déterminer les nœuds de la Lune, leurs moÿens mouvemens, leurs équations, l'inclinaison de l'orbite de la Lune à l'Ecliptique & sa variation, d'où dépend la latitude de la Lune.

Du côté de la terre il y a son exposition au Soleil, qui varie à chaque instant en des sens differens par le mouvement journalier suivant l'Equinoxial & ses paralleles, & par le mouvement annuel suivant le Zodiaque: les longitudes & les latitudes des lieux dont on veut sçavoir s'il y aura Eclipe ou non; quelle doit être la difference de sa grandeur & de sa durée en differens lieux.

Pour la détermination de chacun de ces principes on emploie différentes hypotheses sur lesquelles on peut avoir quelque doute, parce qu'on n'a pas toutes les observations qui seroient necessaires à une détermination précise, & celles qu'on a ne sont pas toujours faites avec assez d'exactitude.

Nonobstant toutes ces difficultez on a réduit la methode des Eclipses à un tel état, qu'elle peut servir à trouver la longitude Geographique des lieux éloignez où la même Eclipe a été observée avec assez de précision. Nous en avons fait l'experience dans cette dernière Eclipe sur les observations qui nous en ont été envoyées de differens lieux. Nous les donnerons suivant l'ordre des longitudes

SUITE DE L'ARTICLE TROIS

DES ESSAIS DE CHIMIE.

PAR M. HOMBERG.

1706.  
30. Juin.

J'Ay proposé dans mon dernier Memoire la matiere de la lumiere pour mon souffre principe, & pour le seul principe actif. J'ay prouvé que cette matiere est continuellement en mouvement, & qu'elle penetre sans cesse tous les corps poreux qui sont dans l'univers; ce que j'ai crû un attribut necessaire du principe actif. J'ay prouvé aussi que la matiere de la lumiere en penetrant les corps poreux s'y peut arrêter, les augmenter de poids & de volume, les changer de figure, & joindre differens principes ensemble pour en composer des mixtes nouveaux, ce qui est le caractère que je donne à mon souffre principe; il me reste maintenant à proposer une idée vrai-semblable de la maniere que la matiere de la lumiere s'introduit & s'arrête dans les autres principes, & comment ces autres principes par-là changent de figure & deviennent des matieres sulphureuses, qui sont la partie active de tous les mixtes.

Il faut se souvenir ici que nous avons supposé dans tous les corps non-seulement des pores qui donnent un passage très-libre à la matiere de la lumiere, mais aussi une partie solide, qui est proprement la substance de chaque corps, contre laquelle la matiere de la lumiere est poussée continuellement par le Soleil & par les autres flammes, & de dessus laquelle cette matiere reflechit & ne la penetre que fort difficilement.

Nous devons considerer la matiere solide d'un corps en deux manieres: La premiere est quand nous la regar-

donc comme un corps composé, ou la substance entière, par exemple, du bois, de l'argent, &c.

La seconde est lorsque nous en considérons seulement les parties integrantes, ou les principes dont ces corps sont composez. Il m'a toujours paru que les corps pris dans la première considération sont dans leur dernière perfection, particulièrement les corps organisez, comme sont tous les animaux & toutes les plantes, & que pour lors ils ne changent par le frapement de la matière de la lumière, que pour redevenir peu à peu des matières simples ou des principes dont ils avoient été composez ; ce qui arrive toujours en plus ou moins de tems que la matière de la lumière les frappe plus ou moins fortement : mais en considérant seulement les parties dont ces corps sont composez, ils reçoivent continuellement les impressions de la matière de la lumière qui les change différemment selon que cette matière s'y attache en plus ou en moins de quantité, & qu'elle s'y attache superficiellement, ou qu'elle entre dans la substance même de ces principes, ce qui leur donne une forme nouvelle, comme nous l'avons remarqué fort sensiblement dans l'observation que nous avons rapportée dans notre dernier Memoire sur le mercure, dont une partie s'est changée en poudre par la simple coction qui pesoit plus qu'elle ne faisoit avant que d'avoir été mise sur le feu, mais qui s'est remise en mercure coulant quand on l'a exposé à un très-grand feu. L'autre partie de ce mercure s'est fixée tout-à-fait par une plus forte & plus longue coction en un corps solide & métallique, qui ne s'est plus remis en mercure coulant quand on l'a exposé à un très-grand feu, la matière de la lumière ne s'étant arrêtée que superficiellement au premier, & étant entrée dans la substance même de ce dernier mercure. L'application de ce raisonnement au fait que nous avons vu dans ce mercure, nous fera concevoir de quelle manière ce changement lui est arrivé, & quelle sorte de matière sulfureuse en a été produite ; ce qui nous donnera en même tems un moyen d'expliquer facilement la

production de toutes les autres matieres sulphureuses. Nous supposons d'abord que les parties du mercure sont des petites gouttes fort menuës, ou des petits grains ronds & polis, qui glissent fort aisément les uns sur les autres, ce qui fait sa fluidité; la matiere de la lumiere poussée violemment par le moyen de la flamme & pendant long-tems contre ces petits grains qui font la partie solide du mercure, elle hache & en dérange peu à peu la superficie, & s'y introduit; & comme elle ne trouve pas un passage aisé pour la traverser, elle y demeure attachée superficiellement, & y produit de petites éminences qui rendent la superficie de ces petits grains raboteuse ou herissée de ronde & de polie qu'elle étoit; car il faut s'imaginer ces grains de mercure comme lardez de matiere de lumiere, dont les petites éminences corrompent sensiblement le poli de ces petits grains; ce qui est d'autant plus aisé à accorder, que les petits grains de mercure sont plus petits qu'il ne faut pour être apperçûs par les yeux, même armez d'un microscope, & plus petits que les parties de l'air, parce que le mercure passe par des endroits où l'air ne passe pas; ainsi quelque petite que soit la matiere de la lumiere lorsqu'elle s'arrête dans la superficie des parties du mercure, elle en doit changer sensiblement la figure.

Les parties du mercure étant ainsi devenuës herissées par le lardement de la matiere de la lumiere, nous pouvons nous les représenter comme des chataignes couvertes de leurs coques vertes & herissées, qui se soustiennent plutôt les unes les autres que de couler sur un plan incliné, comme elles feroient si c'étoit des boules rondes & polies; & dans cet état le mercure n'est plus fluide, étant changé en une poudre rouge, dont les petits grains collez les uns contre les autres par leurs propres herissons; composent de gros morceaux assez durs & de figures irregulieres, comme feroient les coques herissées des chataignes si on les pressoit les unes contre les autres, qui composeroient des gros plotons de figure irreguliere, & qui tiendroient fort bien ensemble: ces pointes herissées du

mercure par la longueur du temps qu'on les expose au feu s'augmentant en nombre & en grandeur, s'entrelaissent & se soutiennent si fort que le mercure devient dur comme une pierre ; & comme ces pointes qui rendent chaque grain du mercure herissé font une matiere sensible & pesante, le mercure dans cet état augmente de volume, & pèse plus qu'il ne faisoit avant que d'avoir été mis au feu, & lorsqu'il étoit encore coulant.

Si on broye ce mercure avec du nouveau mercure coulant, il s'en fait un amalgame comme si c'étoit un metal ; & en le remettant pendant long-tems à un feu plus violent, la matiere de la lumiere qui s'étoit attachée seulement sur la superficie des petits grains du mercure dans le premier feu, commence au plus grand feu de penetrer plus avant dans la substance même de ces petits grains. Si on broye ce mercure plusieurs fois avec du nouveau mercure coulant, la matiere de la lumiere penetrera par la forte cuisson si avant dans les petits grains du mercure, qu'en l'exposant au feu de fonte, il en restera une partie en forme de metal, qui ne changera plus sensiblement à quel que degré de feu qu'on le mette.

Dans les premieres digestions la matiere de la lumiere ne s'attache que superficiellement aux petits grains du mercure, & les envelope peu à peu entierement : elle continuë ensuite de frapper ces grains envelopez, & ne pouvant pas toucher en cet état le mercure à nud, mais seulement son envelope, elle ne fait plus d'impression sensible sur le mercure ; ensorte qu'on pourroit le tenir pendant plusieurs années en digestion, sans qu'il changeât pour cela en aucune maniere : mais en broyant ce mercure digéré & qui est devenu poudre par la simple cuisson, on brise toutes les envelopes des petits grains du mercure, qui par-là se presentent nuds à la matiere de la lumiere que le feu de la seconde digestion y peut pousser ; & comme la premiere digestion n'a pas laissé d'entamer la superficie de ces petits grains & d'y faire une espece de ha-chure, comme nous l'avons remarqué ci-dessus, la se-

conde digestion pousse ces hachures un peu plus avant, & ensuite envelope encore les grains du mercure : le second broyement dépouillera ces petits grains de leur seconde envelope, & une troisième digestion enfoncera encore plus avant ces hachures dans les petits grains ou dans la partie solide du mercure, jusqu'à ce qu'en réitérant ceci plusieurs fois, les petites hachures deviennent assez profondes que la matiere de la lumiere s'y puisse loger entierement; & pour lors la flame étant trop grossiere pour entrer dans ces petites logettes, elle ne fait que passer par dessus, & la matiere de la lumiere reste noyée dans ces logettes, sans qu'aucune autre matiere l'en puisse faire sortir, à moins qu'elle ne fût aussi petite & même plus petite que la matiere de la lumiere : le mercure dans cet état est devenu metal, & la flame n'a plus de pouvoir sur lui; & comme il n'y a aucun corps qui soit plus petit que la matiere de la lumiere, pour arracher celle qui s'est logée dans la partie solide du mercure, ce qui seroit détruire le metal, il reste impunément dans le plus grand feu : mais en l'exposant à un poussement très-violent de la matiere de la lumiere par les rayons concentrez du verre ardent, celle qui s'étoit logée dans le mercure s'enfonce davantage & le traverse, comme un cloud est chassé par un autre, la substance solide du mercure devient criblée & poreuse, qui prête un passage libre à la matiere de la lumiere, & pour lors il n'est plus metal, ni même du Mercure, mais une matiere terreuse & legere, comme nous avons remarqué dans nos observations sur le verre ardent.

La matiere de la lumiere qui s'est introduite & attachée au corps du mercure, est à son égard une matiere étrangere, laquelle considérée seule & avant que d'être attachée au mercure, est une matiere non encore déterminée, que nous avons apellée notre souffre principe : mais après s'être introduite & attachée au mercure, elle se détermine souffre metallique, & demeure telle pendant tout le tems qu'elle sera attachée au mercure; & si par quelque operation on la détachoit du mercure, &

qu'on



qu'on introduisit dans quelque autre corps qui ne fut pas mercuriel : ce soufre metallique changeroit de nature & de nom , & deviendrait un soufre vegetal , animal ou bitumineux , selon la nature du corps auquel il se joindroit, ces transformations se pouvant faire fort aisément, comme nous le verrons ci-après.

Nous appellons soufre metallique la matiere de la lumiere , ou nôtre soufre principe lorsqu'il s'est joint ou attaché au mercure , ou à quelque autre corps mercuriel que ce soit. Nous l'appellons soufre vegetal lorsqu'il s'est introduit à demeure dans quelque matiere vegetale. Nous l'appellons soufre animal lorsqu'il s'est attaché & uni à quelque partie animale; & nous l'appellons soufre bitumineux lorsqu'il s'est uni à quelque matiere simplement terreuse.

Je ne connois que ces quatre differentes matieres sulphureuses , & encore pourroit-on les distribuer en trois classes seulement ; parceque le soufre vegetal & le soufre animal se ressemblent si fort , que l'on pourroit n'en faire qu'une seule classe. Nous ne laisserons pas cependant de les diviser pour avoir des distinctions plus précises dans le raisonnement.

L'union du soufre principe aux matieres animales, vegetales, mercurielles & terreuses pour produire les differens souffres , se peut faire immediatement par le pousse-ment du Soleil & par le feu , ou mediatement par la transposition d'une matiere sulphureuse , d'un certain genre dans le corps d'un autre genre ; par exemple , l'huile d'olive qui est un soufre vegetal , faisant partie de la nourriture de quelque animal , peut devenir de la graisse de cet animal , qui est un soufre animal ; & la racine d'une plante sucçant la matiere graisseuse du fumier , qui est un soufre animal , se changera en une huile vegetale dans la plante , & ainsi des autres.

Les transpositions des matieres sulphureuses d'un genre à un autre sont aisées à faire lorsque les souffres sont volatils ; mais quand c'est un soufre fixe , il est très-difficile de

le changer d'un corps à un autre. Nous appellons une matiere fixe, lorsqu'étant mise au feu elle y reste sans être enlevée par la flamme. Nous appellons une matiere volatile, lorsqu'elle ne peut pas supporter la violence du feu ; & celle-là est plus ou moins volatile, selon qu'elle est enlevée par un degré de feu plus ou moins violent. La maniere comment le feu ou la flamme enleve les matieres volatiles, & comment elle laisse les matieres fixes, a été expliquée dans l'article 2 de ces Essais.

Toutes les matieres sulphureuses animales, vegetales & bitumineuses sont volatiles ; mais les metalliques sont en partie fixes, en partie volatiles. Dans l'or & dans l'argent il n'y a que du souffre metallique fixe, parceque la flamme ne scauroit enlever ces metaux ni en separer le souffre. Je ne parle ici que de la flamme seulement, qui est le feu connu dans nos laboratoires, & non-pas des rayons du Soleil concentrez par le verre ardent, qui enlèvent aussi bien l'or & l'argent que les autres metaux, & à l'égard desquels il n'y a rien de fixe ; car la matiere de la lumiere heurte par cette concentration avec une violence extrême contre la partie solide des corps, & elle la penetre promptement, mais c'est en la brisant & en la détruisant ; & alors bien loin de composer un nouveau mixte, elle réduit ce corps dans les principes les plus prochains dont il étoit composé ; & si on continuë à exposer ces principes au même feu, ils sont encore divisez en principes plus simples dont ces premiers étoient composez, ce qui n'arrive jamais au feu de la flamme.

Je dis donc que nous ne connoissons de souffre fixe que celui qui soutient les efforts de la flamme, & qui n'est que d'une seule sorte ; sçavoir, le souffre metallique fixe, qui se trouve pur dans l'or & dans l'argent, & mêlé de differens souffres volatils dans les autres metaux, qui ne laissent pas d'être metalliques quoique volatils, parcequ'ils sont propres à ces metaux, & cependant differens dans chacun d'entr'eux.

Nous appellons encore souffre metallique volatil celui

qui s'attache superficiellement au mercure par les longues digestions, parceque le grand feu l'en separe : mais si par une plus longue ou par une plus forte cuisson ou par quelqu'autre industrie ce souffre volatil a penetré jusques dans l'interieur & dans la substance même du mercure ; alors il ne peut plus être enlevé par la flamme , le mercure devient metal , & son souffre volatil se change en souffre fixe metallique, enforte que la difference du mercure qui est devenu metal , & celui qui a été précipité seulement par lui-même, consiste en ce que dans ce dernier la matiere de la lumiere s'est attachée superficiellement aux petits grains du mercure , ou elle s'est changée en un souffre metallique volatil , qui s'en separe fort aisément par le feu , en remettant le mercure dans sa premiere forme liquide : mais quand le mercure est devenu metal , la matiere de la lumiere a penetré dans la substance même du mercure , & par-là elle est devenuë un souffre fixe metallique qui ne quitte plus le mercure quelque grand feu qu'on lui donne , le conservant toujours dans la forme de metal ; & selon la quantité du souffre fixe qui s'y est arrêté , le metal est plus ou moins pesant , c'est-à-dire, est or ou argent. De sorte que la seule difference qu'il y a entre l'or & l'argent, est que l'un est du mercure qui dans son interieur contient beaucoup de souffre metallique fixe , c'est-à-dire en plus grande quantité qu'il ne lui en faut pour être simplement metal ; & que l'autre est du mercure qui dans son interieur contient peu de souffre metallique fixe, c'est-à-dire autant seulement qu'il lui en faut pour devenir metal.

Nous voyons par-là que les parties qui composent l'or & l'argent ne sont que du mercure & du souffre fixe, ce qui est une composition fort simple ; au lieu que la substance des autres metaux consiste en un assemblage de plusieurs matieres, dont la base neanmoins est du mercure avec très-peu de souffre metallique fixe, mais qui sont accompagnés de differens souffres metalliques volatils, des souffres bitumineux, des differentes terres & des matieres

salines , qui font des compositions très-composées , dont les parties de différentes configurations ne pouvant pas se joindre fort étroitement , sont par conséquent de peu de durée dans le feu , & dont la production artificielle seroit d'autant plus difficile que celle de l'or & de l'argent , que la composition des uns est plus simple que celle des autres.

Nous avons vu que les souffres métalliques fixes ou volatils ne sont que la matière de la lumière jointe plus ou moins étroitement au mercure ; mais tous les autres souffres sont des compositions beaucoup plus amples. J'ai fait les analyses du soufre commun , du Pétrole , du soufre de Quito , du Jayet , des charbons de terre & des différens succins , qui sont les souffres bitumineux les plus connus ; j'y ai toujours trouvé beaucoup de terre , beaucoup de sel volatil acide , une quantité considérable de matière aqueuse , & une huile très-pénétrente , laquelle ayant été analysée encore , s'est réduite en beaucoup d'eau , en un peu de terre & en un peu d'huile , laquelle par plusieurs opérations répétées s'est enfin tout-à-fait dissipée , laissant à chaque fois un peu des autres principes dont ces huiles étoient composées : le soufre principe , ou la matière de la lumière qui étoit entrée dans la composition de ces souffres , se perdant à la fin entièrement par les analyses , comme une matière qui cesse de nous être palpable & sensible quand elle est dégagée des autres principes plus matériels , comme nous l'avons remarqué dans le commencement de cet article.

J'ai fait aussi les analyses des huiles distillées essentielles & fortides des plantes , de leurs graisses & huiles exprimées , & de différens sucres résineux , qui sont des matières sulphureuses végétales. J'ai fait aussi les analyses de différentes parties des animaux qui contiennent les matières sulphureuses animales , dont les opérations souvent répétées ont entièrement divisé les huiles en beaucoup d'eau , en sel & en terre comme dans les matières bitumineuses , perdant pareillement & par les mêmes raisons leur souf-

pre principe dans toutes ces operations analytiques ; enforte que les matieres sulphureuses tant animales & vegetales que bitumineuses , sont toujours composées de quatre matieres ; sçavoir , d'eau , de sel , de terre & de souffre principe , au lieu que le souffre metallique n'est composé que de deux matieres seulement , sçavoir , de mercure & de souffre principe , à moins qu'on ne veuille dire que le mercure soit aussi composé de matieres plus simples , ce que nous n'avons pas encore pû découvrir ; & comme nous avons remarqué dans les metaux que les plus simples sont les plus parfaits , nous pourrions bien dire aussi que parmi les souffres les plus simples sont les plus parfaits & les moins alterables , ce que les experiences confirment ; car la flame qui détruit tous les autres souffres , ne sçauroit faire aucune impression sensible sur le souffre metallique fixe : mais si la fixité du souffre metallique & son peu de sujction au changement est une perfection en soi , ce doit être un défaut à l'égard de nous ; car la facilité de changer & de dissoudre les autres souffres nous les rend familiers & utiles , tant pour nos nourritures que pour nos remedes , au lieu que le souffre fixe est encore tout-à-fait inabordable à la plupart des hommes , même aux plus sçavans Physiciens , ce qui est un très-grand dommage pour la matiere medicale.

L'introduction de la matiere de la lumiere dans les autres principes , dont les vegetaux , les animaux & les bitumes sont composez , est à peu près la même que celle qui se fait dans le mercure : mais comme les parties de ces autres principes ne sont pas si fines ni si compactes ou solides que celles du mercure , la matiere de la lumiere le penetre plus aisément & en moins de tems ; mais elle ne s'y joint pas si étroitement qu'au mercure , à peu près comme un clou est fort aisément enfoncé dans une pomme ou dans une citrouille , & beaucoup plus difficilement dans un ais de chêne : mais aussi quand le clou y a été une fois enfoncé à coups de marteau , il en est difficilement retiré , au lieu qu'on le retire sans peine de la pomme ou

de la citrouille; ce qui fait que toutes ces matieres sulphureuse-là sont non-seulement volatiles , mais aussi fort aisément détruisibles par le feu , c'est-à-dire, que la matiere de la lumiere s'en separe sans beaucoup de peine , laissant les autres principes dans le même état qu'ils étoient avant que de les avoir penetré.

Les sels reçoivent avec beaucoup d'avidité les souffres , mais c'est sans les changer de nature, en quoi leur transposition est differente de celles dont nous venons de parler, c'est-à-dire, qu'un souffre animal, par exemple, transplanté dans une matiere saline n'est pas changé en un souffre bitumineux ou autre, il demeure le même, mais il caractérise le sel auquel il se joint; & comme les souffres volatils changent aisément de nature, si par quelque accident le souffre, par exemple, qui aura caractérisé le sel commun, se peut changer en celui qui caractérise le salpêtre, le sel commun deviendra salpêtre, & ainsi des autres; enforte que la difference des sels ne consiste que dans les differens souffres qui les accompagnent. Nous en avons parlé amplement dans l'article du sel principe.

Toutes les matieres sulphureuses bitumineuses, vegetales & animales sont inflammables; ce qui a donné occasion à la fausse idée, que ces matieres ne sont sulphureuses, que parce qu'elles sont inflammables: mais quand on considerera que parmi ces matieres il y en a qui sont plus inflammables les unes que les autres, & qu'elles le sont plus ou moins selon que dans leur composition il est entré plus ou moins de sel acide, nous comprendrons aisément que l'inflammabilité n'est pas le caractère du souffre, mais du mélange d'une matiere huileuse quelconque avec un sel acide; ce qui se prouve sensiblement par la composition des matieres résineuses artificielles. Par exemple; mêlez de l'huile de gérofle avec de l'esprit de nitre dans les forces & dans les doses requises, il en résultera une résine qui sera incomparablement plus inflammable que n'étoit l'huile de gérofle, ou l'esprit de nitre dont cette résine est composée; cette grande inflammabilité ne pro-

vient donc pas de l'une des deux matieres séparément prise , mais de leur mélange.

La décomposition des matieres simples fort inflammables nous confirme la même chose , le souffre commun prend feu ou s'enflamme à l'approche d'une petite étincelle de feu : mais quand on en a séparé la partie acide , comme je l'ai montré dans nos Memoires de l'année 1703 , la partie huileuse qui reste dépoüillée de son acide , ne brulle plus , même quand on la met dans la flamme d'une chandelle , elle ne fait que petiller , & pour la faire brûler il la faut mettre sur des charbons fort ardens. Le phosphore de l'urine est de toutes les matieres inflammables celle qui s'enflamme le plus aisément , puisqu'elle prend feu par un simple frottement très-leger : mais quand on en fait l'analyse , on trouve qu'il se separe en une liqueur aqueuse très-acide , comme seroit l'esprit de vitriol , & en une matiere terreuse jaunâtre & un peu grasse , dont la premiere n'est point du tout inflammable , & la seconde ne brûle qu'avec peine. La plupart des matieres sulphureuses metalliques , même des volatiles , ne sont point-du-tout inflammables ; de sorte que la proposition seroit bien vraie de dire que toutes les matieres inflammables sont sulphureuses , mais non pas celle que toutes les matieres sulphureuses sont inflammables.

Nous avons remarqué que tous les souffres non metalliques , comme la graisse , le sang & la moëlle dans les animaux , les huiles , les gommes & les résines dans les plantes , &c. sont composez de sel , d'eau , de terre & d'huile : mais quand on considerera que toutes les autres parties des animaux , des plantes & des bitumes sont pareillement composez de ces mêmes quatre matieres là , ce sera un surcroît de preuve que le souffre est le seul principe actif qui se trouve dans tous ces trois genres de corps , puisque la matiere huileuse , qui en est le souffre particulier , non-seulement se trouve dans toutes les parties des animaux , des vegetaux & des bitumes , mais aussi que la matiere huileuse elle-même comprend ces autres trois principes & en

est composée, ce que l'on ne sçauroit dire des autres principes. Cette composition peut être variée infiniment ; car la substance d'un corps composé ne consistant que dans l'assemblage des matieres dont il est composé , si l'on change cet assemblage , ou en rangeant les parties autrement , ou en augmentant quelques-unes de ces parties , dont la combinaison est infinie , il est constant que le changement de la substance de ces corps pourra être infini aussi.

La matiere de la lumiere , en produisant les matieres sulphureuses , s'introduit dans la substance des corps , en change l'arrangement des parties & les augmente , & par consequent elle change la substance même de ces corps en autant de façons qu'elle se peut differemment placer & en differente quantité , ce qui fait une variété infinie ; de sorte que si on vouloit comparer la variété des matieres qui existent à celle qui pourroit être par toutes les combinaisons possibles , nous serions obligez de dire , que l'Univers connu n'est que très-peu de chose en comparaison de ce qu'il pourroit être , & même s'il y avoit plusieurs Mondes comme le nôtre , ils pourroient être tous differemment garnis d'objets sans changer la matiere , ni la maniere dont ces objets seroient composez ; ce qui marque une richesse & une puissance infinie de l'Estre qui a produit l'Univers.

## D U M I E L

ET DE

SON ANALYSE CHIMIQUE.

PAR M. LEMERY.

1706.  
10. Juillet.

**I**L n'est pas necessaire que je traite ici de l'origine du Miel : tout le monde sçait assez que c'est une substance sucrine que les Abeilles ramassent des fleurs de diverses plantes.



plantes, & qu'elles portent dans leur ruche pour leur nourriture & pour celle de leurs petites mouches. Cette substance sucrine ou miellée se manifeste assez au goût dans plusieurs espèces de fleurs, comme dans celles du trèfle des prez, dans celles des roses, des œilleux; car si on les lèche principalement vers la partie d'embas, qu'on appelle onglets, & qui est contenue dans le calice, on sentira un goût doux & agréable. Cette substance reçoit dans l'Abeille & dans la ruche une élaboration qui la perfectionne & la réduit en miel.

Plusieurs choses contribuent à faire de bon miel, comme la chaleur & la pureté de l'air, la bonté des Abeilles, la nature des plantes qu'elles ont léchées, l'adresse des Ouvriers qui y travaillent.

On retire le miel des ruches en deux saisons, au Printemps & en Automne. Il me paroît que la première est la plus convenable, parceque c'est le tems où les Abeilles sont dans leur plus grande vigueur; qu'elles vont humer & sucer les rosées qui tombent abondamment aux mois d'Avril & de May, & que la substance des plantes est plus pur dans le renouvellement de la chaleur.

La meilleure manière de separer le miel, est de mettre les tablettes ou gateaux qu'on a retirez des ruches sur des clayes ou nattes d'osier. Il en coule un beau miel blanc excellent qui se congelle: on l'appelle Miel vierge.

On tire encore du miel blanc des gateaux qui restent sur les clayes d'osier, en les mettant à la presse dans des sacs de corde: mais il n'est pas si bon ni si blanc que le premier, tant à cause de la cire qui y donne une légère impression, que par l'expression des mouches vives ou mortes, & même des vers gros & blancs qui s'engendrent quelquefois dans les ruches, & qui y portent un grand préjudice si l'on n'y remédie, car on observe que quand ces insectes se sont rencontrez dans le miel qu'on a exprimé, il ne se congelle pas bien, à cause du vilain suc qui y est entré: le goût en est moins agréable, & il se garde difficilement sans s'aigrir & se corrompre.

Le miel jaune est tiré de toutes sortes de gateaux vieux & nouveaux qu'on a retirez des ruches : on les rompt, on les met dans des chaudières, on y mêle un peu d'eau, & on les fait chauffer ; puis les ayant enveloppez dans des sacs de toile, on les met à la presse pour en faire sortir le miel : la cire demeure dans les sacs.

Plusieurs cantons du Languedoc & du Dauphiné fournissent le meilleur miel blanc que nous ayons en France : mais le plus estimé & le plus recherché de tous, est celui qu'on fait en un petit bourg nommé la Corbière, situé à trois lieux de Narbonne : c'est celui que nous appellons miel de Narbonne. L'excellence de ce miel, à ce qu'on prétend, vient des Romarins qui sont abondans & très-communs dans cette contrée, & dont les Abeilles succent les fleurs ; néanmoins je remarquay en une année que je demeuray au Languedoc, qu'encore que la gelée qui y fut grande & extraordinaire l'hiver, eût fait perir presque tous les Romarins, le miel qu'on recueillit au Printemps suivant ne ceda point en agrément ni en bonne qualité aux miels qui avoient été tirez les années précédentes.

Pour le miel jaune nous en voyons de plusieurs sortes qui diffèrent dans leur consistance, dans leur couleur plus ou moins foncée, dans leur odeur & dans leur goût. Celui qui se tire de Champagne est le meilleur ; il doit être nouveau, de consistance assez ferme, grenu, de couleur jaune dorée, d'un goût agréable. Les miels qui viennent de la Touraine & de Picardie sont moins bons, ils sont écumeux, mal liez, & souvent d'une consistance trop liquide, de couleur jaune assez foncée, sentant un peu la cire, & d'un goût moins agréable que celui du miel de Champagne. Le miel qui se fait en Normandie est le moins bon de tous, & le plus mal préparé : sa consistance est quelquefois assez solide, & souvent trop liquide : sa couleur est rougeâtre, son odeur est désagréable, il a un goût de cire.

Ces différentes qualités de miels ne viennent pas tant de la température du climat, que de la bonne ou mauvai-

se manœuvre des Ouvriers. Ceux de Normandie mettent trop d'eau dans leurs gâteaux, & ils sont obligez ensuite d'en faire consommer une partie, c'est peut-être ce qui rend leur miel rougeâtre. Ils en separent mal la cire par les pressoirs, ce qui fait qu'il a un goût de cire : ce n'est pourtant pas leur profit, car la cire est bien plus chere que le miel.

Le miel est en usage dans quelques alimens & dans les remèdes ; mais il l'étoit beaucoup davantage avant qu'on eût trouvé l'invention du sucre. Les anciens en assaisoient leurs ragoûts, & ils l'emploioient pour leurs confitures, comme quand ils préparoient leur *Melimum*, qui étoit du coing ou une autre pomme confite dans du miel. On en servoit sur leurs tables. Ils s'en servoient pour leurs sirops & pour leurs autres compositions medecinales, comme nous nous servons du sucre. Ils en composoient diverses sortes de boissons, comme de l'Hydromel qu'ils appelloient aussi *Melicratum*, *Aqua mulsa*, *Apomeli*. Nous nous servons souvent pour la délicatesse du goût à la place de cet Hydromel, de l'eau sucrée.

Ils beuvoient du vin miellé qu'ils appelloient *Oenomeli*. Nous nous servons à sa place du vin sucré, de l'Hypocras.

Ils beuvoient aussi de l'Oximel : c'étoit un mélange de miel & de vinaigre qu'ils temperoient avec beaucoup d'eau pour se rafraîchir. Nous nous servons à sa place du sirop acetueux, du sirop de limons, ou des autres sirops aigres, & nous n'emploions plus gueres ces liqueurs miellées que pour les remèdes.

Au reste le miel est souvent préférable au sucre, quand on n'a point tout-à-fait égard à la délicatesse du goût : car outre que c'est un ramas de la substance la plus pure & la plus étherée d'une infinité de fleurs qui possèdent de grandes vertus, il est plus balsamique, plus pectoral & plus anodin que le sucre, qui n'est que le suc purifié & épaissi du seul roseau.

Le miel devient amer par une trop forte coction, de même que les autres choses douces : il s'enflamme au feu à peu près comme le sucre.

Les Abeilles sauvages font sur les rochers de gros amas de miel qui ne servent ordinairement que pour la nourriture des mouches & des oiseaux. Plusieurs croient avec assez de vrai-semblance que l'Ambre gris en provient ; mais ce n'est pas dont il s'agit presentement.

*Analyse du Miel.*

J'ai mis en distillation au bain Marie dans une grande cucurbitte de degrez trente-deux onces du plus excellent miel de Narbonne que j'aye pû trouver. J'en ay eu six onces d'une eau claire comme de l'eau commune. J'en aurois tiré davantage si j'avois continué la distillation ; mais je ne voulois que la premiere eau qu'on appelle Rosée de miel. Elle a l'odeur du miel , elle est insipide ; cependant elle contient un acide , car elle a rougi le tournesol. Elle n'a fait aucune ébullition avec l'huile de tartre , ni avec l'esprit volatil de sel armoniac. Cette rosée de miel est estimée propre pour faire perdre le lait aux Nourrices , pour exciter l'urine , pour aider à la respiration. On en prend trois ou quatre onces à la dose , deux ou trois fois par jour.

J'ai retiré la cucurbitte du bain Marie , & je l'ai placée au bain de sable où j'ai continué la distillation par un feu mediocre. Le miel s'est beaucoup gonflé , & il a rendu quatre onces d'une seconde eau claire , de couleur jaune , d'une odeur de miel assez agreable , d'un goût acide & acre , sentant un peu le feu. Elle a donné au tournesol une belle couleur rouge foncée.

J'ai poussé le feu un plus fort sous le miel , il s'en est élevé beaucoup de fumées blanches qui ont rempli de nuages le chapiteau & le recipient , & elles se sont résoutes en une troisième eau qu'on appelle Esprit de miel , pesant trois onces , de couleur rouge , d'un odeur de brûlé , mais agreable & d'un goût acide fort âcre , penetrant & brûlant un peu la bouche. Elle a bouillonné avec les alkali : elle a donné au tournesol comme la précédente une belle couleur rouge foncée.

J'ai augmenté fortement le feu sous la cucurbite, & je l'ai continué jusqu'à ce qu'il ne parût plus de nuages dans le chapiteau. Il a distillé une quatrième eau pesant deux onces, ayant une odeur semblable à la précédente, de couleur orangée, d'un goût acide accompagné d'acreté, mais moindre qu'en la troisième eau, ce qui m'a paru étonnant; car ces liqueurs devroient être de plus en plus acres à mesure qu'elles approchent de la fin de la distillation: c'est apparemment que cette dernière est plus empreinte de parties huileuses que l'autre, car l'huile adoucit & tempere l'acreté des sels. Elle a bouillonné avec les liqueurs alkalines, & elle a rougi le tournesol.

J'ai trouvé dans la cucurbite une masse très-rarefiée, legere, noire, pesant quinze onces & demie; je l'ai remise en distillation dans une cornue, & j'en ai encore tiré par un grand feu sept onces d'une liqueur rouge brune, reignant fortement les doigts en couleur orangée, d'une odeur forte de brûlé, mais qui n'est pas beaucoup désagréable, d'un goût acide, acre & piquant, & deux dragmes d'huile épaisse & noire comme de la poix, d'un goût acre. Cette acreté procede d'une portion de sel qui s'y est attachée. Le miel doit contenir beaucoup plus d'huile qu'il ne s'en est séparé par les distillations; mais il en demeure toujours une bonne partie dans les dernières liqueurs distillées: car si on les laisse reposer quelques jours, il s'en précipite un peu au fond du vaisseau, & il s'en attache aux côtes. Elle est estimée bonne pour la carie des os.

J'ai rectifié la liqueur rouge-brune dernière distillée, elle est fort claire, mais sa couleur tire un peu sur le jaune: son odeur est désagréable, & son goût a un peu diminué en acreté: C'est ce qu'on appelle Esprit ou aigre de miel rectifié.

J'ai retiré de la cornue sept onces & six dragmes d'une espece de charbon noir, rarefié, terrestre, presque insipide, mais marquant pourtant au goût, quand on l'a mâché, quelque legere impression de sel. J'en parlerai encore dans la suite.

On voit par ces distillations que trente-deux onces de miel de Narbonne rendent vingt-quatre onces & deux dragmes de liqueur. Je n'en ai à la verité tiré que vingt-deux onces & six dragmes, mais le reste s'est dissipé par les jointures des vaisseaux ; car quelque exactitude qu'on apporte dans ces operations , il s'en perd toujours.

Je ne me suis pas contenté d'avoir fait l'analyse du miel blanc le plus pur tiré de la ruche sans expression , j'ai fait celle du second miel tiré par une legere expression. Il étoit de bonne consistance, assez ferme , de couleur blanche tirant sur le jaune , d'assez bonne odeur , d'un goût agréable ; je l'ai fait distiller au même poids comme le précédent , j'en ai tiré les mêmes principes ; mais les premieres eaux m'ont semblé moins odorantes que celles du miel de Narbonne, & il y en a eu sur le total demie-once moins. Il m'est resté dans la cornuë huit onces & deux dragmes de charbon semblable au précédent , mais un peu plus noir. Cette derniere distillation fait voir que le miel pour peu qu'il ait été exprimé au sortir de la ruche , contient plus de terre que celui qui a été fait sans expression.

J'ai fait encore l'analyse du miel de Champagne ; il étoit de bonne consistance , de couleur jaune , d'une odeur fade , d'un goût moins agreable que celui des miels dont j'ai parlé. J'en ai mis trente-deux onces en distillation : les premieres eaux que j'en ai tiré ont une odeur miellée un peu plus foible que celle des précédentes ; mais les dernieres qu'on appelle Esprit de miel , m'ont paru tant soit peu plus acres , & elles ont été moins abondantes , car je n'en ai tiré en tout que vingt-deux onces & demie. J'ai trouvé dans le chapiteau après la distillation , outre une petite quantité d'huile noire & épaisse , un morceau de cire jaune pesant deux dragmes , aussi dure & aussi parfaite qu'aucune autre. Cette cire avoit passé avec le miel quand on avoit pressé les gateaux , & s'y étoit tenuë dis-soute , le feu l'a fait separer & élever avec l'esprit.

J'ai trouvé dans la cornuë après la derniere distillation neuf onces d'un charbon rarefié semblable aux précédens,

Ce miel commun de Champagne a donc contenu plus de terre que le miel blanc ; ce qui vient de l'expression plus forte qu'on en a faite au sortir de la ruche.

J'ay fait encore l'analyse du miel de Normandie ; il étoit de consistance assez ferme, de couleur jaune rougeâtre, d'une odeur & d'un goût moins agréable que les autres. J'en ay donc mis en distillation trente-deux onces, il en est sorti des liqueurs pareilles à celles que j'ay tirées du miel de Champagne, & j'ay trouvé au chapiteau un morceau de cire pesant trois dragmes : il m'est resté dans la cornuë neuf onces de charbon rarefié comme aux distillations précédentes.

J'ay ramassé tous les charbons de miel qui sont sortis des cornuës après les distillations d'ont j'ay parlé, j'en ay mêlé avec des acides les plus forts, ils n'ont point fermenté.

J'ay mis calciner à grand feu trois livres & demie ou cinquante-six onces de ces charbons de miel dans un pot de terre simple sans vernissure pendant dix heures : cette matiere s'est allumée comme le charbon ordinaire, mais elle ne s'est point reduite en cendres ; elle n'a diminué que de dix onces, & elle est restée noire & en charbon : elle a pris un goût un peu salé. J'ay versé sur une portion de cette matiere une liqueur acide, il s'y est fait effervescence. J'ay mis le reste tremper dans de l'eau pour en faire une lessive, le mélange a bouillonné comme quand on éteint de la chaux. J'ay filtré la liqueur, & je l'ay mise évaporer, il ne m'est resté qu'une dragme & demie d'un sel alkali acere & piquant au goût. Il a fermenté avec les acides, & il a troublé la dissolution du sublimé. Il est aperitif, fondant & résolutif comme les autres sels alkali fixes, lexiviels. On en peut donner jusqu'à deux scrupules à la dose.

J'ay fait secher dans une terrine qui n'étoit point vernissée la cendre ou plutôt le charbon de miel resté après la lessive, il est demeuré insipide, & il n'a plus été alkali. Jell'ay remis calciner, il a pris feu & il a rougi, mais il ne s'est point réduit en cendres, quoique le feu que j'y ay

employé ait été fort grand. Il n'est point non-plus revenu alkali, & je n'en ay pû tirer de sel par une nouvelle lessive que j'en ay faite. Je l'ay mis secher exactement comme devant, & j'ay fait sur cette matiere une experience qui m'a paru surprenante, & qui merite d'être rapportée ici.

J'ay mis sur un papier une portion de ce charbon de miel écrasé en poudre grossiere, j'en ay approché un couteau aimanté, j'ay apperçû que beaucoup des particules du charbon se sont aussi-tôt herissées, ont été attirées par le couteau, & s'y sont attachées tout de même que la limaille de fer est attirée par l'aimant & s'y attache.

Cette experience montre que le charbon de miel contient du fer; car jusqu'à present il ne nous a point paru de matiere autre que le fer qui fût attirée par l'aimant. Au reste je puis assurer que toutes mes operations sur les miels ont été faites dans des vaisseaux de terre ou de verre, sans qu'il y ait eu communication du fer, ni même d'aucun autre metal. Le charbon de miel avant qu'il eût été calciné & dépouillé de son sel, étoit aussi attiré par l'aimant; mais moins bien ou en plus petite quantité.

Cette experience confirme celles que M. Geoffroy a rapportées à la Compagnie touchant le fer qu'il assure avoir trouvé dans les cendres de differens vegetaux. Mais quoique le miel soit tiré des plantes, il a reçu tant d'élaborations différentes qu'il ne laissoit gueres lieu de soupçonner avant cette experience qu'on en pût tirer du fer.

On explique ce phenomene en deux manieres différentes. La premiere est que les racines des plantes succent un suc vitriolique ou ferrugineux dont on croit que toutes les terres sont empreintes, & que ce suc monte & se distribue par toute la plante pour sa nourriture; d'où vient, dit-on, qu'après avoir brûlé la plante, on trouve dans ses cendres le fer dont le feu a fait rassembler & rejoindre les particules.

La seconde explication ne reconnoît point de fer dans les plantes en leur état naturel; mais elle prétend que le feu par la force de son action brûlant ou calcinant les plantes,



plantes , convertit une partie de leurs cendres en fer.

L'une & l'autre explication me paroît bien difficile à comprendre ; car pour la premiere il faut non-seulement admettre que toutes les terres où croissent les plantes soient ferrugineuses : il faut concevoir que la substance pesante du fer ait été portée & élevée jusqu'au sommet de la plante , qu'elle ait servi à composer le suc le plus volatil & le plus pur des fleurs , ressemblant à une rosée que les abeilles lechent & recueillent : que cette substance ait souffert toutes les élaborations dans les mouches & dans les ruches , sans que la partie ferrugineuse s'en soit séparée : & qu'enfin cette partie ferrugineuse ait été à l'abri de toutes les tortures qu'on a données au miel dans l'analyse qu'on en a faite.

La seconde explication n'est pas moins obscure que la premiere ; car on ne se persuadera pas aisément que la seule action du feu puisse convertir le charbon de miel en fer.

Je ne sçai si au milieu de ces deux explications , il n'y auroit point lieu de soupçonner qu'il se puisse rencontrer dans la nature plusieurs matieres autres que le fer capables d'être attirées par l'aimant. C'est peut-être ce qu'un grand nombre d'experiences nous découvrira avec le temps.

Il y a deux petites reflexions à faire sur l'analyse du miel. La premiere est , que quoique le miel en son état naturel ait une faveur très-douce , il n'y a pas un de ses principes qui étant séparé ait retenu ce goût. On en tire par la distillation une eau presque insipide , beaucoup de liqueur acide qu'on appelle esprit , de l'huile , un peu de sel fixe ; mais en toutes ces substances son goût naturel ne se rencontre point , & même on a beau remêler ces principes ensemble , on n'y remettra point la douceur. Mon sentiment sur ce fait est que pour faire la douceur il faut un mélange exact d'acide & d'huile : l'huile seule est fade & passe sur la langue sans y faire d'impression , l'acide au contraire piquotte la langue ; mais quand ces deux princi-

pes sont mêlez ensemble, les pointes de l'acide sont liées par les parties rameuses de l'huile, en sorte qu'elles n'ont plus la force de faire de l'irritation sur la langue, mais elles en ont assez pour faire penetrer doucement l'huile en lui servant de vehicule, & exciter sur les nerfs du goût une agreable impression ou chatoüillement que nous appellons douceur. Ce raisonnement est confirmé par une infinité d'experiences, car de toutes les choses douces on retire de l'acide & de l'huile, & alors il n'y a plus de douceur. On fait aussi du doux en mêlant exactement un acide avec une matiere sulfureuse; car si l'on fait dissoudre le plomb qui est insipide, mais sulfureux, avec un menstrue acide, la dissolution fera douce, & l'on en fera par évaporation un sel qu'on appelle sucre de Saturne, à cause de sa grande douceur. Si ensuite l'on fait distiller ce sel de Saturne, on en retirera une liqueur acide, & il n'y aura plus de saveur sucrée. Il ne suit pourtant pas de ce raisonnement que toutes les fois qu'on mélera grossièrement une liqueur acide avec de l'huile ou avec une matiere sulfureuse, le mélange en fera doux: il faut pour faire la douceur que l'acide soit intimement & parfaitement incorporé & mêlé avec l'huile, ce qui est fait très-souvent par la nature, & quelquefois par l'art.

La seconde reflexion est que suivant toutes les apparences le miel en son état naturel ne contient aucun alkali: tout ce qui en provient par la distillation est acide. Le charbon même qu'on en retire au sortir de la cornue ne donne point de marque d'alkali, puisqu'il ne fermente point avec les acides. Et si le peu de sel fixe qu'on tire de ce charbon est alkali, ce n'est qu'après une grande & longue calcination, qui rendant la plupart des sels poreux & en chaux, les fait devenir alkali, d'acides qu'ils étoient. L'esprit de miel rectifié est aperitif; on en peut donner jusqu'à deux scrupules à la dose. On s'en sert aussi extérieurement pour faire croître les cheveux. Celui qui reste au fond de la cucurbite après la rectification, est bon pour déterger les vieux ulcères: il contient la partie la plus

àcre de la liqueur. Plusieurs Chimistes ont dit dans leurs écrits que l'esprit de miel rectifié dissolvoit l'or & plusieurs autres métaux : mais comme tout ce qui est écrit n'est pas toujours véritable, j'en ay voulu faire l'expérience. J'ay trouvé qu'effectivement ce menstreuë avoit dissout quelque legere portion de l'or, mais sans qu'on y eût apperçû aucune fermentation.

L'argent ni l'étain n'ont point été pénétrés par cet esprit : le fer en a été bien pénétré, & il s'est fait une teinture noire & vitriolique.

Le plomb en a été aussi pénétré, & le dissolvant a pris un goût doux & sucrin, ce qui marque une dissolution.

Le cuivre a donné au menstreuë une impression & une odeur de Venus, mais il ne lui a point fait changer de couleur.

Le mercure en a été pénétré, & il s'en est dissout une petite portion.



## M E T H O D E

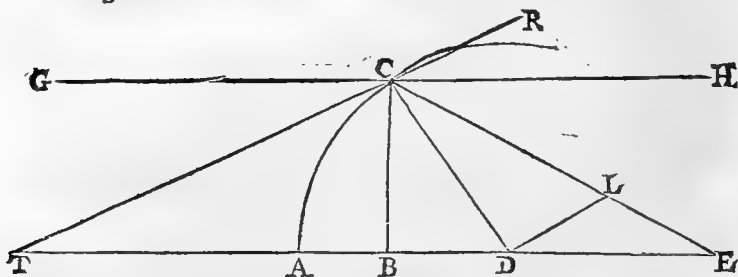
Pour trouver les foyers des Lignes Geometriques de tous les genres.

PAR M. ROLLE.

## ARTICLE PREMIER.

1706.  
21. Juillet.

Soit  $AC$  une Courbe telle qu'on voudra, & que l'on veuille trouver tous les foyers qui se forment dans son axe générateur  $AE$ .



On observera en premier lieu les lignes qui doivent servir au calcul. Ensuite l'on exprimera chacune de ces lignes par des lettres: ce qui se peut faire en cette maniere.

$AB$  abscisse quelconque dont l'appliquée  $BC$  fait un angle droit  $CBD$  avec l'axe  $AE$ , & le point  $C$  est un point pris à volonté sur la Courbe.

$CD$  est une droite perpendiculaire à la Courbe proposée, ou le rayon de la tangente au point  $C$ .

$T$  est un point donné sur l'axe  $AB$ .

$TCR$  est un rayon de lumière, ou le rayon incident, ou le rayon direct.

$CE$  est le rayon lumineux rompu en  $C$ , qui rencontre l'axe en un point  $E$ .

$DL$  parallèle au rayon incident  $TC$ .

$DCR$  ou  $TC D$  est l'angle d'incidence.

$DCE$  est l'angle rompu, ou l'angle de refraction. Ainsi l'angle rompu  $DCE$ , & l'angle d'incidence  $TC D$  ou son égal  $CDL$ , sont deux angles du triangle  $CLD$ ; & delà il est aisé de voir que le côté  $CL$  est au côté  $LD$ , comme le sinus de l'angle d'incidence au sinus de l'angle rompu.

On prendra  $m$  &  $n$  pour exprimer les rapports du sinus de l'angle d'incidence est au sinus de l'angle rompu.

$y$  pour l'expression des abscisses  $AB$ .

$x$  pour les appliquées  $BC$ .

$z$  pour la sous-perpendiculaire  $BD$ .

$t$  pour  $TA$ .  $l$  pour  $TC$ .

$v$  pour  $AE$ .  $d$  pour  $DE$ .

$h$  pour  $DL$ , & par conséquent  $\frac{mh}{n}$  pour  $CL$ .

$r$  pour  $CE$ . Ainsi l'on aura  $r - \frac{mh}{n}$  pour  $LE$ .

$s$  pour la sôutangente des  $y$ .

Cela posé, on formera toutes les égalités que fournit la figure rectiligne. Ce qui se peut faire comme on le voit ici.

$y + z + d = v$ . pour les parties de l'axe.

$s : x :: x :: z$ . Donc  $sz = xx$ . Parceque l'appliquée est moienne proportionelle entre la sôutangente & la sôu-perpendiculaire.

$ll = xx + yy + 2yt + tt$ . à cause de l'angle droit  $CBT$ .

$rr = xx + zz + 2dz + dd$ . à cause de l'angle droit  $CBE$ .

$d : h :: v + t : l$ . Donc  $ld = hv + ht$ .

$h : r - \frac{mh}{n} :: l : r$ . Donc  $rh = lr - \frac{mhl}{n}$ .

Ces deux dernieres égalités se tirent des triangles semblables  $EDL$ ,  $ETC$ : Et ces deux triangles sont semblables à cause que  $DL$  est parallele à  $TC$ .

Faisant évanouïr toutes les inconnuës hors  $l, r, t, v$ , on trouvera cette égalité:

$$mvsl - mx xl - mysl = ntsr + nxxr + ntsr.$$

Où l'on voit que  $l$  &  $r$  sont en situation réciproque, aussi bien que  $v$  &  $t$ . Ce qui servira dans la suite à faire voir que

le point *E* se peut confiderer comme un point donné, & le point *T* comme celui que l'on cherche.

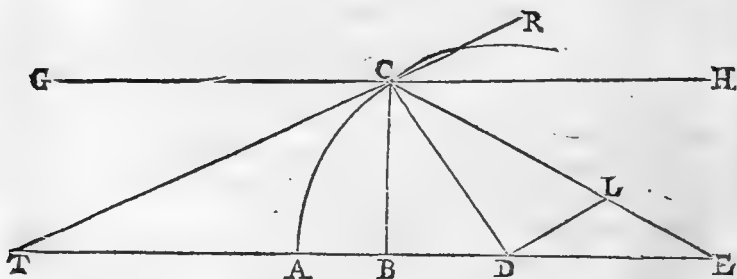
Et si l'on fait encore évanouir *l* & *r*, on aura l'égalité ou la formule quel'on voit ici en *M*.

$$M. \quad \frac{mvs - mxx - mys \times tt + 2ty + yy + xx}{= nts + nxx + nys \times vv - 2vy + yy + xx.}$$

Dans cette formule *M* la lettre *t* exprime une ligne donnée ou indéterminée, & tandis que cette ligne sera finie, les rayons *TC* feront toujours un angle oblique avec l'appliquée *CB*. Mais si l'on veut que cet angle soit droit, & que par conséquent les rayons incidens soient parallèles à l'axe; alors l'inconnue *t* deviendra infinie, & dans ce cas son premier coëfficient sera détruit dans la formule *M*, selon ce qui a été dit des premiers coëfficiens dans la methode des Questions indéterminées que je donnay au public en l'année 1699. Enforte que la formule *M* se reduira à celle que l'on voit ici en *N*.

$$N. \quad mvs - mxx - mys = nns \times vv - 2vy + yy + xx.$$

Ainsi l'égalité *N* est une formule pour le cas où les rayons sont parallèles à l'axe, comme l'égalité *M* est une formule pour les rayons qui sont obliques à l'axe, & qui partent d'un point fixe *T*.



On trouveroit encore cette formule *N* par la comparaison des lignes ou des angles, en supposant que le rayon *GC* soit parallèle à l'axe *AB*. Alors l'angle d'incidence

*GCD* seroit égal à l'angle *CDE* du triangle *CDE*; & l'on a dans le même triangle l'angle rompu *DCE* : de maniere que le côté *CE* seroit au côté *ED*, comme le sinus de l'incidence au sinus de la refraction, ou comme *m* est à *n*. Et prenant les autres égalités qui se présentent, on en tireroit d'abord la formule *N*.

Comme les foyers qui se forment des rayons parallèles sont les premiers dont on fait quelque usage, & que la formule en est simple, je la prendrai pour exemple dans la suite de ce premier Memoire.

ART. II. Si on a l'égalité generatrice d'une Courbe, & que l'on veuille trouver les foyers de cette Courbe avec les conditions que l'on a marquées dans l'article précédent, on prendra l'égalité de la sôutangente qui appartient à l'axe sur lequel sont les foyers; & comparant ces deux égalités à celles du premier Article, ou seulement à la formule qui en résulte, on en fera évanouïr toutes les inconnuës hors *x* & *v*. En quoi il faut observer de mettre au lieu de *m* & de *n* les nombres qui leur sont égaux, & il arrivera que les deux inconnuës *x* & *v* se trouveront dans la réduite; ou bien que cette réduite n'aura que la seule inconnuë *v*. Ce qui marque deux cas dans la Regle.

Si l'on prend pour exemple l'égalité generatrice marquée *P*, on aura pour la sôutangente des *y*, celle que l'on voit en *R*.

$$P. 9xx = 18ay - 5yy. \quad R. s = \frac{9xx}{9a - 5y}.$$

Et voulant trouver les foyers des rayons qui sont parallèles à l'axe des *y*, on prendra ces deux égalités avec la formule *N* de l'Article précédent pour en faire évanouïr les inconnuës *x* & *y*. En quoy il faut se souvenir de substituer les nombres qui sont égaux à *m* & à *n*, ou qui en marquent le rapport; & si l'on a *m* = 3 avec *n* = 2, comme on le fait ordinairement lorsque les rayons passent de l'air dans le verre, la réduite sera telle qu'on la voit ici en *D*.

$$D... 5vv - 18av + 9aa = 0.$$

ART. III. Lorsque l'inconnuë *v* est la seule inconnuë

de la réduite , comme dans l'exemple du précédent Article, on a autant de foyers sur l'axe proposé , qu'il se trouve de racines réelles dans cette réduite , & chacun de ces foyers est un point geometrique.

Pour trouver ces foyers il n'y a qu'à prendre sur cet axe des parties comme  $AE$  qui soient égales à ces racines.

Dans l'exemple proposé les racines de la réduite sont  $3a$  &  $\frac{1}{5}a$ . Ainsi du point  $A$  comme centre & des intervalles  $3a$  &  $\frac{1}{5}a$  , ayant décrit deux cercles , les deux points où ils coupent l'axe du côté de  $E$  , sont deux foyers de la Courbe proposée qui ont les conditions requises.

ART. IV. Si les deux inconnuës  $x$  &  $v$  se trouvent dans la réduite , on supposera que le dernier terme des  $x$  est égal à  $\theta$ . Ce qui donnera une égalité dans laquelle il n'y aura que la seule inconnuë  $v$  : Et cette égalité étant résolue , ses racines serviront à trouver les foyers qu'on demande , comme on le va dire ici.

Soit pour exemple l'égalité generatrice marquée ici en  $E$ .

$$E \dots xx = 2ay - yy.$$

On aura pour l'égalité des soutangentes celle que l'on voit ici en  $F$ .

$$F \dots s = \frac{xx}{a-y}.$$

Comparant ces deux égalités avec la formule  $N$  pour avoir les foyers des rayons qui sont parallèles à l'axe , comme on l'a dit aux Articles qui précédent , & prenant  $2m = 3n$  pour le rapport des sinus , on trouvera la réduite  $H$ .

$$\begin{aligned} H. \quad & + 64vvxx - + 25v^4 = \theta. \\ & - 128avxx - 100av^3 \\ & + 64aaxx + 46aavv \\ & \quad + 108a^3v \\ & \quad - 63a^4 \end{aligned}$$

Et supposant que le dernier terme des  $x$  soit égal à  $\theta$  , on aura l'égalité  $G$ .

$$G. \quad 25v^4 - 100av^3 + 46aavv + 108a^3v - 63a^4\theta,$$

dont les racines sont  $-a$ .  $\frac{1}{5}a$ .  $\frac{2}{5}a$ .  $\frac{3}{5}a$ .

Les



Les racines d'une égalité ainsi trouvée, sont les limites des foyers que l'on demande sur l'axe proposé  $AB$ , pour tous les rameaux de la Courbe proposée: Et comme on ne demande pas ordinairement tous ces foyers, ni même l'étendue entière d'un seul, on peut en rabatre tout ce qui ne sert point aux desseins particuliers que l'on peut avoir sur ce sujet, comme on le va dire icy.

Parmi tous ces foyers il s'en trouve d'imaginaires qui doivent être exclus, & souvent aussi il s'en trouve de négatifs qui ne répondent pas à l'intention que l'on a. Mais la methode les distingue, & cela se peut faire en cette maniere.

On disposera les racines de l'égalité  $G$  selon l'ordre de leur grandeur, comme on le voit en  $K$ .

$$K \dots -a. \frac{1}{2}a. \frac{2}{3}a. 3a.$$

Et l'on prendra d'autres grandeurs dans leurs intervalles une dans chacun, comme je l'ay dit dans la methode des indéterminées, & comme on le voit icy en  $L$ .

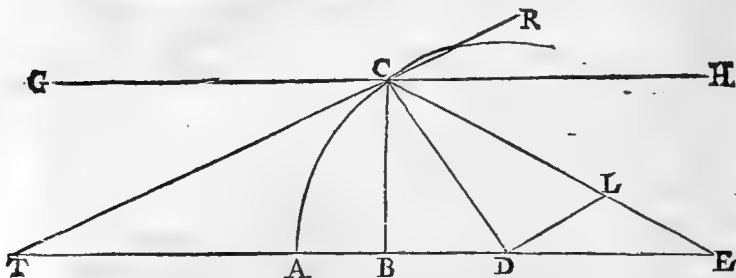
$$L \dots -2a. 0. \frac{1}{2}a. 4a.$$

Ensuite on substituera chacune de ces quantités au lieu de  $v$  dans la réduite  $H$ , pour sçavoir si elle donne des valeurs réelles ou des imaginaires pour  $x$ , dans l'égalité qui résulte de la substitution.

Si la résultante renferme des valeurs réelles de  $x$ , alors l'intervalle dans lequel aura été prise la valeur substituée sera un foyer lineaire où se vont rendre tous les rayons rompus. Ainsi l'on trouvera que l'intervalle de  $-a$  à  $\frac{1}{2}a$  est un foyer, & que l'intervalle de  $\frac{1}{2}a$  à  $3a$  est encore un foyer de la Courbe proposée sur l'axe proposé: parceque la substitution de  $0$  & celle de  $2a$  qui ont été prises dans ces intervalles donnent des valeurs réelles pour l'inconnue  $x$ .

Mais il peut arriver que parmi ces foyers il y en ait quelques-uns qui n'ont pas toutes les conditions que l'on y a désirées; auquel cas on peut toujours s'en assurer par le calcul. Car toutes ces conditions doivent être exprimées par des égalités dans le Problème rectiligne, com

me on l'a fait ici art. 1. & 2 De maniere que ce Problème étant pleinement résolu, il sera facile de voir si tous les segmens de la Figure sont tels qu'on les a supposés ou qu'on les desire. Quelquefois une partie de ces conditions suffiroit pour exclure les foyers qui ne conviennent pas, ou bien pour s'assurer de ceux qui conviennent. Par exemple, dans l'hypothese que l'action de la lumiere se fait de *G* en *C*, il faut que les foyers soient dans l'axe positif *AB*, & delà on voit que le foyer qui a pour limites — *a* &  $\frac{1}{3}a$  ne peut pas satisfaire à cette condition.



Mais delà on peut voir aussi que le foyer renferme entre  $\frac{1}{3}a$  &  $3a$  est un foyer lineaire qui a toutes les conditions que l'on y a demandées.

Cette methode est generale pour les lignes geometriques de tous les genres; mais elle suppose d'autres methodes que j'ay données au public: comme on le verra dans les Remarques suivantes.

#### REMARQUES.

*Premiere.* Souvent il arrive que l'égalité proposée fournit différentes Courbes, ou une Courbe composée de différents rameaux, & il est certain que tous ces rameaux ne peuvent pas également convenir aux différents desseins que l'on peut avoir sur la fabrique & sur l'usage des verres. Ainsi il est comme nécessaire pour cette raison & pour d'autres raisons encore, de connoître les contours de tous ces rameaux & leur différente situation à l'égard de l'axe

generateur, & de l'origine qui leur est commune. Ce qui se peut faire par le moyen de la Methode que je donnay au public en l'année 1699 pour la résolution des Questions indéterminées, selon ce qui en a été dit dans les Memoires de l'Academie de l'année 1702 pag. 174, & de l'année 1703 pag. 132.

*Seconde.* Dans l'hypothese que les foyers doivent être placés sur l'axe, il est évident qu'en plusieurs occasions il faudroit le transférer, & par consequent transformer l'égalité generatrice. Cela se peut faire en general par le moyen des formules que j'ay données pour ces transpositions d'axes dans le Journal du 13 Avril 1702 pag. 745, ou bien par des voies particulieres qui sont ordinaires, & qui peuvent quelquefois suffire dans cette occasion.

On peut chercher les foyers dans le plan de la Courbe sans faire cette transposition d'axes, ni par consequent transformer l'égalité proposée; & même on le peut faire lorsque les rayons viennent d'un point donné hors de l'axe dans le même plan. Alors il faudroit faire des additions & d'autres changemens dans le Problème rectiligne: ce qui augmenteroit le calcul, mais il n'y auroit d'ailleurs aucune difficulté considerable.

*Troisième.* Les réduites telles que  $H$  du second exemple produisent des Courbes dont les axes sont les foyers des Courbes proposées; ensorte que ces axes sont Caustiques, & même leurs Courbes le sont aussi. Ainsi la réduite  $H$  fournit deux feuilles égales & semblables, dont les axes limités sont deux foyers lineaires de la proposée  $E$ , & l'on peut dire que ces feuilles sont plus ou moins ardentés, selon que leurs parties sont plus ou moins proches de l'axe, & selon que les parties de cet axe sont plus ou moins embrasées.

*Quatrième.* Les *maxima* & les *minima* de la réduite servent à distinguer dans chacun des foyers que fournit la methode, toutes les parties qui conviennent aux differens rameaux de de la Courbe proposée. Ainsi dans le dernier exemple les *maxima* de  $x$  pris dans la réduite divisent

chaque foyer en deux parties, dont l'une appartient au demi cercle qui presente sa convexité aux rayons lumineux, l'autre partie de ce foyer appartient au demi-cercle qui reçoit ces rayons dans sa concavité. Mais dans cette seconde partie il faut supposer que la refraction se change en une espece de reflexion, de maniere que l'incidence soit à cette reflexion comme  $m$  à  $n$ , ou bien que la refraction dans ce demi-cercle ne dirige point les rayons lumineux du côté de l'axe, & que par consequent il faut retrancher du foyer tout ce superflu pour satisfaire aux dessein que l'on s'est proposé. Ainsi ayant trouvé que le foyer positif est l'intervale de  $\frac{2}{3}a$  à  $3a$  pour le cercle entier, on trouvera  $2a - \frac{2a}{\sqrt{5}}$  pour ce qui appartient au premier demi-cercle dans lequel les fractions ont les conditions requises, & le reste  $\frac{2a}{\sqrt{5}} - \frac{2}{3}a$  qui appartiendrait au second demi-cercle pourra être rejeté.

*Cinquième.* Par le moïen d'une réduite telle que  $H$ , on peut trouver les parties de la Courbe proposée qui conviennent à un foyer dont la longueur est donnée, & par consequent trouver le diametre du verre qui convient à ce foyer donné. On peut encore par la même réduite trouver la longueur du foyer qui convient à une portion donnée de cette Courbe, & par consequent à un verre dont le diametre est donné dans tous les cas possibles. Ce qui est évident, puisque des deux inconnuës de cette réduite, l'une exprime la longueur du foyer, & l'autre la hauteur du verre.

On n'a envisagé dans la methode & dans ces remarques que la superficie du verre, ne voïant pas qu'il y ait de la difficulté quand il faut avoir égard à son épaisseur, ni quand il faut se servir de plusieurs verres, lorsque l'on a une methode pour la surface d'un verre quelconque.

*Sixième.* J'ay dit dans le second article de la methode de substituer les valeurs de  $m$  & de  $n$ , & il étoit bon de le dire pour mieux faire voir comment le troisieme article est distingué du quatrieme article. Mais il y a des égali-

tés, quoique conçûs en termes generaux, où il ne seroit pas necessaire de faire cette substitution en y appliquant le troisiéme article, & on le verroit si l'on prenoit pour exemple l'égalité marquée icy en r.

$$r \dots m m x x = 2 a m m y + n n y y - m m y y.$$

On s'appercevroit d'abord, en y appliquant les trois premiers articles, que l'inconnuë  $x$  s'évanouït par elle-même, sans qu'il soit necessaire de déterminer  $m$  ni  $n$ . On verroit aussi qu'il ne demeure dans la réduite que la seule inconnuë  $v$ : que par consequent tous les foyers sont des points geometriques, & que l'on a toujours  $v = \frac{a m}{m + n}$  pour les trouver, lorsque les rayons sont paralleles à l'axe.

*Septième.* La methode que je viens de proposer étant bien conçûe, il sera facile de l'appliquer aux égalités dont les coëfficiens sont indéterminés, & de former son inverse par le moïen de la methode des indéterminées dont j'ay parlé dans la premiere remarque. Il y a des exemples neanmoins où cette methode ne seroit pas necessaire, comme on le va voir icy.

Soit pour exemple l'égalité marquée  $V$ ,

$$V \dots b x x = 2 a b y + y y.$$

Et qu'on veüille y appliquer la Regle que j'ay donnée icy pour trouver sur l'axe des  $y$  les foyers de toutes les Courbes que fournit cette égalité, on aura d'abord  $s = \frac{b x x}{a b + c y}$  pour les sôutangentes.

Ces deux égalités étant comparées à la formule  $N$  du premier article pour faire évanouïr les inconnuës, on trouvera, après que  $s$  & le carré  $yy$  auront disparu, la résultante que l'on voit icy en S.

$$\begin{aligned} S \dots & + c n n b x x - 2 n n b c v y + n n b c v v = 0. \\ & + n n b b x x + 2 m m b c v y - m m b c v v \\ & - m m b b x x + 2 m m b c v y + 2 m m a b c v \\ & - 2 b c m m x x - 2 a n a b b y - m m a a b c \\ & - m m c c x x + 2 m m a b b y \\ & + 2 m m a b c y \end{aligned}$$

Où l'inconnuë y se trouve encore Ainsi il faudroit pour-  
suivre son évanouissement pour avoir une réduite dans  
laquelle il n'y eût que  $x$  &  $v$  comme au quatrième article.  
Mais si l'on ne veut que le cas du troisième article, il n'y  
a qu'à distribuer tous les monomes de cette égalité hors  
ceux dont  $v$  est la seule inconnuë, & ceux aussi qui ne ren-  
ferment aucune des inconnuës, pour en former un pro-  
blème auxiliaire comme on l'a fait dans l'inverse gene-  
rale des tangentes, & comme on le voit icy en C.

$$C. \begin{cases} +nnch + nnbb - mmbb - 2mmbc - mmcc = \text{pour les } xx. \\ -2nnbc + 2mmbc + 2mmcc = 0. \dots \text{pour les } vy. \\ -2nnabb + 2mmaabb + 2mmaabc = 0. \text{ pour les } y. \end{cases}$$

Prenant  $a, b, c$ , pour les inconnuës du problème auxiliai-  
re qu'expriment ces trois égalités, on trouvera d'abord

$c = \frac{nnb - mmb}{mm}$  qui résout entierement ce problème; &  
substituant cette valeur de  $c$  dans  $S$ , cette égalité  $S$  aura  
la forme que l'on voit ici en A.

$$A \dots nnbcvv - mmbcvv + 2ammbev - mmbcaa = 0.$$

Dans laquelle on trouve  $v = \frac{am}{m \pm n}$  qui donne sur l'axe  
des  $y$  tous les foyers des Courbes proposées qui sont des  
points geometriques. Et substituant aussi la valeur de  $c$   
dans la proposée  $V$ , on aura la résultante qui est marquée  
 $T$  dans la sixième Remarque. Ensorte que cette égalité  $T$   
renferme toutes les Courbes du premier genre dont les  
foyers sont des points geometriques sur l'axe des  $y$ , & delà  
aussi on voit que les valeurs de  $v$  prises dans  $D$  donnent  
tous ces foyers.

Mais pour l'universalité de methode il faut poursui-  
vre l'évanouissement de  $y$  jusqu'à ce qu'il ait entierement  
disparu, & supposer que le dernier terme des  $x$  est égal  
à 0, comme on l'a dit au quatrième article de la metho-  
de; de maniere que l'égalité ainsi formée n'aura que la  
seul inconnuë  $v$ .

Comme cette égalité se résout entierement par la di-  
vision, il n'est pas necessaire d'y appliquer la methode des  
indéterminées pour tirer avantage de l'indétermination,

& même l'on trouvera que les racines ne sont pas fort composées. Car ces racines sont comme on les voit icy en *E*.

$$E. \begin{cases} v = \frac{am}{m+n} & v = \frac{acm + 2abm + 2abn}{-cm - cn} \\ v = \frac{am}{m-n} & v = \frac{acm + abm - 2abn}{cn - cm} \end{cases}$$

Ensorte que ces quatre valeurs de *v* donnent tous les foyers de toutes les Courbes du premier genre sur l'axe proposé, soit que ces foyers soient des points geometriques, ou qu'ils soient lineaires.

Si l'on veut les foyers du cercle, il est évident que dans ce cas l'égalité proposée en *V* devient  $xx = 2ay - yy$ , & que par conséquent il faut faire  $b = -c$  pour substituer cette valeur de *b* dans les formules. Ce qui donne

$$v = \frac{am}{m+n}, \text{ \& } v = \frac{am - 2an}{m-n} \text{ pour les foyers du cercle.}$$

Pour la parabole on aura  $c = 0$ , & par conséquent  $v = \frac{am}{m+n}$  &  $v = \infty$  pour ces foyers.

On aura les foyers de l'hyperbole en prenant un nombre positif pour  $\frac{c}{b}$ , & l'on trouvera ceux de l'Ellipse si l'on prend pour  $\frac{c}{b}$  un nombre negatif plus grand ou plus petit que l'unité; ensorte que la substitution de ces valeurs dans *E* donnera les foyers sur l'axe proposé, & que la substitution de ces valeurs dans l'égalité *V* déterminera l'espece des hyperboles & des Ellipses auxquelles ces foyers conviennent.

Jusques-icy j'ay pris le mot de foyers selon l'idée la plus ordinaire des Geometres, & selon cette idée l'on peut voir que toutes les Courbes ont des foyers finis ou infinis.



## PRINCIPES GENERAUX

## POUR LA RESOLUTION

## DES EQUATIONS NUMERIQUES.

PAR M. DE LAGNY.

## SECONDE PARTIE.

*La première  
Partie est  
dans les Mé-  
moires de  
l'Académie  
de l'année  
1705. page  
177.*

1706.  
21. Juillet.

**R**ésoudre une équation numérique, c'est trouver la valeur ou les valeurs de l'inconnue en nombres entiers lorsque cette valeur ou ces valeurs sont rationnelles, & les trouver à moins d'une unité près, lorsqu'elles sont irrationnelles.

Je suppose ces équations sans incommensurables & sans fractions, parce qu'il est toujours aisé de leur donner cette forme par les règles ordinaires.

Résolution régulière est celle qui se fait par une méthode réglée universelle & infaillible. Cette méthode est d'autant plus parfaite qu'elle est plus courte & plus simple. C'est pourquoy, si par une certaine méthode je trouve le nombre cherché deux ou trois fois plutôt que par une autre, la première méthode est deux ou trois fois plus parfaite ou meilleure que la seconde.

De quelque méthode qu'on se serve, on ne peut trouver que par parties & l'une après l'autre le nombre cherché, lorsqu'il est grand. J'appelle ces parties, le premier, le second, le troisième, &c. membre de la racine. Ainsi dans l'extraction des racines quarrées, cubiques, &c. suivant l'expression ordinaire des chiffres fondée sur la progression décuple, si la racine cherchée est par exemple 8673, on trouve d'abord le premier chiffre, 8, c'est-à-dire le premier membre, 8000; & par le moyen de celui-ci on trouve le second, 6 ou 600; & par la somme de ces deux premiers membres 86 ou 8600 considérés comme un seul membre,



on trouvera le troisième, 7 ou 70 ; enfin par la somme des trois premiers membres trouvés, 867 ou 8670 considéré comme un seul membre, on trouve le quatrième & dernier membre 3, ce qui donne la racine entière cherchée, 8673.

Comme ces regles sont fondées sur le choix arbitraire, ou plutôt capricieux, de la progression décuple, elles se sentent de ce défaut, & elles ne peuvent être aussi parfaites que des regles fondées uniquement sur la raison & la nature même des équations indépendamment de toute expression arbitraire. Le premier & le plus grand défaut de toutes les methodes qu'on a données jusqu'à présent est le tatonnement. Rien ne fatigue & ne rebute tant que de travailler à l'aveugle ; & quoique le nombre des tatonnemens soit réglé, il est constant par l'expérience de tous ceux qui se mêlent de calcul, qu'il y a un espee de chagrin & d'affliction d'esprit inséparables du mauvais succès de l'operation, lorsqu'après avoir suivi exactement les regles on trouve qu'on a pris trop ou trop peu, & qu'il faut recommencer le calcul tout de nouveau. C'est, pour ainsi dire, se tromper avec art & methode : toute operation où il entre du tatonnement est indigne du nom d'operation mathematique ou scientifique. On n'a, pour s'en convaincre, qu'à comparer les operations geometriques à celles de l'Arithmetique ordinaire. Que penseroit-on de la résolution d'un problème geometrique, où il faudroit tatonner & recommencer plusieurs fois la même operation avant que d'être assuré qu'on eût bien operé ? Je fais également abstraction des erreurs de fait, & je ne parle que de celles qui sont essentielles à la methode.

Le principal avantage de mes logarithmes est d'exclure absolument tout tatonnement des operations arithmetiques, c'est-à-dire, de la division & de l'extraction des racines qui y sont essentiellement sujettes dans l'Arithmetique ordinaire, & le principal avantage de ma nouvelle methode de résoudre les équations est aussi d'en exclure tout tatonnement.

Il faut remarquer qu'au lieu d'une espece de tatonnement qui se trouve dans la division ordinaire, il y en a plusieurs espees plus difficiles & plus embarrassantes dans l'extraction des racines, à mesure qu'on les tire d'une puissance plus élevée, ou que l'équation est composée d'un plus grand nombre de termes affectés de signes differens.

Dans l'extraction de la racine quarrée, outre les tatonnemens essentiels à la division, il y en a une nouvelle espece de plus, parceque le diviseur qui devoit & qui ne peut pas être  $2a + b$ , car c'est  $b$  qu'on cherche, est seulement  $2a + 1$ ; ainsi il ne suffit pas de trouver par les tatonnemens ordinaires de la division le plus grand quotient qui multiplié par  $2a + 1$  produise  $2ab + b$ , tel que ce produit puisse être ôté du dividende correspondant, il faut qu'on en puisse ôter  $2ab + bb$ . Je suppose  $b$  plus grand que 1.

Dans l'extraction de la racine cubique le diviseur devoit & ne peut pas être  $3aa + 3ab + bb$ , parceque c'est  $b$  qu'on cherche, & on ne peut prendre universellement pour diviseur que  $3aa + 3a + 1$ ; c'est pourquoi le tatonnement est plus grand que dans la racine quarrée: car il ne suffit pas de pouvoir ôter du dividende  $3aab + 3ab + 1b$ , il faut en pouvoir ôter  $3aab + 3abb + b^3$ , ainsi du reste. Je suppose toujours  $b$  plus grand que 1.

En un mot dans l'extraction des racines le diviseur est toujours trop petit & imparfait, & d'autant plus imparfait que la racine cherchée est celle d'une puissance plus élevée.

C'est encore toute autre chose dans l'extraction numerique des racines des équations composées. Car le grand nombre des termes, le rapport different des coefficients, & le melange des signes  $+$  &  $-$  qui se détruisent en partie, cause necessairement une très-grande incertitude dans les operations, & les tatonnemens s'y trouvent en plus grand nombre, plus pénibles, plus rebutans & plus sujets à erreur.

Le second défaut des anciennes methodes vient du

choix arbitraire de la progression décuple, qui fixe le rapport du premier membre d'une racine cherchée au second, & celui du second au troisième, & ainsi de suite sans aucune raison & contre la nature de l'équation; ce qui rend en general la résolution plus longue & plus imparfaite.

Comme il s'agit de détruire un préjugé également ancien & general, je vais tâcher de rendre sensible ce défaut dont personne, que je sache, ne s'est aperçu.

Je suppose qu'on veuille trouver le rapport du rayon au côté de l'octodecagone. J'appelle le rayon  $a$  & le côté  $x$ , j'aurai cette équation à résoudre,

$$x^3 = 3ax - a^3.$$

Et supposant le rayon  $a = 100000.000$ , j'aurai cette équation numerique,

$$x^3 = 300000.00000.00000.0x - 100000000.00000000.$$

Ou pour abréger l'expression,

$$x^3 = 30^{16}x - 10^{24}.$$

[00000000.]

Il faut trouver la petite valeur d' $x$ .

Si l'on suit les methodes ordinaires de Viète, d'Harriot, d'Oughtred, &c. on trouvera  $x = 34729.635$ .

La première operation donnera le premier chiffre 3, & celui-ci par une seconde operation plus longue que la première donnera le second chiffre 4. Ces deux joints ensemble & faisant 34 donneront par une troisième operation beaucoup plus longue que la seconde le troisième chiffre 7, & ces trois joints ensemble faisant 347 donneront par une quatrième operation incomparablement plus longue que les trois autres le quatrième chiffre 2, & ainsi de suite; en sorte qu'il y a toujours autant d'operations à faire que de chiffres à trouver dans la racine, & que la difficulté de les trouver augmente continuellement à chaque operation.

Mais suivant ma methode on trouvera,

$$\text{Pour premier membre } \frac{1}{1} a = 33333.333 \frac{1}{2}$$

$$\text{Pour le second } \frac{1}{71} a = 1388.888 \frac{1}{9}$$

$$\text{Pour le troisième } \frac{1}{284744} a = \dots 7.413 \frac{1}{10}$$

$$\text{Somme } \dots = 34729.635 \frac{1}{10}$$

P p ij

Il est évident que cette dernière méthode est incomparablement plus abrégée que la première.

Le troisième défaut est d'exprimer les valeurs des racines des équations numériques par des formules irrationnelles qui sont ou tout-à-fait inutiles, n'étant qu'une pure pétition de principe, ou qui donnent des valeurs de l'inconnue plus obscures & plus intelligibles après cette prétendue résolution qu'auparavant.

Si l'on demande la valeur de  $x$  dans l'équation  $xx = 7056$  & qu'on réponde,  $x$  est égal à la racine quarrée de 7056.  $x = \sqrt{7056}$ , c'est certainement très-mal répondre ; car c'est une pure pétition de principe, & je n'en suis pas plus avancé : il faut répondre,  $x$  est égal à 84, & si l'équation eût été  $xx = 7200$ , il auroit fallu répondre  $x$  est irrationnelle & sa valeur est entre 84 & 85. Il est vrai qu'il faut encore pouvoir approcher à l'infini de la véritable valeur en fractions ; car une équation numérique n'est parfaitement résolue que lorsqu'on donne toutes les valeurs possibles rationnelles en nombres, & qu'on peut approcher à l'infini des valeurs irrationnelles ; tout le reste est chimérique.

Soit l'équation du second degré  $xx + 54876x = 384181$ . si l'on répond suivant la formule irrationnelle ordinaire  $xx + ax = bb$  qui donne  $x = \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} - \frac{1}{2}a$  ; si, dis-je, l'on répond  $x = \sqrt{753.228.025} - 27438$ , on aura très-mal répondu & très-mal opéré, car la racine est 7 ; & au lieu du grand & pénible détour qu'il faut prendre suivant la formule, je n'ai qu'à comparer le coefficient de  $x$  qui est 54876 comme diviseur à l'homogène de comparaison, 384181, je vois qu'en 38 qui sont les deux premiers chiffres du dividende 5 premier chiffre du diviseur y est 7 fois, & je me détermine à prendre 7, parce que comptant les chiffres du coefficient comme côté, & ceux de l'homogène comme plan, je trouve cinq tranches dans le premier, & trois seulement dans le second, ce qui marque que le coefficient est le terme dominant, & dans tous les cas semblables on peut & on doit opérer de même. Après avoir trou-

vé 7 je le multiplie par le coefficient, 54876, & j'ajoute au produit qui est 384132 le quarré de 7 qui est 49, & la somme 384181 se trouve égale à l'homogene de comparaison ; & s'il se fût trouvé un peu plus grand ou plus petit d'un nombre moindre que le coefficient, la racine auroit été irrationnelle, & on auroit pû approcher à l'infini de sa valeur suivant les methodes que j'ai données dans mon Traité de l'Extraction & de l'Aproximation des racines.

Cette remarque du terme *dominant* qui fait regarder  $xx$  comme nul, abrege l'operation indéfiniment ; enforte qu'on résoudra dans un moment une équation qu'on ne pourroit pas résoudre par les formules ordinaires dans un jour entier de calcul. Car il est aisé de comprendre que quelque petite que soit la valeur cherchée, elle peut être multipliée par un nombre indéfiniment grand, & le produit augmenté ou diminué du quarré de cette même valeur sera égal à un homogene indéfiniment grand, ce qui demande suivant la formule une suite d'operations indéfiniment longues ; ce qu'on évitera par le moyen de cette remarque qui s'applique également à la formule  $-xx + ax = bb$ .

Ceci paroît encore plus sensiblement dans la troisiéme formule  $xx - ax = bb$  ; car lorsqu' $ax$  est le terme dominant, il n'y a qu'à supposer  $x = a + \frac{bb}{a}$ . Par exemple, soit l'équation proposée  $xx - 54876x = 384181$ , il n'y a qu'à supposer  $x = 54876 + \frac{384181}{54876} \{ 7 \text{ ou } 54883 ; \text{ \& lorsqu'}$   $bb$  est plus petit que  $a$ , il n'y a qu'à supposer  $bb$  nul, & l'on aura  $x$  égal à  $a$  pour valeur approchée.

Lorsque l'homogene au contraire est le terme dominant, on peut negliger le coefficient, & ne faire qu'une simple extraction de racine de l'homogene.

L'on ne doit donc se servir de la methode ordinaire que lorsqu'il n'y a aucun terme qui domine sensiblement, encore y auroit-il beaucoup d'autres remarques à faire pour trouver la valeur ou les deux valeurs cherchées le plus promptement qu'il soit possible dans chaque cas.

Mais dans les équations du second degré si le chemin qu'on tient en suivant les formules est souvent trop long & trop pénible, on a du moins l'avantage d'être assuré qu'on arrivera au but. C'est ce qui ne se trouve pas dans les équations du troisième & du quatrième degré, dont la plus grande partie est absolument inexprimable, & le reste est exprimé d'une manière si obscure & si embarrassée, qu'il vaudroit beaucoup mieux laisser l'équation dans l'état où elle est proposée, que de la résoudre de cette manière. Je dis que la plus grande partie est absolument inexprimable, parce que toute expression où il entre des nombres imaginaires, chimeriques & contradictoires doit passer pour nulle, puisqu'elle ne peut servir à trouver la valeur cherchée de la racine; & il faut remarquer qu'on ne tombe dans ces imaginaires que par le mauvais choix qu'on fait d'un terme non dominant comme s'il étoit dominant, & qu'il dût servir principalement à trouver la racine, au lieu qu'on auroit dû s'attacher à un autre terme. C'est ce que je vais tâcher d'expliquer à fonds.

On peut réduire aux trois formules suivantes toutes les équations du troisième degré.

$$x^3 = ax + b$$

$$x^3 = ax - b$$

$$x^3 = -ax + b$$

Je n'examine pas ici si cette réduction est le meilleur & le plus court chemin pour résoudre ces équations; car ce qui est le plus simple & le plus commode à retenir pour le Lecteur, ou le plus aisé à traiter pour l'Auteur, n'est pas toujours le plus facile pour le Calculateur. C'est pourtant ce qu'on devroit avoir uniquement en vûe.

Dans la première formule  $x^3 = ax + b$  le nombre des équations qu'on peut former en entier sur une même valeur est déterminé. Par exemple, si je suppose  $x$  égal à 100, je pourrai former toutes les équations suivantes, à commencer par  $x^3 = 0x + 1000000$  exclusivement,

$$x^3 = 1x + 999.900$$

$$x^3 = 2x + 999.800$$

$$x^3 = 3x + 999.700$$

$$\&c. = \&c. + \&c.$$

Première Epoque.  $x^3 = 300x + 970.000$

$$x^3 = 301x + 969.900$$

$$x^3 = 302x + 969.800$$

$$\&c. = \&c. + \&c.$$

Seconde Epoque.  $x^3 = 7500x + 250000$

$$x^3 = 7501x + 249.900$$

$$x^3 = 7502x + 249.800$$

$$\&c. = \&c. + \&c.$$

Troisième Epoque.  $x^3 = 9800x + 20000$

$$x^3 = 9801x + 19900$$

$$x^3 = 9802x + 19800$$

$$\&c. = \&c. + \&c.$$

& finir par  $x^3 = 10000x + 0$  exclusivement.

Le nombre des équations possibles est donc égal au quar-  
ré de l'inconnue moins un.

L'homogene de comparaison est le terme dominant de-  
puis  $x^3 = 1x + 999900$  jusqu'à  $x^3 = 7500x + 250000$ , &  
il est tellement dominant que jusqu'à  $x^3 = 300x + 970000$   
qui est la première Epoque, c'est-à-dire jusqu'à ce que le  
coëfficient soit triple de la racine, il suffit de tirer la raci-  
ne cubique prochainement plus grande de cet homogene  
pour avoir la valeur cherchée. Ainsi pour résoudre cette  
équation  $x^3 = 200x + 980.000$  je neglige  $200x$ , & je ti-  
re simplement la racine cubique de  $980000$  prochaine-  
ment plus grande, & c'est 100.

Dans l'équation  $x^3 = 7500x + 250000$  qui est la secon-  
de Epoque, & où le coëfficient est égal au trois quarts du  
quarré de la racine, & l'homogene égal au quart du cube  
de cette même racine : ces deux termes dominent dans  
une parfaite égalité, ou plutôt aucun des deux ne domi-  
ne, & l'on peut également trouver la racine ou par l'ex-  
traction de la racine quarrée des quatre tiers du coëfficient,  
ou par l'extraction de la racine cubique du quadruple de  
l'homogene. Jusques-là le cas est reductible suivant la for-  
mule de Tartalea  $x^3 = ax + b$ .

$$\text{Donc } x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}bb - \frac{1}{27}a^3}}$$

Mais cette formule a deux ou trois défauts: Le premier d'engager inutilement à plusieurs extractions de racines quarrées & cubiques, lorsqu'on peut en plusieurs cas ne faire qu'une seule extraction de racine cubique, comme je viens de le faire voir dans l'équation  $x^3 = 200x + 980000$ .

Le second de donner sous une formule irrationnelle des valeurs rationnelles, ce qui oblige après un long calcul de vérifier par la substitution si la racine rationnelle trouvée est exacte, & ce défaut ne se trouve pas dans le second degré.

Le troisième défaut est que l'expression de la racine est si peu naturelle, si obscure & si envelopée, qu'elle est en quelque maniere connue plus distinctement dans l'équation même avant qu'après sa résolution.

En effet soit l'équation  $x^3 = 6x + 464$ , dont la racine 8 est exprimée suivant la formule par  $\sqrt[3]{232} + \sqrt[3]{53816} + \sqrt[3]{232} - \sqrt[3]{53816}$ . Je dis & je soutiens que tout esprit attentif & libre de préjugés, apperçoit plus clairement ou plutôt moins confusément la valeur de l'inconnue  $x = 8$  dans l'équation  $x^3 = 6x + 464$  que dans la formule  $x = \sqrt[3]{232} + \sqrt[3]{53816} + \sqrt[3]{232} - \sqrt[3]{53816}$ ; car dans l'équation il ne s'agit que de trouver un nombre dont le cube soit égal à 464 plus six fois sa racine, au lieu que suivant la formule il faut trouver, 1°. Un nombre dont le quarré soit égal à 53816, c'est-à-dire qu'il faut tirer la racine quarrée de ce nombre, ce qui ne se peut faire exactement dans cet exemple. 2°. Il faut après avoir ajouté la racine trouvée à 232, trouver un second nombre dont le cube soit égal à cette somme. 3°. Après avoir ôté cette même racine de 232, il faut trouver un troisième nombre dont le cube soit égal à la différence, & la somme de ces deux derniers nombres fera la racine cherchée. Voilà donc trois nombres inconnus à trouver dans la formule, au lieu d'un



d'un seul qu'il faut trouver dans l'équation : encore est-il impossible de trouver exactement aucun de ces trois nombres dès que le premier  $33816$  ou en general  $\frac{1}{4}bb = \frac{1}{7}a^3$  n'est pas un quarré parfait. Or j'ai démontré dans mes Elemens d'Algebre que ce quarré n'étoit parfait qu'en autant d'équations que la moitié de la racine contient d'unités, c'est-à-dire, que si la racine est 8 comme dans l'exemple ci-dessus, il n'y a que quatre équations où la formule donne la valeur cherchée après une extraction de racine quarrée, une addition, une extraction de racine cubique, une soustraction, une seconde extraction de racine cubique & une addition ; & pour parvenir à cette formule il faut prendre la moitié d'un nombre, la quarrer, prendre le tiers d'un autre nombre & le cuber, & soustraire ce cube du quarré ; ce qui fait en tout onze opérations dans le cas le plus favorable. Or le nombre des équations possibles étant  $xx - 1$ , & celui des équations où la formule donne la valeur cherchée sans déguisement étant seulement  $\frac{1}{2}x$  lorsque le nombre cherché est pair, ou  $\frac{1}{2}x - 1$  lorsqu'il est impair ; il est évident qu'il y a une infinité plus de cas où la formule donne la valeur de la racine déguisée, qu'il n'y en a où elle la donne pure & simple telle qu'elle est. Car  $\frac{1}{2}x$  ou  $\frac{1}{2}x - 1$  est un infiniment ou indéfiniment petit par rapport à  $xx - 1$ . Mais, dira-t-on, quelque déguisée ou envelopée que soit la valeur de la racine elle est exacte & tout y est connu, au lieu que dans l'équation le rapport de la racine ou de son cube à un nombre donné n'est pas immédiatement connu, & ce rapport est mêlé & composé avec le rapport du coefficient multiplié par la racine même. Je répons,

1°. Que c'est une erreur & un préjugé de croire que la racine est connue lorsqu'on en connoît le quarré, le cube ou telle autre puissance qu'on voudra. On ne connoît cette racine qu'après l'extraction faite, & il y a une infinité de cas où cette extraction est imparfaite.

2°. Je conviens que cette équation  $x^3 = 464$  est plus simple & plus aisée à résoudre que celle  $ccix^3 6x + 464$ .

Mais cette dernière toute seule, quoiqu'affectée d'un terme moien, me paroît plus simple, plus connue, ou pour ainsi dire plus connoissable que ces trois-ci jointes ensemble  $xy = 53816$ ,  $z^2 = 232 + y$ , &  $u^3 = 232 = y$ ; d'où résulte  $x = z + u$  suivant la formule, ou si l'on veut  $x = 2t$ , &  $t^2 + 3rrt = 232$ , &  $r^3 + 3rrr = \sqrt{53816}$ .

Depuis la seconde Epoque  $x^3 = 7500x + 250000$  jusqu'au dernier cas  $x^3 = 10000x + 0$  exclusivement, c'est ce qu'on appelle le cas irréductible, parce qu'il ne peut pas être résolu suivant la formule de Tartalea: le terme dominant est le coefficient, & il est tellement dominant depuis la troisième Epoque  $x^3 = 9800x + 20000$ , qu'on peut absolument négliger l'homogene de comparaison, & tirer simplement la racine quarrée approchée du coefficient pour avoir la racine cherchée en y ajoutant une unité. Cette Epoque commence à l'endroit où l'homogene de comparaison est égal au double du quarré de la racine, & le coefficient égal au quarré de cette racine moins le double de cette même racine; ainsi pour résoudre cette équation  $x^3 = 9801x + 19900$ , je tire la racine quarrée de 9801, comme si j'avois seulement  $x^3 = 9801x$  ou  $xx = 9801$ , la racine est 99 que j'augmente d'une unité, la somme 100 est la racine cherchée.

Je donnerai la methode generale de résoudre toutes ces équations, & principalement celles qui sont comprises entre la seconde & la troisième Epoque qui sont les seules difficiles.

Dans la seconde formule  $x^3 = ax - b$ , supposant toujours  $x = 100$ , on peut former cette suite infinie d'équations, à commencer par  $x^3 = 10000x - 0$  exclusivement.

$$x^3 = 10001x - 100$$

$$x^3 = 10002x - 200$$

$$\&c. = \&c. - \&c.$$

Première Epoque.  $x^3 = 10200x - 20000$

$$x^3 = 10201x - 20100$$

$$x^3 = 10202x - 20200$$

$$\&c. = \&c. - \&c.$$

où la racine quarrée du coefficient commence à être plus grande d'une unité que la racine cherchée.

Seconde Epoque.  $x^3 = 30000x - 2000000$ . Point de partage où le coefficient 30000 est le triple du carré de la racine, après quoi il devient la plus petite.

Troisième Epoque.  $x^3 = 30300x - 2030000$ . Où le coefficient surpasse le triple du carré du triple de la racine, & où les deux valeurs commencent immédiatement après à se surpasser d'une unité.

$x^3 = 30604x - 2060400$  Les deux valeurs sont 100 & 101.  
 $x^3 = 89869x - 7986900$  Les deux valeurs sont 100 & 101.

& ainsi de suite à l'infini.

Ces racines ont donc un terme fixe de petitesse, & n'en ont aucun de grandeur.

Le nombre des équations possibles pour la même & plus grande racine est égal au double du carré de l'inconnue dans l'exemple ci dessus, c'est depuis 10001x jusqu'à 30000x. Le coefficient commence dans la seconde formule là où il finit dans la première.

Enfin dans la troisième formule  $x^3 = b - ax$  le nombre des équations est absolument infini, à commencer par  $x^3 = 1000000 - 0x$  exclusivement.

$x^3 = 1000100 - 1x$   
 $x^3 = 1000200 - 2x$   
 $x^3 = \&c. - \&c.$

Epoque où la racine cubique de l'homogene commence à être plus grande d'une unité que la racine cherchée.

$x^3 = 1030300 - 303x$   
 $x^3 = 1030400 - 304x$   
 $x^3 = 1030500 - 305x$   
 $x^3 = 1030600 - 306x$   
 $x^3 = \&c. - \&c.$  & ainsi de suite à l'infini.

Cette dernière formule peut être pleinement résoluë par la règle de Tartalea, ainsi je ne m'y arrêterai pas.

Il y a donc le quart des équations de la première formule qui est dans le cas irréductible, & la seconde formule y est toute entière suivant ce que j'ai démontré dans mes Elemens d'Arithmetique & d'Algebre. J'ajouterai ici que du quart irréductible de la première formule.

qui tombe dans les imaginaires, il y en a autant d'imaginaires rationnels que la douzième partie du quarré de l'inconnuë contient d'unités dans sa racine ; ainsi l'inconnuë étant 100, son quarré est 10000 ; & la douzième de ce quarré est  $833\frac{1}{3}$ , dont la racine approchée en entiers est 28 : c'est-pourquoi je dis qu'on pourra former 28 équations dans cette première formule du troisième degré où les imaginaires seront rationnels, & pas davantage : ce seront les équations où  $x$  est égal à

$$\begin{array}{rcl} 50 - + - 1 & + & 50 - - 1 \\ 50 - + - 2 & + & 50 - - 2 \\ 50 - + - 3 & + & 50 - - 3 \\ \hline & + & \text{\&c.} \\ 50 - + - 28 & + & 50 - - 28 \end{array}$$

Cette remarque quoiqu'assez curieuse par rapport à la Theorie n'est d'aucun usage dans la pratique, parce qu'on connoît aussi peu la valeur des imaginaires rationaux que celle des irrationaux.

Dans la seconde formule  $x^3 = ax - b$  il y a toujours deux racines positives & une negative qui est la somme des deux positives, & cette racine negative devient la seule positive de l'équation  $x^3 = ax + b$  & au contraire les deux racines negatives de celle-ci sont les deux positives de l'autre.

L'ordre veut qu'on cherche toujours la petite racine la première comme la plus facile à trouver ; mais dès qu'on en connoît une, on trouvera aisément l'autre par cette formule.

Soit  $c$  une des racines de l'équation  $x^3 = ax - b$ , l'autre sera  $\sqrt{a - \frac{1}{3}cc} - \frac{1}{3}c$ . Par exemple,

Soit l'équation  $x^3 = 19x - 30$ . Soit  $19 = a$ , & qu'une des valeurs d' $x$  donnée soit  $2 = c$  ; donc  $\sqrt{a - \frac{1}{3}cc} - \frac{1}{3}c = \sqrt{19 - 3} - 1 = \sqrt{16} - 1 = 4 - 1 = 3$  seconde valeur cherchée.

Et au contraire soit la valeur donnée  $3 = c$ , on aura  $\sqrt{a - \frac{1}{3}cc} - \frac{1}{3}c = \sqrt{19 - 6} - \frac{1}{3} = \sqrt{12} - 1 = 3\frac{1}{2} - 1 = 2\frac{1}{2}$  valeur cherchée.

Pour le démontrer il n'y a qu'à former l'équation des trois racines.

$$x - c = 0,$$

$$x - d = 0,$$

$x + c + d = 0$ , l'on trouvera  $d = \sqrt{a - \frac{1}{4}cc} - \frac{1}{2}c$ , & réciproquement  $c = \sqrt{a - \frac{1}{4}dd} - \frac{1}{2}d$ .

Je commence par résoudre la seconde formule  $x = ax - b$ , parce qu'elle est toute entière dans le cas irréductible, & que par cette raison elle a toujours été regardée comme la plus difficile, & qu'elle est d'ailleurs la plus utile par rapport à la trisection de l'angle qui s'y réduit.

### REGLE GENERALE.

Soit l'équation donnée  $x = ax - b$ .

### RESOLUTION UNIVERSSELLE EN LETTRES

$$1^{\circ}. x = \frac{b}{a} = c \text{ \& } a - ce = d.$$

$$2^{\circ}. x = c + \frac{b - cd}{a - 3cc} = e \text{ \& } a - ee = f.$$

$$3^{\circ}. x = e + \frac{b - ef}{a - 3ee} = g \text{ \& } a - gg = h, \text{ \& ainsi de suite.}$$

### REMARQUE I.

On abrégera la seconde équation en prenant  $c + \frac{c^3}{a - 3cc}$  au lieu de  $c + \frac{b - cd}{a - 3cc}$ ; car  $c^3 = b - cd$  puisque  $d = a - cc$  &  $c = \frac{b}{a}$ .

### REMARQUE II.

Lorsqu'on ne veut pas négliger les fractions, on aura,

1<sup>o</sup>.  $\frac{b}{a}$  premier membre de la racine.

2<sup>o</sup>.  $\frac{b^3}{a^3 - 3bbxa}$  second membre &  $\frac{b}{a} + \frac{b^3}{a^3 - 3bbxa}$

$$\frac{a^3 - 2bbxb}{a^3 - 3bbxa} = \frac{c}{a}.$$

3<sup>o</sup>.  $\frac{bd - acxd + c^3}{a^3 - 3ccxd}$  troisième membre, &  $\frac{c}{a} +$  ce troi-

sième membre =  $\frac{c}{f}$ .

4°.  $\frac{bf - aexff + e^3}{aff - 3eexf}$  quatrième membre, & ainsi de suite.

## REMARQUE III.

Il faut que  $a^3$  soit égal ou plus grand que  $\frac{1}{4}bb$ , autrement l'équation seroit impossible suivant ce qui a été démontré par Schooten & plusieurs autres. Dans le cas d'égalité  $\frac{1}{2}a^3 = \frac{1}{4}bb$  on aura  $x = \sqrt{\frac{1}{3}a} = \sqrt{\frac{1}{3}b}$ . Dans le cas d'inégalité la racine sera d'autant plus aisée à trouver que  $a^3$  aura un plus grand rapport à  $bb$ .

## RÉSOLUTION EN NOMBRES.

Je suppose que  $a$  &  $b$  sont les nombres entiers, & qu'on cherche la valeur d' $x$  en nombres entiers.

1°. Prenez en nombres entiers prochainement plus grands les valeurs de tous les quotiens  $\frac{b}{a}$ ,  $\frac{b-cd}{a-3cc}$  ou  $\frac{b-cd}{a-3cc}$ , &c.

2°. Dès que le produit  $cd$  ou  $ef$  &c. se trouvera égal à  $b$ , la question est résolue, & on aura la valeur exacte d' $x$  en entiers.

3°. Dès que ce produit  $cd$  ou  $ef$  &c. ayant été plus petit que  $b$  dans l'opération précédente se trouve plus grand dans la suivante, la question est aussi résolue, la valeur d' $x$  est irrationnelle, & on a sa valeur en entiers à moins d'une unité près.

4°. Lorsque ce produit approche fort de la valeur de  $b$ , on peut prendre pour diviseur  $a-3cc-2c-1$  au lieu de  $a-3cc$ , ce qui épargnera quelquefois une opération.

5°. Au lieu de prendre d'abord  $\frac{b}{a}$  on peut prendre telle valeur plus grande en entiers qu'on voudra, pourvu qu'elle soit plus petite que la valeur d' $x$ ; ce qui se connoitra aisément par le rapport des  $b-cd$  ou  $c^3$  comparé au diviseur  $a-3cc$ .

6°. Lorsque les nombres  $a$  &  $b$  sont tels qu'un même nombre qui mesure  $a$  par son carré, mesure  $b$  par son cube, on pourra réduire l'équation en moindres termes.

Ainsi  $x^3 = 300x - 2000$  se réduit à  $y^3 = 3y - 2$ , & pour lors  $x = 10y$ . Cette remarque est generale pour toutes les équations.

7°. On peut couper  $a$  en tranches de deux chiffres, &  $b$  en tranches de trois chiffres de droit à gauche, & operer d'abord seulement sur la premiere tranche de l'un & de l'autre; car on abregera par-là l'operation par raport au premier membre de la racine lorsqu'elle est fort grande.

8°. Lorsque  $3cc$  ou  $3ee$  &c. se trouvent plus grands que  $a$ , l'équation est impossible.

9°. Lorsque la racine est irrationnelle on la trouvera entier à moins d'une unité près, & on pourra en approcher à l'infini en fractions.

### I. E X E M P L E.

Soit  $x^3 = 52416x - 1244160$ .

C'est l'exemple d'Harriot, pages 146, 147 & 148 de son Exegetique numerique.

$$\begin{aligned} \text{J'ay donc } a &= 52416 \\ b &= 1244160 \end{aligned}$$

Donc  $\frac{b}{a} = \frac{1244160}{52416} = 23 \frac{1}{4}$ . Je prends suivant la regle ci-dessus, article premier, le nombre 24 pour premier membre de la racine, je le quarre, c'est  $576 = cc$  que j'ôte de  $52416 = a$ , & j'ai  $a - cc = 51840 = d$  que je multiplie par le même  $24 = c$ . le produit est  $1244160$  qui se trouve  $= b$ ; d'où je conclus suivant l'article second de la même regle que la racine cherchée est 24.

Pour trouver la seconde racine je prends la moitié de 24. c'est 12 que je quarre, c'est 144 que je triple, c'est 432 que j'ôte de 52416, il reste 51984 dont la racine quarrée est 228 dont j'ôte le même 12, le reste 216 est la seconde racine cherchée.

La methode d'Harriot & de Viète demande trois pages *in folio* de calcul.

### II. E X E M P L E.

Soit l'équation  $x^3 = 3x - 1$ , ou  $x^3 = 300x - 1000$ , ou

$x^3 = 30000x - 2000000$  &c. qui sont des équations géométriquement semblables du côté de l'octodécagone, dont le rayon est 1 ou 10 ou 100 &c.

J'aurai 1°.  $\frac{b}{a} = \frac{1}{3} = 3\frac{1}{3} 33\frac{1}{3}$  &c. premier membre.

2°.  $\frac{\frac{c^3}{a} - 3cc - a^3 - \frac{b^3}{3bxa}}{72} = \frac{1}{72} = 013\frac{8}{9}$  &c. second membre.

3°.  $\frac{bd - acx + dd + c^3}{add - 3ccx + a^3} = \frac{73}{984744} = 00007413 +$  troisième membre, ce qui donne pour le côté cherché  $34729.635 +$  &c.

## REMARQUE.

On peut toujours préparer l'équation par cette formule de la bisection de l'angle  $4x x - \frac{x^4}{aa} = b$  dans laquelle  $a$  représente le rayon,  $b$  la corde de l'arc double, &  $x$  la corde de l'arc simple; on peut, dis-je, préparer l'équation de manière que la résolution soit aussi prompte & même plus prompte que celle-ci.

Soit l'équation donnée dans le cas irréductible de la première formule  $x^3 = aax + b$ .

## FORMULE UNIVERSELLE.

$$x = a + \frac{b}{2aa} - \frac{cd - b}{3cc - aa} - \frac{ef - b}{3ec - aa} \text{ \&c.}$$

$$a + \frac{b}{2aa} = c.$$

$$cc - aa = d.$$

$$ee - aa = f.$$

&c.

c'est-à-dire, que le premier membre de la racine est  $a + \frac{b}{2aa} = c$  trop grand. On suppose ensuite  $cc - aa = d$ , & le second membre négatif ou à soustraire est  $\frac{3cc - aa}{cd - b}$ . Soit ensuite  $c - \frac{cd - b}{3cc - aa} = e$ , &  $ee - aa = f$ . Le troisième membre à soustraire est  $\frac{ef - b}{3ec - aa}$ , & ainsi de suite jusqu'à ce



ce qu'on trouve une racine exacte en entier ou une racine approchée à moins d'une unité près lorsque cette racine est irrationnelle.

## E X E M P L E.

Soit l'équation donnée  $x^3 = 7569x + 243100$ , j'ai donc  
 $aa = 7569$  &  $a = 87$  &  $b = 243100$ .

$$a + \frac{b}{2aa} = 87 + \frac{243100}{15138} \left\{ \begin{array}{l} 16 \\ 91720 \\ 15138 \end{array} \right. = 103 = c.$$

$$\text{Donc } cc = 10609 \text{ \& } 3cc = 31827$$

$$-aa = 7569 \quad -aa = 7569$$

$$\text{Donc } cc - aa = 3040 = d \quad 24258 \text{ ou}$$

$$\text{multiplié par } c = 103 \quad 3cc - aa$$

$$9120$$

$$3040$$

$$\text{produit } cd = 313120$$

$$-b = 243100$$

$$cd - b = 70020 \quad (3 - \text{second membre.})$$

$$\text{divisé par } 3cc - aa = 24258$$

Le premier membre est donc 103 & le second — 3, il reste 100 pour la racine que je quarre, c'est 10000 dont j'ôte 7569, il reste 2431 que je multiplie par 100, le produit 243100 est égal à l'homogene  $b$  donné; ainsi 100 est la racine cherchée.

## R E M A R Q U E. I.

Pour conserver l'analogie entiere on pourroit supposer,  
 Le premier membre  $= a$  &  $aa - aa = 0$

$$\text{Le second} \dots = -\frac{aa-b}{3aa-aa} = +\frac{b}{2aa} \text{ \& } a + \frac{b}{2aa} = c.$$

$$\text{Le troisieme} \dots = -\frac{cd-b}{3cc-aa} \text{ \& } c - \frac{cd-b}{3cc-aa} = e.$$

$$\text{Le quatrieme} \dots = -\frac{ef-b}{3ee-aa}, \text{ \& ainsi de suite.}$$

## REMARQUE II.

Lorsque  $cd = b$  ou  $cf = b$  &c. la question est résolue, c'est-à-dire que la racine cherchée est  $c$  ou  $e$  &c.

## REMARQUE III.

On suppose toujours l'équation préparée à l'ordinaire sans fraction & sans incommensurables, & si l'on veut pour une plus grande facilité sans coefficient à la haute puissance. Cette dernière préparation n'est pas absolument nécessaire, & si l'on avoit  $cx = ax + \frac{b}{c}$ , il faudroit prendre pour premier membre au lieu d' $a\sqrt{\frac{aa}{c}}$ , ce qui ne change rien à la méthode.

## REMARQUE IV.

Au lieu de la fraction  $\frac{b}{2aa}$  on peut prendre  $\frac{b}{2aa+3a+1}$ , ce qui abrége un peu en quelques occasions; mais comme  $3a+1$  est un infiniment petit à l'égard de la quantité constante  $2aa$ , on peut le négliger.

## REMARQUE V.

Il faut prendre en entiers les quotiens  $\frac{b}{2aa}$ ,  $\frac{cd-b}{3cc-aa}$ ,  $\frac{ef-b}{3cc-aa}$ , le premier par défaut & les autres par excès.

## REMARQUE VI.

On sera surpris que le premier membre de la racine se trouve plus grand que la racine même; mais ce n'est qu'un préjugé, & pourvu qu'on trouve promptement cette racine, il est indifférent que ce soit par addition ou soustraction.

Soit l'équation  $x^3 = axx - b$ .

On aura pour premier membre  $a - \frac{ab}{a^3-2b} = c$  &  $a - c = d$ .

Pour second membre . . .  $d - \frac{b-ced}{3cc-2ac} = e$  &  $a - e = f$ .

Pour troisième membre .  $e - \frac{b-cef}{3cc-2ac}$  &c. ou bien pour

premier membre  $a$ , pour second  $-\frac{ab}{a^3-3a}$  &c.

## EXEMPLE.

On demande la sécante de  $80^\circ$  degrés ou des  $\frac{2}{3}$  de la circonférence du cercle.

Le rayon étant 1 le sinus de  $10^\circ$  ou de la  $\frac{1}{6}$  partie du cercle est la moitié du côté de l'octodécagone, lequel côté est la petite racine de l'équation  $x^3 = 3x - 1$ , & la sécante de  $80^\circ$  est le double d'une valeur d' $y$  dont  $y^3 = 3yy - 1$  ; & il en est de même de toutes les sécantes dont les arcs ne peuvent être donnez que par la trisection de l'angle.

J'ai donc  $a = 3$  &  $b = 1$ , & par conséquent  $a = \frac{ab}{a^3-3a}$   
 $= 3 - \frac{3}{25} = \frac{72}{25} = c$ , donc  $cc = \frac{5184}{625}$ , donc  $a - c = d = 3$   
 $-\frac{72}{25} = \frac{3}{25}$ , donc  $ccd = \frac{15552}{15625}$  que j'ôte de  $b = 1$ , il reste  
 $\frac{73}{15625}$  que je divise par  $3cc = \frac{15552}{625} = \frac{25}{25}$ , c'est-à-dire  
 par  $\frac{118800}{15625}$ , le quotient est  $\frac{73}{118800}$  que j'ôte de  $\frac{72}{25}$ , il reste  
 $\frac{342071}{118800} = 2.879385^{vi}$  &c. dont le double  $5.758770^{vi}$  —  
 est effectivement la sécante de  $80^\circ$  conformément aux  
 Tables.

## DEMONSTRATION.

Pour la Formule  $x' = ax - b$ .

Cubez  $a$  & quarrez  $b$  & divisez  $a^3$  par  $bb$ , si le quotient est  $6\frac{3}{4}$  (il ne peut jamais être moindre suivant ce qui a été démontré par Schooten, comme j'ai déjà dit ci-dessus) la racine sera  $\frac{3b}{2a}$ . Car soit  $a = 3cc$  &  $b = 2c^3$ , on aura l'équation  $x^3 = 3ccx - 2c^3$ , le cube de  $3cc$  est  $27c^6$  & le carré de  $2c^3$  est  $4c^6$  & le quotient  $\frac{27c^6}{4c^6} = 6\frac{3}{4}$ . Or lorsque  $x^3 = 3ccx - 2c^3$ , il est évident que  $x = \frac{3b}{2a} = \frac{6c^3}{6cc} = c$  ; car en substituant  $c$  à la place d' $x$ , on aura  $c^3 = 3c^3 - 2c^3 = c^3$ .

2°. On démontrera de même que si le quotient  $\frac{a^3}{bb} = 7\frac{1}{9}$

Rr ij

la racine ou plutôt une des racines sera  $\frac{4b}{3a}$ , comme si l'équation est  $x^3 = 4ccx - 3c^3$ , on aura  $a = 4cc$  &  $b = 3c^3$ , & par conséquent  $a^3 = 64c^6$  &  $b^3 = 27c^9$ ; donc  $\frac{a^3}{b^3} = \frac{64c^6}{27c^9} = \frac{64}{27c^3}$  &  $\frac{4b}{3a} = \frac{4 \cdot 3c^3}{3 \cdot 4cc} = \frac{c}{c} = c$ . Il est évident que  $x = c$ ; car en substituant  $c$  à la place d' $x$  dans l'équation  $x^3 = 4ccx - 3c^3$ , on aura  $c^3 = 4c^3 - 3c^3 = c^3$ .

3°. Si le quotient est  $7\frac{13}{10}$ , une des racines sera  $\frac{5b}{4a}$

Si ce quotient est  $8\frac{16}{25}$ , on aura pour racine  $\frac{6b}{4a}$ .

Si ce quotient est  $9\frac{19}{36}$ , on aura  $\frac{7b}{6a}$ .

Si ce quotient est  $10\frac{22}{49}$ , on aura  $\frac{8b}{7a}$ .

Si ce quotient est  $11\frac{25}{64}$ , on aura  $\frac{9b}{8a}$ .

&c.

Et universellement si le quotient  $\frac{a^3}{b^3} = c + \frac{3c-8}{c-1}$ , ou  $= c + \frac{3c-8}{cc-6c+9}$ , la racine sera  $\frac{c-2 \times b}{c-3 \times a}$ .

Mais si le quotient ne se trouve pas dans la suite de cette progression, la racine cherchée sera nécessairement entre les deux termes prochains de cette même progression; ainsi lorsque ce quotient est 27 comme dans l'équation de l'octodécagone  $x^3 = 3x - 1$ , ou  $x^3 = 12x - 8$ , ou  $x^3 = 27x - 27$ , ou  $x^3 = 48x - 64$  &c.  $x^3 = 300x - 1000$  &c. la racine cherchée est entre  $\frac{25b}{24a}$  &  $\frac{24b}{23a}$ , parceque lorsque  $x = \frac{24b}{23a}$  le quotient  $\frac{a^3}{b^3} = 26\frac{70}{529}$  & lorsque  $x = \frac{25b}{24a}$  le même quotient  $\frac{a^3}{b^3}$  est égal à  $27\frac{73}{576}$  suivant la Formule  $c + \frac{3c-8}{c-3}$  pour le quotient, & suivant la formule  $\frac{c-2 \times b}{c-3 \times a}$  pour la racine. Ces deux formules commencent par  $5\frac{10}{9}$ ,  $7\frac{11}{6}$ , continuant à l'infini. On a donc pour premiers membres de la racine cherchée  $\frac{c-2 \times b}{c-3 \times a}$ ; & parceque  $c = \frac{a^3}{b^3}$  par l'hypothese, la fraction  $\frac{3c-8}{c-3}$  étant un indé-

niment petit par raport aux quantités constantes  $a, b, c$ , si l'on substitue  $\frac{a^3}{bb}$  à la place de  $c$  dans l'équation  $\frac{c-2xb}{c-3xa}$ , on aura  $\frac{a^3b-2b^2}{a^4-3bb}$ , ou  $\frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^4-3abb}$ , ou  $+ \frac{b^2}{a^4-3bbxa}$ . Si l'on suppose  $\frac{b}{a} = c$  (c'est une nouvelle valeur de  $c$  différente de la formule  $\frac{c-2xb}{c-3xa}$ ) & qu'on substitue cette valeur dans la fraction  $\frac{c-2xb}{c-3xa}$ , on aura pour premiers membres de la racine cherchée cette valeur  $c + \frac{c^3}{a-3cc}$  qui est précisément la valeur trouvée par la règle. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Pour trouver ensuite les autres membres  $e + \frac{b-ef}{a-3ee}$  &c. je suppose  $c + \frac{c^3}{a-3cc} = e$ , ou  $ax - x^3 = b$ . Or puisque  $e$  est plus petit que  $x$ , il s'ensuit nécessairement que l'homogene de comparaison pour  $ae - e^3$  sera plus petit que l'homogene de comparaison pour  $ax - x^3$ , c'est-à-dire que le premier sera plus petit que  $b$ . Soit donc  $a - ee = f$ , il s'ensuit que  $f$  est plus petit que  $b$ , &  $b - ef$  est la différence des deux homogenes de comparaison pour les équations semblables,

$$ax - x^3 = b. \quad ae - ee.$$

$$ae - e^3 = ef = a - eex.$$

Enfin pour avoir un troisième homogene, puisque  $x$  est un nombre entier & que  $e$  est plus petit, je ne puis pas supposer moins pour  $x$  que  $e + 1$  que je substitue dans l'équation  $ax + x^3 = b$ , ou  $a - xx = \frac{b}{x}$ , ce qui me donne  $ae + 1a - eee - 3ee - 3e - 1 = d$ , & si  $d = b$  la question est résolue, &  $x = e + 1$ ; mais si l'homogene  $d$  est encore plus petit que  $b$ , il est évidemment plus grand que  $ef$ , parceque l'homogene de comparaison augmente à mesure que la racine qui le forme augmente, &  $d$  est formé par  $e + 1$ , &  $ef$  seulement par  $e$ : c'est-pourquoi je fais une règle de 3, & je dis: la différence des homogenes

$ae - e^3 = ef$  &  $ae - e^3 - 3ee - 3e - 1 + 1a = d$  est  $a - 3ee - 3e - 1$ . Celle des homogenes  $ax - x^3 = b$  &  $ae - e^3 = ef$  est  $b - ef$ . La difference des racines  $e$  &  $e + 1$  qui ont formé les homogenes  $ef$  &  $d$  est 1. Je dis donc suivant la regle de la premiere partie de ce Traité, si  $a - 3ee - 3e - 1$  difference dans l'homogene vient de 1 difference dans les racines, de combien viendra  $b - ef$ ? Le quotient  $\frac{b-ef}{a-3ee-3e-1}$ , donnera le troisieme membre de la racine; mais parceque  $3e + 1$  est un infiniment petit par rapport aux quantités constantes  $a$  &  $b, ef$ , je ne prends universellement que  $\frac{b-ef}{a-3ee}$ . Ce qu'il falloit trouver.

Il me reste à prouver que ce troisieme membre & la suite des autres qu'on peut trouver de la même maniere à l'infini, forment une somme plus petite que la racine, & qui en approche à l'infini lorsqu'elle est irrationnelle, & c'est tout ce qu'on peut souhaiter en ces matieres.

Soit trois équations semblables.

$$x^3 = ax - b. \text{ \& soit } y = x + e.$$

$$y^3 = ay - c \quad \& \quad z = y + f = x + e + f.$$

$$z^3 = az - d.$$

Je dis que si l'on fait comme  $c - b : d - c :: y - x$  à une quatrieme quantité  $\frac{d-c}{c-b} \frac{y-x}{y}$ , la composée  $y + \frac{d-c}{c-b} \frac{y-x}{y}$  sera plus petite que  $z$  ou que  $x + e + f$ . Car en substituant on aura  $ax - x^3 = b$

$$\& ay - y^3 = c$$

$$\text{ou } ax + ae - x^3 - 3exx - 3eex - e^3 = c.$$

Donc  $c - b = ae - 3exx - 3eex - e^3$  & c. & enfin on aura  $\frac{afe - f^3c - 3ffex - 3ffe^2 - 3fexx - 6eefx - 3fe^3}{ae - 3exx - 3eex - e^3}$  qui est plus petit que  $f$ , puisqu'il reste tous termes negatifs.

On prouvera de la même maniere que cette difference deviendra plus petite qu'aucune quantité donnée, & que par consequent on peut approcher à l'infini de la valeur de la racine lorsqu'elle est irrationnelle.

Enfin non-seulement tous les autres cas réductibles ou

irréductibles du troisième degré, mais généralement toutes les équations se peuvent résoudre par les mêmes principes, c'est-à-dire par la règle de trois appliquée à la différence des homogènes & à celles des valeurs qui les ont produits, ce qui est trop évident pour s'arrêter à le démontrer en détail.

## SUR UNE PROPOSITION

DE

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

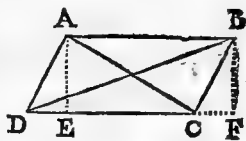
PAR M. DE LAGNY.

THEOREME.

**D**Ans tout parallélogramme la somme des quarrés des deux diagonales est égale à la somme des quarrés des quatre côtés. 1706. 28. Juillet.

Si le parallélogramme est rectangle, la proposition est évidente par la 47. p. 1. Il faut la prouver dans les obliques.

Soit le parallélogramme oblique  $ABCD$  compris sous les quatre côtés  $AB, BC, CD, DA$ , dont les côtés opposés sont  $AB, CD$ , &  $AD, BC$ ; la grande diagonale  $BD$  & la petite  $AC$ . Je dis que la somme des quarrés des deux diagonales  $BD, AC$ , est égale à la somme des quarrés des quatre côtés  $AB, BC, CD, DA$ .



PRÉPARATION.

Du point  $A$  de l'angle obtus  $DAB$  soit abaissée sur le côté  $CD$  la perpendiculaire  $AE$ , & du point  $B$  sommet de l'angle aigu  $ABC$  sur  $DC$  prolongé en  $F$  la perpendiculaire  $BF$ .

## DEMONSTRATION.

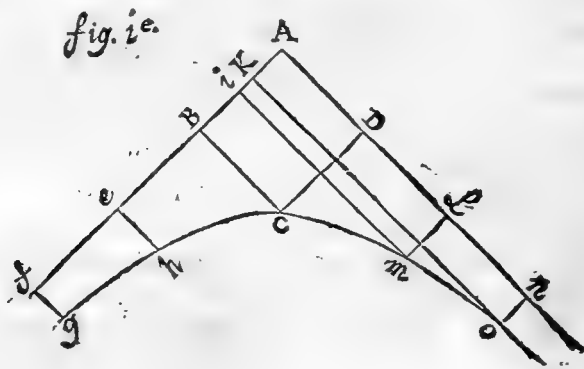
Les triangles  $ADE$ ,  $BCF$ , sont égaux & semblables, puisque  $AD$  est égale à  $BC$ , & les angles  $ADE$ ,  $BCF$ , de même que  $AED$ ,  $BCF$ , sont aussi égaux, donc  $DE$  est égal à  $CF$ . Or par la 12. p. 2. dans le triangle obtusangle  $BDC$ , le quarré du côté  $BD$  est égal à la somme des quarrés de  $BC$  & de  $CD$ , plus le double du rectangle de  $CF$  par  $CD$ ; & par la 13. p. 2. dans le triangle  $DAC$ , le quarré du côté  $AC$  est égal à la somme des quarrés de  $AD$  & de  $CD$ , moins deux fois le rectangle de même  $CD$  par  $DE$  égal à  $CF$ . Donc l'excès compensant précisément le défaut, la somme des quarrés des deux diagonales est égale à la somme des quarrés des quatre côtes. *ce qu'il falloit démontrer.*

## COROLLAIRE I.

Dans tout rhombe ou lozange connoissant un côté & une diagonale, on connoitra l'autre diagonale. Car puisque les quatre côtes sont égaux, il n'y a qu'à ôter le quarré de la diagonale donnée du quadruple du quarré du côté, le reste sera le quarré de la diagonale cherchée.

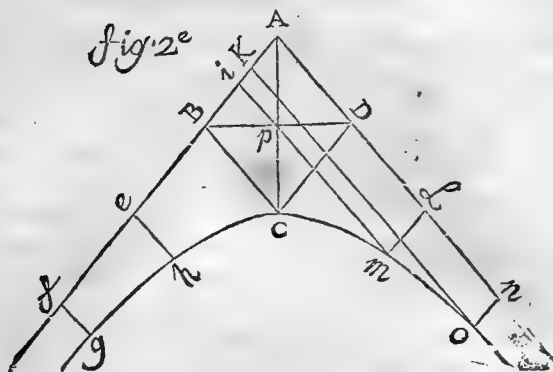
## USAGE.

Soit un quadrilatere équilateral quelconque  $ABCD$  rectiligne & sur un plan indéfini.



Si





Si l'on prolonge indéfiniment chacun des deux côtez conjoints  $AB$ ,  $AD$ , & que prenant à discretion un point autre que  $B$  &  $D$  sur ces côtez prolongez, par exemple le point  $e$ , on tire  $eh$  parallele à  $BC$ , & qu'on fasse comme  $Ae$  est à  $AB$ , ainsi  $BC$  à  $eh$ , ou que prenant entre  $A$  &  $B$  un point à discretion comme  $i$ , on fasse comme  $Ai$  est à  $AB$ , ainsi  $AD$  à  $AL$ , & que du point  $L$  on tire  $Lm$  parallele & égale à  $Ai$ , & qu'on fasse la même chose sur tout autre point comme  $f$ ,  $K$ , &c. la Courbe qui passera par toutes les extremittez des paralleles  $eh$ ,  $Lm$ ,  $fg$ ,  $no$ , &c. sera l'hyperbole du premier genre, & elle sera rectangle & équilatera lorsque  $ABCD$  sera un quarré *Fig. 1*. Elle sera obliquangle & scalene lorsque  $ABCD$  sera un rhombe *Fig. 2*. Et si l'on opere de même sur les deux autres côtez conjoints  $BC$ ,  $CD$ , on formera les hyperboles opposées. Enfin si dans la *Fig. 2*. au lieu des deux côtez conjoints  $AB$ ,  $AD$ , qui forment l'angle aigu  $BAD$  on prend les deux côtez conjoints  $AD$ ,  $AC$ , qui forment l'angle obtus  $ADC$ , on formera l'hyperbole obtusangle que j'appelle hyperbole de suite à l'hyperbole acutangle  $ghCmo$ , parceque leurs angles formateurs sont des angles de suite, & se servent de complément l'un à l'autre. Ces hyperboles de suite ont leurs espaces asymptotiques

parfaitement égaux & semblables dans le tour & dans chaque partie.

C'est une chose connue que le côté  $AB$  étant pris pour l'unité, si l'on prend sur ce côté prolongé à l'infini  $Be$ ,  $ef$ , &c. égaux chacun à  $AB$ , les lignes  $AB$ ,  $Ae$ ,  $Af$ , &c. représenteront la suite naturelle des nombres 1, 2, 3, &c. & que les espaces asymptotiques  $BChe$ ,  $BCgf$ , &c. représenteront les logarithmes de ces mêmes nombres 1, 3, &c. & comme l'espace  $ALCD$  n'a rien de curviligne ou d'hyperbolique, il représente aussi le logarithme naturel de l'unité qui est zero; les lignes  $Ai$ ,  $AK$  représenteront toutes les fractions dont  $AB$  est le dénominateur, & les espaces asymptotiques du côté opposé pris négativement, c'est-à-dire les espaces  $DCmL$ ,  $DCm$ , &c. représentent les logarithmes de ces fractions.

Il est ce me semble de la dernière évidence que toutes les hyperboles sans distinction pouvant servir de modele pour la construction des logarithmes, on auroit dû choisir préférentiellement à toutes les autres celle qui est rectangulaire & équilatère, comme étant certainement la plus simple & la plus régulière: mais au lieu de suivre la nature & la raison, on s'est assujéti à l'usage arbitraire de la progression décuple, ensorte qu'ayant pris zero pour le logarithme de l'unité, comme on le doit toujours prendre, on a pris arbitrairement 10.00000 &c. pour le logarithme de 10, au lieu que suivant la quadrature de l'hyperbole que je donnai à l'Académie le 14 Juillet 1696, le logarithme naturel de 10 (c'est-à-dire l'espace asymptotique qui répond à 10 fois le côté du carré generateur de l'hyperbole rectangle & équilatère, ce côté étant 1) est

230258.50929  $\frac{1}{5}$  +; ce que je trouve sans aucune extraction de racine par une methode très-simple & très-generale.

Il s'agit présentement de trouver quelle espece d'hyperbole sert de modele aux logarithmes ordinaires; il faut pour cela trouver l'aire du quadrilatère generateur  $ABCD$   
Fig. 2.

Dans l'hyperbole rectangle & équilatère le côté  $AB$  étant 1, l'air de son carré generateur est aussi 1. Or c'est une propriété commune à toutes les hyperboles qu'il y a toujours même raison entre leurs segmens hyperboliques semblables, & l'aire du quadrilatère generateur. Ainsi le logarithme naturel de 2 est 69314. 71805 &c. celui de 10 étant 2. 30258. 50929 &c. logarithme arbitraire de 10 étant 1. 00000. 00000 &c. si l'on fait cette analogie.

Comme 2. 30258. 50929 &c. est à 69314. 71805. &c. ainsi 1. 00000. 00000 à un quatrième nombre, on trouvera pour le logarithme arbitraire de 2 ce nombre 30102. 99956 +, ce qui s'accorde parfaitement avec les Tables.

Et si l'on fait de même comme 2. 30258. 50929 &c. est à 1. 00000. 00000, ainsi 1. 00000. 00000 &c. à un quatrième nombre, on trouvera 43429. 44819 pour l'aire du rhombe generateur de l'hyperbole qui sert de modèle aux logarithmes ordinaires. Cette aire & le côté 100000 étant donnez, il faut trouver les diagonales du rhombe.

Soit l'une comme  $AC = x$  l'autre suivant mon Théorème, & le Corollaire ci-dessus sera  $\sqrt{4.00000.00000 - x^2}$ . Or le produit de ces diagonales l'une par l'autre est évidemment double de l'aire du rhombe ou losange. J'ai donc cette égalité  $\sqrt{400000.00000x^2 - x^4} = 86858.89638$ , & quarrant tout j'ai  $x^4 = 400000.00000xx - 75444.67880.35157.71044$ , & par conséquent  $x = \sqrt{200000.00000. + \sqrt{324555.32119.64842.28955}}$ .

La racine de 324555.32119.64842.28955. est 180154. 18985 -, & par conséquent la grande diagonale  $AC$  est  $\sqrt{380154.18985}$  - entre 194975  $\frac{26836}{38995}$  & 194975  $\frac{268359}{38995}$ . La petite diagonale  $BD$  sera  $\sqrt{19845.24304}$  entre 44548.  $\frac{66010}{83097}$  & 44548  $\frac{66711}{89096}$ ; leurs moitiés  $Ap$ ,  $Bp$  seront 44548. &c. & 22274 &c. Prenant donc  $AB$  pour sinus total, & ces derniers nombres pour sinus des angles  $ABp$ ,  $pAB$ , on trouvera que l'angle des asymptotes  $BAD$  est d'environ 25<sup>d</sup> 44' 25", & par conséquent l'angle  $ABC$  de 154<sup>d</sup> 15'.

Sf ij

35", qui est aussi l'angle de l'hyperbole obtusangle ou de suite dont les espaces asymptotiques representent également les logarithmes ordinaires. C'est ce que j'avois avancé sans démonstration dans ma nouvelle Arithmetique pag. 12. ligne 21. On voit par-là que les logarithmes ordinaires ont pour modèle deux hyperboles obligangles, au lieu que les logarithmes naturels ont pour modele la seule hyperbole rectangle & équilateré.

## COROLLAIRE II.

Connoissant les deux côtes qui forment un parallelogramme & un des diagonales, on trouvera l'autre en ôtant du double de la somme des quarez des deux côtes, le quarré de la diagonale donnée; car le reste sera le quarré de la diagonale cherchée.

Soit le côté  $AB=10$ , &  $AD=5$ , la diagonale  $AG=9$ ; on demande la diagonale  $BD$ .

Le quarré d' $AB$  est 100, celui d' $AD$  est 25, leur somme 125, le double 250, dont j'ôte le quarré de 9 qui est 81 quarré de la diagonale donnée, il reste 169 quarré de la diagonale cherchée, laquelle par consequent est 13.

*Autre Exemple.*

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Soit } AB=20 & \overline{AB}^2=400 & \overline{AC}^2=289 \\
 AD=15 & \overline{AD}^2=225 & \\
 AC=17. \text{ Somme}=625 & & \\
 \text{on demande } BD=31, \text{ double}=1250 & & \\
 \text{ôtez} & 289 & \\
 \hline
 \text{reste} & 961 = \overline{BD}^2 & \\
 \text{Donc } BD=31. & & 
 \end{array}$$

*Usages.*

Soit un corps  $A$  poussé suivant la ligne  $AB$  avec une force comme 10, & suivant  $AD$  avec une force comme 5, & que l'angle  $BAD$  soit donné de position tel que sa base  $BD$  soit de 13; on demande, en faisant abstraction de la

résistance du milieu, quelle ligne parcourra le mobile & sa longueur respective. Il est évident qu'il parcourra  $AC$  de 9.

## REMARQUE I.

C'est en cherchant le rapport de ces lignes que décrit le mobile par un mouvement composé de deux ou plusieurs déterminations que j'ay trouvé mon Theorème, & il est aisé d'en faire l'application generale.

## REMARQUE II.

Cette maniere de déterminer l'angle  $BAD$ , non-pas par degrez, minutes, secondes, &c. mais par le rapport de la base  $BD$  aux deux côtez  $AB$ ,  $AD$ , est beaucoup plus simple, plus geometrique & plus analytique. Il est aisé de supposer un angle de tant de degrez, minutes, &c. qu'on voudra; mais ces suppositions ne peuvent s'executer actuellement & exactement. Par exemple, je puis supposer l'angle  $BAD$  de 20 degrez; mais je ne puis construire cet angle sans employer l'une des trois Sections Coniques avec le cercle. Si je le suppose de 31 degrez 17', il faudra que j'emploie une Courbe d'un genre plus composé que les Sections Coniques; parceque je suis obligé de couper l'angle droit trois fois en deux continuellement, trois fois en trois, & deux fois en cinq. Or je ne puis le couper avec le cercle & la ligne droite qu'une fois en trois, une fois en cinq, & autant de fois que je voudray en deux; & pour le couper une seconde fois en trois, il faut employer une des Sections Coniques; & pour le couper une seconde fois en cinq, il faut une Courbe plus composée. C'est la même chose s'il y avoit des secondes, des tierces, &c. Il faut toujours lorsque ce rapport est primitif, couper un angle donné en trois & en cinq parties égales une ou plusieurs fois de suite continuellement.

Or dans tous ces cas le rapport de  $BD$  aux deux côtez  $AB$ ,  $AD$ , est entierement inexprimable, même en nombres irrationaux. Il est vrai aussi qu'en déterminant ce ra-

port de  $BD$ , on ne peut presque jamais déterminer exactement en nombres la grandeur de l'angle  $BAD$  : mais ayant à choisir entre connoître exactement le rapport des trois lignes  $AB$ ,  $BD$ ,  $DA$ , & indéfiniment près la grandeur de l'angle  $BAD$ , & pouvoir executer le tout géométriquement avec le cercle & la ligne droite, ou bien de supposer seulement le rapport connu de l'angle  $BAD$  à l'angle droit, & le rapport des deux côtéz  $AB$ ,  $AD$ , sans pouvoir construire actuellement cet angle, ni connoître exactement le rapport de la base  $BD$ ; il me semble qu'on doit sans difficulté préférer la première supposition.

## REMARQUE. III.

Si l'on vouloit résoudre ce Problème par la Trigonométrie, il faudroit faire vingt & une opérations, & encore ne trouveroit-on qu'à peu près la valeur cherchée, sans pouvoir s'assurer de l'avoir précisément.

Car dans le triangle  $ABD$ , connoissant les trois côtéz  $AB=10$ ,  $AD=5$  &  $BD=13$  pour trouver l'autre diagonale  $AC$  du parallélogramme  $ABCD$ , voici comment il faut operer.

J'abaisse du point  $A$  sur  $BD$  la perpendiculaire  $Ae$ .

1°. J'ajoute les deux côtéz  $AB$ ,  $AD$ , c'est  $10 + 5$  15.

2°. J'ôte  $AD$  de  $AB$ , c'est 10

— 5 = 5

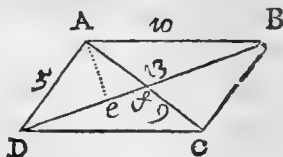
3°. Je multiplie cette somme par ce reste, 15 par 5, c'est 75.

4°. Je divise ce produit par la base  $BD$ , c'est  $\frac{75}{13} = 5 \frac{10}{13}$  pour avoir la différence des segmens  $Be$ ;  $De$ .

5°. J'ôte cette différence de  $BD$ , c'est-à-dire, j'ôte  $5 \frac{10}{13}$

de 13, le reste est  $13 - 5 \frac{10}{13} = 7 \frac{3}{13}$ .

6°. Je prends la moitié de ce reste, c'est  $3 \frac{8}{13}$  pour le segment  $De$ .



7°. Je prends la moitié de  $BD$  pour  $Df$ , c'est  $6\frac{1}{2}$ .

8°. J'en ôte  $De$ , c'est  $6\frac{1}{2} - 3\frac{8}{13} = 2\frac{23}{26}$  valeur de  $ef$ .

9°. Je multiplie  $De = 3\frac{8}{13}$  par le sinus total 100000.

10°. Je divise le produit par  $AD = 5$ , le quotient  $72307\frac{9}{13}$  est le sinus de l'angle  $DAe$ .

11°. Je cherche ce sinus dans les Tables, j'en trouve environ  $46^{\circ} 46' 19''$  pour l'angle  $DAe$ .

12°. J'écris son complément  $69^{\circ} 06' 7''$  pour sinus de l'angle  $ADe$ .

13°. Je multiplie ce dernier sinus par  $AD = 5$ .

14°. Je divise le produit par le sinus total, le quotient est  $3\frac{45335}{100000}$  valeur de la perpendiculaire  $Ae$ .

15°. Je multiplie  $Ae$  par le sinus total.

16°. Je divise le produit par  $ef = 2\frac{23}{26}$ , le quotient  $119716$  est la tangente de l'angle  $Afe$ .

17°. Je cherche cette tangente dans les Tables, & j'en trouve environ  $50^{\circ} 18'$  pour l'angle  $Afe$ .

18°. J'écris la secante correspondante, c'est environ  $156005$ .

19°. Je multiplie cette secante par  $ef = 2\frac{23}{26}$ .

20°. Je divise le produit par le sinus total, le quotient est  $4\frac{1300376}{2600000}$  pour  $Af$ .

21°. Le double  $9\frac{3}{1015}$  est à très-peu près la valeur cherchée de la diagonale  $AC$ , puisqu'elle est précisément 9.

Si l'on veut opérer géométriquement, & ce sont les deux seules méthodes connues jusqu'à présent, les huit premières opérations sont les mêmes pour connaître le segment  $De = 3\frac{8}{13}$  ou  $\frac{47}{13}$ ; mais elles diffèrent dans la suite.

9°. Je carre  $De$ , c'est  $\frac{2209}{169}$ .

10°. Je carre  $AD$ , c'est 25.

110. J'ôte le premier quarré du second, c'est  $25 - \frac{2209}{169} = \frac{2016}{169}$  quarré d'*Ac*.

120. Je quarre  $ef = 2 \frac{23}{26} = \frac{75}{26}$ , c'est  $\frac{5625}{676}$ .

130. J'ajoute ces deux quarez *Ac*, *ef*, la somme est  $\frac{13689}{676}$ .

140. La racine quarrée de cette somme que je tire est  $\frac{117}{26} = 4 \frac{1}{2}$  valeur d'*Af*.

150. Le double de cette valeur est 9, valeur cherchée de la diagonale *AC*.

Cette derniere methode est exacte, & on opere par extraction de racines quarrées, au lieu que par la Trigonometrie on se sert de la regle de troisen quatre analogies, & qu'on ne trouve qu'à peu près ce qu'on cherche. Celle-ci suffit pour l'usage civil, mais elle est d'une longueur prodigieuse. L'autre est infiniment plus élégante, & satisfait plus l'esprit. Elles sont toutes deux incomparablement plus longues & plus embarrassantes que la methode qui résulte de mon Theorème suivant laquelle il faut,

1°. Quarre  $\overline{AB} = 100.$

2°. Quarre  $\overline{AD} = 25.$

3°. Ajouter ces deux quarez, c'est 125.

4°. Doubler cette somme, c'est 250.

5°. Quarre  $\overline{BD} = 169.$  13

6°. Oter ce quarré du double 13

de la somme de 250 39

ôtez 169 13

reste 81. 169.

7°. Tirer la racine quarrée de ce reste, c'est 9 valeur cherchée de la diagonale *AC*.

Il y a donc deux fois moins d'operations par ma methode que par la methode Geometrique, & trois fois moins que par la methode Trigonometrique. Celle-ci n'est jamais exacte, & la mienne évite toutes les fractions

où



où les deux autres engagent; qui augmentent encore indéfiniment la difficulté de l'opération.

## REMARQUE IV.

Ces quatre nombres 5, 10, 9 & 13 ont été choisis avec art comme les plus simples pour exprimer en nombres rationaux les quatre côtes & les deux diagonales d'un parallélogramme obliquangle; de même que les trois nombres 3, 4 & 5 sont les plus simples qu'on puisse trouver pour exprimer les trois côtes d'un triangle rectangle.

Ces quatre autres nombres 20, 15, 17 & 31 ont aussi été trouvez par la même methode; & dans chaque cas particulier on peut donner non-seulement une infinité de solutions, mais une infinité d'infinité, c'est-à-dire, toutes les solutions possibles en entiers & en frctions. Ainsi deux côtes étant donnez en nombres, on trouvera une infinité, ou plusieurs infinité, ou une infinité d'infinité de fois deux diagonales commensurables; & au contraire si les diagonales, ou un côté & une diagonale sont donnez, on trouvera le reste.

Les Livres de Diophante. de Mrs Viète, Fermat, Fre-nicle, &c. & en general de tous les Analistes sont pleins de Problèmes curieux sur les triangles rectangles en nombres. Voici un nouveau champ ouvert sur les parallelogrammes numeriques.

## PROBLEME ARITHMETIQUE.

*Deux nombres étant donnez, en trouver deux autres tels que la somme des quarez des deux derniers soit double de la somme des quarez des deux premiers.*

## L E M M E.

Le double de la somme des quarez de deux nombres est égal à la somme des quarez de la somme & de la difference de ces deux nombres.

Soit les deux nombres  $a$ , &  $a + b$ .

Leur somme est  $2a + b$ .

Leur difference est  $b$ .

Le quarré du premier est  $aa$ .

Le quarré du second est  $aa + 2ab + bb$ .

La somme est . . .  $2aa + 2ab + bb$ .

Le double de cette somme est  $4aa + 4ab + 2bb$ .

Or le quarré de la somme  $2a + b$  est  $4aa + 4ab + bb$ .

Et le quarré de la difference  $b$  est . . . . .  $bb$ .

La somme de ces deux quarrez est  $4aa + 4ab + 2bb$  comme cy-dessus; donc le double de la somme des quarrez de deux nombres est égal à la somme des quarrez de la somme & de la difference de ces deux nombres. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Soit, par exemple, les deux nombres 1 & 2, leur somme est 3, & leur difference 1. La somme des quarrez est 5, dont le double 10 est égal à 9 + 1 quarré de 3 & de 1.

Soit encore les deux nombres donnez 3 & 5, leur somme est 8, leur difference 2. La somme des quarrez de 3 & de 5, c'est-à-dire de 9 & de 25 est 34, dont le double est 68. Or le quarré de 8 est 64, & celui de 2 est 4, &  $64 + 4 = 68$ .

#### SOLUTION GENERALE.

Soit les nombres donnez pour côtez conjoints d'un parallelograme  $a$  &  $b$ , il faut trouver les deux diagonales commensurables  $x$  &  $y$ ; enforte que  $xx + yy = 2aa + 2bb$  suivant mon Theorème.

1°. Si  $a$  &  $b$  sont égaux, comme il arrive dans le rhombe ou lozange, ce Problème est aisé. Car il ne s'agit que de diviser un nombre quarré  $4aa = 2aa + 2bb = 2aa + 2aa$  en deux autres quarrez. Mais pour avoir la solution la plus élégante qu'il soit possible, je suppose pour le premier  $x$  & pour le second  $2a - \frac{b}{c}x$ . Cette supposition exprime généralement tous les nombres possibles.  $b$  &  $c$  sont des nombres entiers & arbitraires. On aura donc par la substitution  $xx + 4aa - \frac{4abx}{c} + \frac{bbxx}{cc} = 4aa$ , & par con-

sequent  $x = \frac{4abc}{bb+cc}$  valeur cherchée indéfinie.

Cette résolution est très-simple, & en même tems si generale qu'elle renferme l'infinité d'infinitez de cas possibles.

Car supposant  $b=1$ , on aura une infinité de solutions en supposant successivement  $c=2, c=3, c=4, c=5$ , &c. à l'infini.

Et supposant  $b=2$ , on aura une autre infinité de résolutions en supposant successivement  $c=3, c=5, c=7, c=9$ , &c. c'est dire  $c$  égal à la suite infinie de tous les nombres impairs.

En supposant  $b=3$ , on aura une autre infinité de résolutions si l'on suppose successivement  $c=4, c=5, c=6, c=7, c=8$ , &c. & ainsi de suite en combinant chaque valeur particuliere de  $b$ , avec la suite infinie des valeurs de  $c$ , premieres à  $b$ , on aura une infinité d'infinité de résolutions, & absolument toutes les résolutions possibles. Car pour résoudre parfaitement ces sortes de Problèmes, il ne suffit pas d'en donner une ou plusieurs solutions, ni même une ou plusieurs infinitez, il faut donner l'infinité d'infinitez de toutes les solutions possibles.

Dans cette formule  $x = \frac{4abc}{bb+cc}$  les grandeurs  $b$  &  $c$  sont parfaitement semblables, c'est-à-dire également employées. Ainsi c'est la même chose de supposer  $b=2$ , &  $c=3$ , ou de supposer au contraire  $c=2$  &  $b=3$ , la valeur d' $x$  vient la même. C'est-pourquoi bien qu'avec  $b=1$  on puisse aussi supposer  $c=1, c=2, c=3$ , &c. & qu'avec  $b=2$  on puisse aussi supposer  $c=1, c=2, c=3$ , &c. & qu'avec  $b=3$  on puisse encore supposer  $c=1, c=2, c=3$ , &c. Cependant si l'on ne veut avoir que des solutions utiles & differentes ou primitives, il faut premierement retrancher toutes les suppositions de  $b=c$ , c'est-à-dire de  $b=1$  &  $c=1$ , de  $b=2$  &  $c=2$ , de  $b=3$  &  $c=3$ , &c. parceque la substitution donne  $x = \frac{4abc}{bb+cc} = 2a$ , & par consequent  $y = 2a - \frac{bx}{c} = 2a - x = 2a - 2a = 0$ . Or

quoiqu'il soit vrai en un sens que les quarréz de  $2a$  & de  $o$  joints ensemble font  $4aa$ , ce n'est pourtant point satisfaire au veritable sens de la question, ni à l'intention de celui qui la propose, ou qui cherche à la résoudre.

Secondement il faut retrancher toutes les suppositions où  $b$  &  $c$  sont en raison réciproque, ou en raison semblable à quelque supposition précédente. Ainsi après avoir supposé  $b=2$  &  $c=3$ , il est inutile de supposer  $b=3$  &  $c=2$ , parcequ'on retrouveroit la même résolution. Il est aussi fort inutile après avoir supposé  $b=1$  &  $c=2$  de supposer  $b=2$  &  $c=4$ , ou  $b=3$  &  $c=6$ ; & parceque la valeur d' $x$  revient encore la même, avec cette seule difference que  $\frac{bx}{c}$  dans le premier cas vient en forme de fraction reduite à moindres termes, & dans les autres cas en forme de fraction équivalente & réductible.

Soit presentement les deux nombres donnez inégaux  $a$  &  $a+b$ , le double de la somme de leurs quarréz est  $4aa+4ab+2bb$ , qu'il faut partager en deux quarréz. Je scay par le Lemme précédent que les deux côtez qui satisfont sont  $2a+b$  somme, &  $b$  difference: mais ces deux côtez qui satisfont arithmetiquement ne peuvent satisfaire geometriquement, parceque la plus grande diagonale doit être plus petite que la somme des deux côtez joints, c'est-à-dire plus petite que  $2a+b$ . Cependant pour résoudre ce Problème dans toute son étendue, je fais réflexion que des deux nombres cherchez, l'un sera necessairement plus grand que  $2a+b$ , & l'autre plus petit  $b$ ; ou, ce qui est le veritable cas de la question, l'un plus petit que  $2a+b$ , & l'autre plus grand que  $b$ .

Soit pour abreger  $2a+b=c$ , & l'un des nombres cherchez  $c+x$ , & l'autre  $b+\frac{dx}{e}$ , la somme des quarréz sera  $cc+2cx+xx$  &  $bb+\frac{2bdx}{e}+\frac{ddxx}{ee}=cc+bb$ ; donc  $x=\frac{+2bde+2cee}{dd+ee}$ , & le Problème est résolu.

Dans le premier cas où l'on suppose l'un des nombres

$c + x$ , & l'autre  $b - \frac{dx}{x}$ , on aura  $x = \frac{2bde - xce}{dd + ce}$ ; & afin que la résolution soit positive dans ce cas, on peut prendre  $e$  à discrétion; mais il faut que  $d$  soit plus grand que  $\frac{ce}{b}$ , & plus petit que  $\frac{ce}{b} + Vee + \frac{cee}{bb}$ . Si l'on prend  $d$  à discrétion, il faut que  $e$  soit plus petit que  $\frac{bd}{c}$ , & plus grand que  $V\frac{dce}{bb} + dd\frac{cd}{b}$ .

Dans le second cas où l'on suppose l'un des nombres  $c = x$  & l'autre  $b + \frac{dx}{c}$ , on trouve  $x = \frac{2cee - 2bd}{dd + ce}$ . On peut de même prendre arbitrairement tel nombre qu'on voudra pour  $d$  ou pour  $e$ , & les restrictions respectives sont réciproques aux précédentes.

C'est ainsi qu'ayant pris pour côtéz d'un parallelogramme obliquangle les côtéz 1 & 2, j'ay trouvé pour le cas plus simple les diagonales  $1\frac{1}{2}$  &  $2\frac{1}{2}$ ; en entiers les quatre nombres 5, 10, & 13.

## EXPERIENCES

Sur les vertus de la racine de la grande Valeriane sauvage.

PAR M. MARCHANT.

**I**L y a plusieurs années que lisant le Livre intitulé: *Phytobasanos* de Fabius Columna, Botaniste celebre, je remarquay qu'il assuroit que la racine de la grande Valeriane sauvage, mise en poudre, est un excellent spécifique contre l'épilepsie; & que non-seulement il avoit vû plusieurs épileptiques guéris par l'usage de la poudre de cette racine, mais qu'ayant été lui-même sujet à l'épilepsie, il en avoit été guéri par ce remède. 1706. 4 Aoust.

L'autorité de ce sçavant homme me fit naître l'envie d'expérimenter un remède si utile. Je tiray hors de terre,

au mois de Mars , des racines de cette plante , je les préparay de la maniere que Fabius Columna le prescrit , & j'en donnay une prise à un garçon de quinze à seize ans , qui de puis l'âge de sept ans tomboit presque toutes les semaines dans des symptomes épileptiques , perdant connoissance , & écumant de la bouche ; mais ces paroxismes ne duroient pas plus de sept ou huit minutes. Ce garçon après avoir pris ce remede , fut dix-huit jours sans tomber dans ses accidens ordinaires : mais après ce tems , il retomba deux fois en huit jours , avec cette difference que chaque accès ne dura qu'environ quatre minutes. Je conjecturai que le remede avoit seulement remué quelques humeurs , qui avoient changé & suspendu le cours de la maladie ; ce qui me détermina à le purger ; & ensuite je lui donnai une seconde prise de la même poudre. Cette premiere purgation n'ayant presque rien évacué , trois jours après il eut un accès d'épilepsie , qui m'obligea de le purger encore une fois ; & le troisième jour suivant , je lui fis prendre un gros & demi de la même poudre , qui lui procura une sueur considerable , & lui fit vider par bas plusieurs vers. Quatre jours après , je lui fis encore prendre un gros de cette poudre , qui le fit seulement suer. Depuis ce tems-là , il y a environ six ans , il a jouï d'une santé parfaite.

Un de mes amis me pria de donner ce remede à une autre personne âgée de vingt ans & quelques mois , qui avoit été attaquée d'épilepsie depuis la quatorzième année de son âge , & qui depuis ce tems-là tomboit régulièrement tous les mois dans des accidens dont les paroxismes étoient si violens , qu'on l'a vû dans son dernier accès se débattre contre terre , & se rouler de bout en bout d'une court de neuf à dix toises de long , en écumant de la bouche , & perdant tout sentiment pendant plus d'une demi-heure. Ayant vû ce malade , qui avoit encore la tête pleine de contusions par sa dernière chute , je crûs qu'ayant que de rien entreprendre , il étoit à propos de le faire saigner ; ce qui fut fait le même jour. Trois jours après je le purgeay ; & l'ayant laissé reposer trois autres jours , je lui

fis prendre deux gros de poudre de la racine de la même plante, qui le lâcherent un peu pendant la matinée ; sur l'après-midi il sua assez considérablement, & rendit quantité de vers ; & les quatre jours suivans, il me parut beaucoup plus gai qu'il n'avoit de coutume : le cinquième jour je lui fis encore prendre un gros de cette même poudre, qui le fit moins suer que la première fois, & lui fit encore jeter quelque vers. Il parut fort abattu par cette dernière prise, mais depuis ce tems-là (il y a environ deux ans) il n'a ressenti aucune attaque d'épilepsie, & il a entièrement recouvré sa santé.

J'ay donné avec succès ce remède à plusieurs enfans & à des personnes déjà avancées en âge : à quelques-uns il a reculé l'accès ; à d'autres il en a diminué la violence ou la durée : ce qui n'est pas peu de chose dans une maladie dont la guérison ou même le soulagement ont toujours paru si douteux : c'est encore un grand avantage que l'on peut tenter à tout âge ce remède, qui, à ce que je sçache, n'a jamais produit de mauvais effets. Une personne de cette Compagnie à qui j'avois indiqué ce remède, peut rendre témoignage qu'il a eu la satisfaction de voir qu'un épileptique à qui il l'avoit lui-même donné, en a été non-seulement foulagé, mais même parfaitement guéri.

Fabius Columna ordonne que l'on tire hors de terre les racines de cette plante, qui est la *grande Valeriane sauvage* inculte, avant qu'elle commence à montrer ses tiges, c'est-à-dire dans le mois de Mars ; qu'après les avoir fait secher on les reduise en poudre, & que l'on donne au malade une demi-cuillerée de cette poudre, c'est-à-dire environ un gros & demi, dans du vin, de l'eau, du lait, ou dans quelqu'autre liqueur convenable, une ou deux fois seulement, suivant la commodité ou l'âge du malade. Pour moy j'ay toujours donné cette poudre, autant que j'ay pû, dans un verre de vin blanc, & j'ay souvent disposé le malade par quelques purgations ou par quelqu'autres préparations qui dépendent de la prudence & du jugement de ceux qui ordonnent ce remède.

*Phytobasanos*, p. 120.

## E X T R A I T

*Des Observations faites au mois de Décembre 1705 par  
M. Bianchini, sur des feux qui se voient sur une  
des Montagnes de l'Apennin.*

PAR M. CASSINI le fils.

1706.  
7. Aoust.

EN allant de Bologne à Florence, on voit ordinairement dans le territoire de Pietra Mala des flâmes sur la pente d'une montagne : M. Bianchini les ayant vûës plusieurs fois de loin, voulut enfin s'en approcher pour les considérer de près. Voici comme il en parle.

Après que j'ay vû naître une flâme vive, qui dure sans interruption & sans être nourrie d'aucune autre matiere pour l'entretenir, que de celle que la nature fournit par le moïen de la situation des lieux souterrains, qui se trouvent dans la Montagne de Pietra Mala; je ne doute point que l'usage du feu pour nos arts n'ait été communiqué & rendu durable par quelqu'une de ces minières vives & de ces sources de flâmes sensibles que j'ay observées dans cette Montagne. Voici la description de ce feu de Pietra Mala, auprès duquel je trouvay de la neige & de la glace, qui n'étoient éloignées que de quatre pieds des flâmes qui sortoient du terrain même, sur lequel la neige & la glace, qui n'étoient pas encore fondues, restoient jusqu'à l'heure de midy. J'y allay accompagné de plusieurs étrangers pour bien examiner toutes choses, menant un guide avec nous, qui nous devoit changer de chevaux au sommet de la Montagne de Pietra mala. Nous montâmes à pied du lieu de cette poste vers le midy par l'espace de deux milles ou environ, laissant à main droite le grand chemin, & descendant de l'autre côté de la Montagne par un sentier étroit, qui se terminoit à une plaine, qui pouvoit être cultivée. Nous vîmes dans le milieu de cer-  
tains



tains champs labourez un chemin où il s'élevoit plusieurs petites flâmes, qui paroïssent au-dessus de la terre élevées d'environ un demi pied, comme si elles avoient été nourries & entretenues par du bois & du charbon. Le lieu où naissent ces flâmes est large de huit pieds Romains, & long de seize; & il est aussi facile de le mesurer que les autres endroits de ce champ, parce qu'on peut marcher facilement à l'entour & sur la flâme même, sans craindre de trouver quelque ouverture ou caverne, comme sur le Mont Vesuve, les parties de ce terrain étant en cet endroit sans aucune division, très-contiguës les unes aux autres, avec cette différence cependant que la veine du feu qui se trouve là affermit un peu plus les motes de terre & les pierres qui s'y trouvent, en communiquant aux unes & aux autres une couleur plus brûlée que celle qui se trouve dans les motes de terre, & les autres pierres qui en sont voisines. Je dis la veine du feu, parce que je ne sçais pas appeller autrement cette matiere inconnue, qui produit en vingt endroits differens toutes ces flâmes que l'on voit dispersées de part & d'autre, dans un espace à peu près de cent trente pieds en quarré, comme je le vis alors. Je crus qu'il étoit inutile de les compter chacune en particulier, parce que chacun peut faire sortir des flâmes de tout cet espace, comme il le voudra, en deux manieres, par le moien d'un bâton ou de quelque autre chose dont on frappera légèrement le terrain, ou bien en jettant seulement sur ce lieu-là de la paille, du papier, ou quelque autre matiere combustible.

Cependant lorsque ces matieres combustibles étoient posées dans un endroit éloigné de ces flâmes, cela n'empêchoit pas qu'elles ne prissent feu, à peu près de même que quand on jette du papier ou du linge sur du charbon ou du fer allumé, & enfin nous vîmes une de ces flâmes vives, laquelle ayant consumé les choses que l'on y avoit jetées, ne laissoit pas cependant de durer & d'être nourrie sans autre matiere que celle que le terrain fournissoit.

Nous jetâmes sur ces flâmes ardentes des branches

d'épines & autres arbrisseaux , que nous avions ramassées pour cela dans le chemin , & elles brûlerent de la même maniere que si on les avoit jettées dans le feu ordinaire. Ensuite remarquant qu'à deux pieds près de la flâme, il y avoit quelques monceaux de neige qui n'étoit pas fondue , & que l'on trouvoit sous la neige éloignée de quatre pieds de la flâme des morceaux de glace ; non-seulement je me souvins d'appliquer beaucoup mieux à cette merveille ce que dit le Poëte en admirant le Mont Gibel en Sicile , avec ses neiges & ses feux : *Scit nivibus servare fidem* ; mais je voulus encore faire l'experience de jetter sur ces flâmes de la neige & de la glace. Les jetter & les voir se résoudre en eau dans un instant , ce fut la même chose : de même que si on les avoit jettés sur un brasier bien allumé. La flâme n'en fut pas éteinte pour cela , au contraire elle en parut plus vive , & s'étendre avec plus de vitesse & de force sur les pierres voisines & sur celles qui se trouvoient dans son chemin.

En faisant ces experiences dans tous les environs de ce lieu , nous sentîmes une odeur très-agreable , qui nous parut sortir de tout ce terrain allumé , à peu près comme si nous eussions été près d'un feu nourri de quelque bois odoriferant , comme pourroit être le Calambou : & cette odeur se rendoit plus sensible , lorsqu'on se mettoit à l'opposite du Soleil , & au devant de quelque petit vent qui souffloit au visage , & qui augmentoit la flâme. Je pris quelques morceaux de ces pierres qui étoient proches de la flâme , & une poignée de la poussiere de ce terrain qui étant frottez l'une contre l'autre faisoient de la flâme , & avoient la même odeur que celle dont nous avons parlé ci-devant. Ces pierres étoient si chaudes au commencement que l'on avoit de la peine à les souffrir dans la main ; & en les portant sur nous , elles conserverent pendant un quart-d'heure cette chaleur , & beaucoup plus long-tems cette odeur agreable que nous avions senti sur le lieu même. Après avoir fait ces experiences , qui me parurent suffisantes pour contenter notre curiosité touchant l'his-

toire de la premiere communication du feu , & qui peuvent fournir de matiere suffisante aux Sçavans de philosopher sur la cause d'un effet si merveilleux de la nature , nous reprîmes notre droit chemin vers Fiorenzole.

*Reflexions sur les Observations de M. Bianchini.*

Ce feu observé en Toscane par M. Bianchini , a un grand raport à celui qui a été observé en Dauphiné par M. Diculamant , & dont il est parlé dans l'Histoire del'Academie de l'an 1669 page 23. Le terrain que ce feu occupe est de six pieds de long sur 4 de large. Il consiste dans une flâme legere errante telle qu'une flâme d'eau de vie.

On ne voit point de matiere qui puisse servir d'aliment à la flâme. On assure que le feu est plus ardent en hyver & dans un tems humide , qu'il diminué peu à peu dans les grandes chaleurs.

Ces deux feux ont cela de commun qu'ils sont sur le penchant d'une Montagne , & paroissent sortir tous deux de la terre, sans qu'il y ait aucune fente qui puisse avoir communication avec quelque caverne inferieure.

Ils augmentent aussi tous les deux par l'humidité & par le froid, comme il a été remarqué dans le feu du Dauphiné, ce qui se rapporte à l'effet de la neige , qui jettée sur la flâme de Picra Mala , la fait augmenter pendant qu'elle se fond en eau.

La difference consiste dans l'odeur , qui dans le feu du Dauphiné est de souffre , au lieu que celle qui exale du terrain de Pictra Mala est comme aromatique.



## TRAITE' DES ROULETTES,

Où l'on démontre la maniere universelle de trouver leurs touchantes, leurs points de recourbement ou d'inflexion, & de reflexion ou de rebroussement, leurs superficies & leurs longueurs, par la Geometrie ordinaire.

*Avec une methode generale de réduire toutes les Lignes courbes aux Roulettes, en déterminant leur generatrice ou leur base, l'une des deux étant donnée à la volonté.*

PAR M. DE LA HIRE.

### DEFINITIONS.

1706.  
21. Juillet.

J'appelle une *Roulette* la ligne qui est décrite par un point d'une superficie plane, qui est toujours appliquée sur une autre superficie plane, pendant qu'une ligne droite ou courbe telle qu'elle puisse être, que j'appelle la *Generatrice* de la *Roulette*, & qui est posée sur la même superficie où est le point, roule sur une ligne droite ou courbe qui sera la *Base* de la *Roulette*, & qui est posée sur l'autre superficie.

Il est évident par cette description ou generation de la roulette, que sa base sera toujours égale à la ligne droite ou courbe qui en est la generatrice, ou à toute cette Courbe ou à sa partie, ce qui suit du roulement de la generatrice sur la base considéré comme immobile.

Je n'entends pas que cette base soit terminée par la rencontre de la *Roulette*, mais qu'elle est terminée par deux points tels qu'on voudra de la droite ou de la Courbe generatrice, dans lesquels elle touche la base au commencement & à la fin de sa description de la *Roulette*, ou de quelqu'une de ses parties; car on peut n'en considerer

qu'une partie, & de plus il faut remarquer qu'il y a des Roulettes qui sont infinies, ce qui dépend de la Courbe generatrice ou de la nature de la base.

Il n'y a point de Courbe qu'on ne puisse considérer comme une roulette, laquelle sera formée par une ligne droite ou courbe qui lui servira de generatrice.

Tous les Geometres sçavent déjà que toute ligne courbe proposée peut-être décrite par l'évolution d'une ligne courbe, & la ligne courbe proposée aura pour sa generatrice une ligne droite, laquelle roulera sur la Courbe qui la décrit par son évolution, & qui lui sert de base, & le point décrivant sera un des points de la generatrice prolongée ou non prolongée.

Mais je dis encore, 1<sup>o</sup>. Que si l'on propose quelque ligne que ce soit droite ou courbe pour une roulette, & qu'on donne aussi de position une ligne droite ou courbe pour servir de base à cette roulette, on pourra déterminer la generatrice de la Roulette proposée.

2<sup>o</sup>. Que si l'on propose quelque ligne que ce soit pour une roulette, & qu'on donne quelque ligne droite ou courbe pour sa generatrice, & dans quelle position on voudra, où un point du plan de la generatrice est donné de position par rapport à la generatrice, & ce point étant sur la Roulette dans cette position de la generatrice, on pourra déterminer la base & sa position.

Mais avant que d'entrer dans la solution de ces Problèmes, je démontrerai plusieurs propriétés particulieres des Roulettes en general, tant de leur touchantes que de leurs points de recourbement & de reflexion, avec des methodes pour connoître les longueurs & les superficies de ces Courbes sans me servir de calcul; ce que j'avois déjà expliqué en partie dans un Memoire que je lus à l'Academie au mois de Juin 1698, & qui n'a point été imprimé.

Le point qu'on appelle *Flexus contrarius*, de Recourbement ou d'*Inflexion*, est celui où une ligne courbe se tourne en deux sens contraires; & le point de *Reflexion* ou de Rebrous-

sement est celui où elle paroît comme se réfléchir & retourner vers le même côté où elle étoit.

## DETERMINATION

*Des touchantes des Roulettes, & de leurs points de recourbement & de reflexion.*

I. Si dans quelque position que soit la ligne generatrice  $EAB$  d'une roulette sur la base  $AY$  qu'elle touche au point  $A$ , on mene une ligne droite  $AP$  du point touchant  $A$  au point décrivant  $P$ , la perpendiculaire  $PF$  à cette ligne  $AP$  par le point  $P$ , sera touchante de la roulette dans ce même point  $P$ .

II. Si du point  $A$  on mene la ligne  $AC$  qui touche en  $C$  la ligne  $NC$ , laquelle décrit par son évolution la generatrice  $EAB$ ; & de même si du point  $A$  on mene la ligne  $AO$  qui touche en  $O$  la ligne  $MO$  qui décrit aussi par son évolution la base  $YA$ , & comme  $CA$  &  $OA$  sont toutes deux perpendiculaires à la generatrice & à la base qui se touchent en  $A$ , elle ne feront qu'une même ligne droite  $CAO$  par le Lemme suivant; c'est pourquoy si l'on fait comme  $CO$  à  $CA$ , ainsi  $AO$ , à  $AV$ , & que sur  $AV$  comme diametre on décrive le cercle  $AXV$ , on connoitra par son moïen de quel côté la convexité de la roulette  $SPR$  doit être tournée à l'égard de sa touchante  $PF$  & du point  $A$ . Car si le point  $P$  qui décrit la roulette est au dedans du cercle  $AXV$ , la convexité de la roulette au point  $P$  sera vers le point  $A$ , & la roulette sera au dessus de sa touchante  $PF$  par rapport au point  $A$  comme dans cette Figure. Au contraire si le point  $P$  décrivant est hors le cercle  $AXV$  dans cette même position de la generatrice & de la base, la concavité de la roulette sera tournée vers  $A$ , & sa touchante  $PF$  sera au dessus par rapport au point  $A$ . Enfin si le point décrivant se trouve sur le cercle, le point  $P$  décrivant sera dans le recourbement de cette roulette.

III. Si sur le cercle  $AXV$  on prend quel point on vou-

dra pour le point décrivant d'une roulette dont la generatrice soit dans la position  $EAB$  touchant la base  $AO$  au point  $A$ ; je dis que ce point sera celui du recourbement de la roulette décrite par ce point. Ainsi ce cercle sera le lieu du recourbement de toutes les roulettes décrites sur cette base, & par cette generatrice quand elle touche sa base au point  $A$ , les roulettes étant décrites par les points de ce cercle.

Mais il faut remarquer que dans les mouvemens de la même generatrice sur la même base posée immobile, le cercle comme  $AXV$  change de grandeur & de position; ce qui est évident par sa description, ce qui fait qu'une infinité de points du plan de la generatrice peuvent être les points de recourbement de roulettes décrites par ces points.

Il s'en suit donc aussi que les touchantes des roulettes dans tous les points de recourbement, pour une même position du cercle  $AXV$ , passeront toutes par l'extrémité  $V$  de son diamètre  $AV$ , puisque ces touchantes feront toujours des angles drois avec celles qui seront menées du point de contact  $A$  de la base & de la generatrice, aux points de la circonference du cercle.

I V. La figure generatrice étant donnée, & le point décrivant étant aussi donné de position sur le plan de cette figure, on peut déterminer le point sur la figure generatrice lequel touchant la base, le point décrivant sera dans le recourbement de la roulette. Et l'on peut aussi déterminer l'espace sur le plan de la generatrice, dans lequel ayant pris quel point on voudra pour le point décrivant, la roulette aura un recourbement, & le point décrivant étant pris hors cet espace, la roulette n'aura point de recourbement.

V. On déterminera aussi le point de reflexion de la roulette si elle peut en avoir un, par rapport à la longueur de la generatrice & à la position du point décrivant, lequel sera toujours celui où se trouve le point décrivant lorsque la plus petite ou la plus grande ligne amenée du point dé-

crivant à la generatrice, sera perpendiculaire sur la base; ou bien, ce qui est la même chose, lorsque le point de rencontre de la plus petite ligne menée du point décrivant à la generatrice & de la generatrice, sera sur la base.

*Démonstration des Touchantes.*

Soit deux points  $A$  &  $E$  sur la base  $EAG$  d'une roulette lesquels soient indéfiniment proche l'un de l'autre, & deux perpendiculaires  $AO$ ,  $EO$  à la base en  $A$  & en  $E$  qui se rencontrent en  $O$ . Soit aussi deux points  $A$  &  $B$  sur la generatrice autant éloignés l'un de l'autre que les points  $AE$  sur la base; & soit encore les perpendiculaires  $CA$ ,  $CB$  sur la generatrice lesquelles se rencontrent en  $C$ . Soit enfin le point  $P$  qui décrit la roulette quand la generatrice roule sur la base,

Lorsque les lignes  $OA$ ,  $CA$  seront jointes ensemble, le point décrivant  $P$  sera la roulette; & lorsque les lignes  $OE$ ,  $CB$  seront aussi jointes ensemble directement en  $OEQ$ , & le point  $B$  de la generatrice sur le point  $E$  de la base, le point  $P$  décrivant étant parvenu en  $S$ , aussi le point  $S$  sera la roulette.

Mais ayant mené les cordes  $AE$ ,  $AB$  qui sont égales entr'elles par la supposition, & qu'on peut regarder comme les arcs puisqu'on les a pris indéfiniment petits & égaux entr'eux; je considere le mouvement du point  $P$  de la roulette à son point  $S$ , qui est aussi celui de la ligne  $BC$  en  $EQ$ , comme étant composé de deux mouvemens, dont le premier sera lorsque la corde  $AB$  est jointe à la corde  $AE$ , dans lequel mouvement la ligne  $AC$  se sera meüe en  $AM$ , & par consequent le point  $C$  sera passé en  $M$  & la ligne  $BC$  en  $EM$ ; donc l'angle  $CAM$  sera égal à l'angle  $BAE$ . Mais aussi par le même mouvement le point  $P$  sera venu en  $Z$ , & l'angle  $PAZ$  sera aussi égal à l'angle  $BAE$  & à l'angle  $CAM$ .

Le second mouvement est celui que fait la ligne  $EM$  pour venir en  $EQ$  où ell est jointe directement à la ligne  $OE$ , & par ce mouvement le point  $Z$  se sera mü pour ve-

nir



nir en  $S$ , la ligne  $EZ$  s'étant mûe en  $ES$ , en faisant l'angle  $ZES$  égal à l'angle  $MEQ$ . D'où il suit que les deux angles ensemble  $PAZ$ ,  $ZES$  sont égaux au seul angle  $CEQ$ ; car on regarde les points  $B$  &  $E$  comme un seul point.

Mais par la construction, puisque les lignes  $AB$ ,  $AE$  sont égales entr'elles & indéfiniment petites, les angles  $CBA$ ,  $CAB$  seront égaux, de même que les angles  $OEA$ ,  $OAE$ ; & par conséquent l'angle  $MAC$  sera égal à l'angle  $MEQ$  & égal à  $BAE$ . Donc aussi leurs égaux  $PAZ$ ,  $ZES$  seront égaux entr'eux & à l'angle  $BAE$ . Et ce sera toujours de même quelque disposition que les lignes  $AO$ ,  $EO$ , &  $AC$ ,  $BC$  aient entr'elles, soit qu'elles concourent comme dans cette Figure les unes au-dessus, & les autres au-dessous des cordes ou de la base de la roulette, soit qu'elles concourent d'un même côté, & soit enfin qu'il y en ait de parallèles entr'elles, ce qui ne fera que des cas particuliers de cette démonstration générale.

Maintenant il est facile à voir que puisque les deux angles  $PAZ$ ,  $ZES$  sont égaux entr'eux, & ensemble égaux au seul angle  $CEQ$ , si l'angle  $AZE$  ou son égal l'angle  $APB$ , car le triangle  $APB$  dans le mouvement s'est placé en  $AZE$ , est égal à l'angle  $CEQ$ , les lignes  $AP$ ,  $ES$  seront parallèles entr'elles; & par conséquent si par le point  $P$  on mène la ligne  $PF$  perpendiculaire à  $PA$ , le point  $S$  sera dans la ligne  $PF$ . Mais si l'angle  $AZE$  est plus petit que  $CEQ$ , le point  $S$  se trouvera au-dessous de  $PF$ ; au contraire s'il est plus grand il sera au-dessus.

On voit par-là que la position des points de la roulette comme  $S$  par rapport au point  $P$  sur la ligne  $PF$  laquelle est perpendiculaire à  $AP$ , dépend de la grandeur de l'angle  $APB$  par rapport à l'angle  $CBQ$ , ou bien des deux angles  $OCB$ ,  $COE$  qui sont ensemble égaux à l'angle  $CBQ$  ou  $CEQ$ , puisque les points  $B$  &  $E$  ne sont considérés que comme un seul point, & que l'angle  $CEQ$  est l'exterieur du triangle  $COE$ .

Maintenant si l'on mène la ligne  $PD$ , qui faisant avec

$AP$  l'angle  $APD$  égal à l'angle  $APD$ , rencontre la generatrice en  $D$ , & qu'on prenne sur la base l'arc  $AG$  égal en longueur à l'arc  $AD$ , & qu'on mene  $OGH$  perpendiculaire à la base en  $G$ , &  $DC$  perpendiculaire à la generatrice en  $D$ , les points  $D$  &  $G$  n'étant considérés que comme un seul point, on fera la même démonstration que cy-devant, en sorte que si l'angle  $CGH$  est égal à l'angle  $DPA$  & égal à l'angle  $APB$  son égal par la construction, l'angle  $CEQ$  étant aussi égal à l'angle  $APB$ , il est évident que le point  $R$  de la roulette qui sera déterminé comme le point  $S$ , sera aussi sur la ligne  $FPF$ ; & par conséquent la ligne  $PF$  touchera la roulette en  $P$ ; car en general si une ligne droite rencontre une Courbe en deux points qui soient indéfiniment proche l'un de l'autre, la droite touchera la Courbe dans ces points considérés comme un seul point: mais si l'angle  $CGH$  est plus petit que  $DPA$ , lorsque l'angle  $GEQ$  est aussi plus petit que l'angle  $APB$ , le point  $R$  sera au dessous de  $FPF$  comme le point  $S$ ; & par conséquent la ligne  $FPF$  touche la roulette en  $P$  qui en est un point. Et si l'angle  $CGH$  est plus grand que l'angle  $DPA$ , & que l'angle  $CEQ$  soit aussi plus grand que l'angle  $APB$  égal à  $DPA$ , le point  $R$  de la roulette sera au-dessus de la ligne  $FPF$  comme le point  $S$ , &  $FPF$  touchera la roulette en  $P$ .

Mais s'il arrivoit que l'angle  $CEQ$  étant égal à l'angle  $APB$  le point  $S$  étant sur  $PF$ , & que l'angle  $CDH$  fût ou plus grand ou plus petit que l'angle  $DPA$ , le point  $R$  étant alors au-dessus ou au-dessous de  $PF$ , ce qui peut arriver par la disposition des perpendiculaires  $CD$ ,  $OG$ , alors la ligne  $FPF$  ne laisseroit pas d'être touchante de la roulette, mais le point  $P$  en seroit le recourbement, puisque dans les points de la roulette entre  $P$  &  $R$  ou  $P$  &  $S$ , il ne pourroit arriver que ce qu'on vient de démontrer, où une ligne comme  $FPF$  toucheroit la roulette dans son point  $P$ ; car les autres points d'un côté & d'autre de  $P$  à une distance indéfiniment petite demeureroient au-dessus d'un côté & au-dessous de l'autre de la ligne  $FPF$ , le

recourbement n'étant que dans un point, à moins que toute la roulette ne fut une ligne droite, auquel cas tous ces points seroient des recourbemens.

Il s'ensuit donc de ceci que si l'angle  $CEQ$  est égal à l'angle  $APB$ , & le point  $S$  qui doit être indéfiniment proche de  $P$  étant sur la ligne  $PF$ , ce point  $P$  sera le recourbement de la roulette qu'il a décrit.

Ce que je viens d'expliquer touchant la position de la roulette par rapport au point  $A$ , ne doit s'entendre que lorsque les points  $C$  &  $O$  qui sont les rencontres des perpendiculaires à la generatrice & à la base, sont des deux côtés du point  $A$ ; mais s'ils sont tous deux du même côté, ce sera tout le contraire, ce qui ne change rien à la démonstration.

*Démonstration du point de recourbement.*

Il sera maintenant facile de déterminer la position du point  $P$  quand il est dans le recourbement de la roulette, si elle peut en avoir un, ce qui paroît dans la solution de ce Problème. Car le point  $C$  étant le concours de deux perpendiculaires en  $A$  & en  $E$  indéfiniment proche l'une de l'autre sur la generatrice; ou bien, ce qui est la même chose, le point  $C$  étant le point touchant de la ligne menée du point  $A$  à la ligne qui décrit par son évolution la generatrice, si sur le diamètre  $AC$  on décrit un demi-cercle  $CXA$ , quand le point  $P$  décrivant sera dans la circonférence de ce cercle, il sera aussi dans le recourbement de la roulette qu'il décrit, pourvu que la base soit une ligne droite: car alors l'angle  $CEQ$  qui sera égal à l'angle  $ACE$ , sera aussi égal à l'angle  $APE$ , puisque le point  $P$  est dans la circonférence du cercle  $APC$ , & que le point  $E$  peut être considéré comme étant sur la generatrice, sur la base de la roulette & sur le cercle  $CA$ , à cause que  $AB$  est une partie indéfiniment petite, & que le cercle touche la base qui est une ligne droite dans le point  $A$ , laquelle touche aussi la generatrice dans ce même point  $A$ .

Il faut remarquer que la position & la grandeur du cercle  $AXC$  ou  $AXV$  change dans toutes les différentes positions de  $CO$ , & que dans chaque position il fera connoître seulement si le point  $P$  décrivant est dans le recourbement de la roulette, & si la roulette a sa convexité ou sa concavité tournée vers  $A$ : mais il sera le lieu du point de recourbement de toutes les roulettes formées sur la même base & sur la même generatrice dans la position où elles se touchent en  $A$ , quand les points décrivans y seront placés. Ce n'est pas que d'autres points décrivans ne puissent donner des roulettes qui auront des recourbemens, mais ce sera hors cette position, comme je l'explique plus au long dans le cas suivant.

Fig. 4.

Mais si la base est une Courbe, & que le point  $O$  soit le point touchant de la ligne droite  $CAO$  sur la Courbe qui décrit par son évolution celle de la base, ayant fait comme  $CO$  à  $CA$ , ainsi  $AO$  à  $AV$ , & sur  $AV$  pour diamètre ayant décrit le cercle  $AXV$ , je dis que ce cercle est le lieu du recourbement de la roulette lorsque son point décrivant  $P$  se trouvera sur la circonférence de ce cercle dans cette position de la generatrice & de la base; & quand le point  $P$  sera hors ce cercle, la concavité de la roulette sera tournée vers  $A$ ; au contraire sa convexité sera tournée vers  $A$  quand le point  $P$  sera dans le cercle.

La démonstration en est facile après ce que j'ay démontré; car dans les triangles dont deux des angles sont indéfiniment petits, & par conséquent le troisième indéfiniment grand, on peut considérer que les angles sont entr'eux comme les côtés opposés à ces angles: c'est pourquoy au triangle  $CEO$  le côté  $CO$  est au côté  $CE$  ou  $CA$ , car on les suppose égaux, comme l'angle  $CEO$  ou son supplément  $CEQ$  à l'angle  $COE$ . Mais aussi au triangle  $VOE$  le côté  $OE$  est à  $EV$ , ou bien les lignes  $AO$  à  $AV$  qui leur sont supposées égales, comme l'angle  $OVE$  à l'angle  $VOE$ . Mais à cause que  $CO$  est à  $CA$  comme  $AO$  à  $AV$ , l'angle  $CEQ$  sera à l'angle  $COE$  comme l'angle  $OVE$  à l'angle  $VOE$  ou  $COE$ ; donc l'angle  $CEQ$  sera égal à l'angle  $OVE$  ou  $AVE$ ,

qui sera égal à  $\angle APE$  à cause de la circonférence du cercle  $AXV$ ; & par ce qui a été démontré d'abord les points  $S$  ou  $R$  de la roulette & qui sont indéfiniment proche de  $P$ , seront sur la ligne  $PF$  perpendiculaire à  $AP$ , & par conséquent la roulette sera dans son recourbement en  $P$ ; car si la roulette étoit décrite, & qu'elle coupât le cercle  $AXV$  dans quelque point comme  $P$ , & que ce point fut alors sur le cercle & dans la position où il décrit la roulette lorsque la base & la génératrice se touchent en  $A$  sur  $CO$ , il s'ensuivroit que le point  $P$  de la roulette seroit dans son recourbement: mais si dans cette position de la base & de la génératrice, le point décrivant  $P$  se trouvoit au dedans du cercle  $AXV$ , l'angle  $APE$  seroit obtus, & par ce qui a été démontré d'abord des touchantes, la convexité de la roulette seroit alors tournée vers  $A$ , & ce seroit le contraire si le point décrivant étoit hors le cercle, car ce seroit la concavité de la roulette qui seroit tournée vers  $A$ .

On remarquera aussi qu'on peut placer le cercle  $AXV$ , dont on a déterminé le diamètre  $AV$ , de l'autre côté de  $A$ , & ce sera la même démonstration, ce diamètre étant toujours sur  $CO$ .

On fera la même démonstration pour la roulette dont la courbure de la base aura sa convexité tournée du même côté de celle de la génératrice; car on fera aussi comme  $CO$  à  $CA$ , ainsi  $AO$  à  $AV$ , &  $AV$  sera le diamètre du cercle, qui est le lieu du point décrivant, quand ce point est sur le recourbement de la roulette; & l'on aura dans le triangle  $COE$  le côté  $CO$  au côté  $CE$  ou  $CA$ , comme l'angle  $CEO$  à l'angle  $COE$ . Mais au triangle  $VOE$  le côté  $OE$  est à  $EV$ , ou bien  $AO$  à  $AV$ , comme l'angle  $OVE$  à l'angle  $VOE$ , ou son supplément  $AOE$  qui est le même que  $COE$ . C'est pourquoy l'angle  $CEO$  est à l'angle  $COE$ , comme l'angle  $OVE$  ou  $AOE$  à l'angle  $COE$ , & par conséquent l'angle  $CEO$  sera égal à l'angle  $AOE$  ou à l'angle  $APE$ , & dans la formation de la roulette quand le point  $E$  de la génératrice sera placé sur le point  $e$  de la base, & que le

FIG. 5.

point  $P$  décrivant sera avancé d'un pas, quoiqu'indéfiniment petit, la ligne  $CE$  sera placée sur  $OE$ . *Et c'est ce qu'il falloit démontrer.*

Les différentes positions des points  $O$  &  $C$  à l'égard du point  $A$  ne changent rien à cette démonstration, & l'on peut seulement remarquer que si le point  $O$  ou le point  $C$  sont à distance infinie, le point  $V$  ne laissera pas d'être déterminé, comme si le point  $O$  est à distance infinie, ce qui fait la base en ligne droite au moins dans le point  $A$ ; car le point  $O$  à distance infinie pourroit ne convenir qu'à un point de la base qui seroit celui de son recourbement, & alors par la règle,  $CO$  infinie étant à  $CA$ , comme  $AO$  infinie à  $AV$ , ou bien  $CO$  à  $AO$  qui sont deux infinies, lesquelles ne different que d'une finie  $CA$  pouvant être réputées comme égales, doivent aussi donner  $CA$  &  $AV$  égales; c'est pourquoy le point  $V$  tomberoit au point  $C$ , ce qui revient à ce que j'ay dit de la roulette qui a pour base une ligne droite. De même si le point  $C$  est à distance infinie,  $CO$  infinie est à  $CA$  infinie réputées comme égales entr'elles, comme  $AO$  à  $AV$  qui doivent aussi être égales.

Fig. 6.

Il y a plusieurs cas remarquables dans ces sortes de roulettes; mais je ne m'y arrêteray pas à cause que ce ne sont que des déterminations particulieres, si ce n'est à celui-cy, où la base & la generatrice sont deux cercles dont les convexités sont tournées du même côté, & dont le diametre de la base est double de celui de la generatrice; car alors par la règle le point  $V$  tombera au point  $O$  qui est le centre de la base, & par consequent le cercle qui est le lieu du recourbement de la roulette sera le même que le generateur; de sorte que si le point décrivant est sur le cercle generateur, toute la roulette sera un recourbement, c'est-à-dire, que ce sera une ligne droite: car dans toutes les différentes positions du cercle generateur le point décrivant  $P$  sera toujours sur le même cercle  $AVX$ .

Mais si le point décrivant est au dedans ou au dehors

du cercle generateur, il est évident que la roulette ne peut avoir de recourbement; car ce point ne pourra jamais se trouver sur le cercle generateur qui est le même que *AX* dans toutes ses différentes positions, & alors si le point *P* est au dehors du cercle generateur, la Courbe de la roulette aura sa concavité tournée vers le point *A* suivant la regle, & s'il est au dedans ce sera sa convexité qui sera tournée vers ce même point *A*.

Mais ce qu'il y a de plus remarquable dans cette espece de roulette, c'est que ce sera toujours une ligne elliptique, hormis quand le point décrivant est au centre *C* du cercle generateur; car ce sera un cercle, & une ligne droite quand il est sur la circonference comme j'ay déjà dit. Voici comme je démontre que ces roulettes sont des Ellipses.

Soit la base *BAEF*, le cercle generateur *OXA* & le point décrivant *P* sur son diametre *OCA*. Ayant fait *AH* égale à *OP*, du point *O* pour centre & pour rayons *OP*, *OC*, *OH* soient décrits les cercles *PI*, *CM*, *HNT*, & le cercle generateur étant transporté en *OZE* & le point décrivant *P* en *R*; je dis que le point *R* est sur la circonference d'une Ellipse dont *OP* est la moitié du petit axe, & *OT* égale à *OH* est la moitié du grand axe. FIG. 2.

Lorsque le cercle generateur est parvenu en quelle position on voudra, comme en *OZE* en roulant sur la base *AE*, son diametre étant placé en *OE*, il est évident que le point *O* sera parvenu au point *L*, ensorte que l'arc *OL* sera double de l'arc *AE*; car le cercle de la base a son diametre double de celui du generateur. Mais aussi l'arc *CM* qui est égal à l'arc *AE*, sera la moitié de l'arc *OL*, & la corde *OL* sera double du sinus *MD* de l'angle *COM*, qui est la moitié de l'angle *OML*. De plus la ligne *MG* parallele à *OC* fera l'angle *OMG* égal à *MOC*, & par consequent *MG* sera perpendiculaire sur *OL* & la coupera en deux également en *G*, & le point *L* sera sur *OT* perpendiculaire à *OA*. Mais puisque le point *O* de la circonference du cercle a été transporté en *L*, le diametre *OCA*

sera transporté en  $LM$ , & le point  $P$  décrivant sera par conséquent sur  $LM$  en  $R$ ,  $LR$  étant égale à  $OP$  ou à  $OI$ : c'est pourquoy  $IR$  sera parallele à  $OL$ . Enfin si l'on mene  $RN$ , le triangle  $MNR$  sera isocelle; car les lignes  $MR$ ,  $MI$ ,  $CP$ ,  $CH$ ,  $MN$  sont égales: c'est pourquoy les points  $IRN$  seront dans la circonference d'un cercle dont  $IN$  est le diametre, & par conséquent l'angle  $IRN$  sera droit. Mais  $IR$  est perpendiculaire à  $OA$ , donc  $RN$  sera parallele à la même  $OA$ . Il est donc évident par la generation des Ellipses que le point  $R$  sera sur l'Ellipse  $PRT$  qui a pour ses demi-axes les lignes  $OP$ ,  $OH$  qui sont les rayons des cercles  $PI$ ,  $HNT$ . *Ce qu'il falloit démontrer.*

Ce sera la même démonstration pour la roulette Elliptique, qui sera décrite par un point placé hors le cercle generateur, & qui peut être toujours sur un diametre

Par ce qui a été démontré cy-devant, il est facile à voir que le changement de grandeur & de position qui peut arriver au cercle qui est le lieu du recourbement des roulettes, ne change rien à ce que j'en ay déterminé, car il ne peut apporter que quelques varietés à la figure de la roulette qui pourra avoir plusieurs recourbemens, ce qu'on pourra connoître facilement par la regle que je viens de donner.

On peut connoître par ce que j'ay démontré jusqu'icy, que dans chaque position du cercle  $AXV$ , toutes les roulettes qui auront leurs points-decrivans dans sa circonference, seront aussi toutes dans leur recourbement dans ces mêmes points. Ainsi l'on peut déterminer quelles seront les roulettes décrites par la même generatrice & sur la même base qui peuvent avoir des recourbemens, puisqu'il dépend des lignes qui par leur évolution décrivent la generatrice & la base, lesquelles déterminent tous les cercles possibles comme  $AXV$  sur ces données; & il est certain que s'il y a quelque espace déterminé où se trouvent ces cercles, ce sera aussi dans cet espace où tous les points qu'on y prendra pourront décrire des roulettes qui  
auront



auront un ou plusieurs recourbemens ; mais que hors cet espece les points décrivans ne donneront point de roulettes qui aient des recourbemens. On en verra un exemple dans ce qui suit, où je démontre comment on peut déterminer sur la generatrice le point où elle doit toucher la base, pour faire que le point décrivant soit dans son recourbement, la generatrice & la base étant données, & la position du point décrivant sur le plan de la generatrice.

FIG. 8.

Soit donc, par exemple, la parabole  $ABD$  pour la generatrice d'une roulette, dont la base est le cercle  $LAM$  qui a pour centre le point  $O$ , & le sommet de la parabole touchant le cercle  $LM$  au point  $A$  ; soit aussi la ligne courbe  $CKG$  qui décrit la parabole par son évolution. Le point  $O$  represente aussi la ligne qui décrit le cercle par son évolution. C'est-pourquoy si de tous les points de la Courbe  $CKG$  on mene des touchantes à cette Courbe, ou des perpendiculaires à la parabole, comme  $KB$ ,  $GD$ , & qu'on les prolonge en  $E$  & en  $F$ , en sorte que  $BE$ ,  $DF$  soient égales à  $AO$  qui seront les perpendiculaires menées de la ligne  $O$  qui décrit le cercle par son évolution, jusqu'aux points du cercle qui répondront aux points  $B$  &  $D$  de la parabole quand elle roulera sur  $AM$ , ces lignes droites  $KE$  &  $GF$  représenteront celles qui touchent les deux lignes qui forment la generatrice & la base par leur évolution, & qui passent par le point commun touchant de la base & de la generatrice ; ce qui est facile à connoître par ce que j'ay expliqué cy-devant.

Si l'on veut donc maintenant trouver les diametres des cercles qui seront le lieu des recourbemens des roulettes lorsque le point décrivant y sera placé, il faut faire par la regle comme  $CO$  à  $CA$ , ainsi  $AO$  à  $AV$  ; & comme  $KE$  à  $KB$ , ainsi  $BE$  à  $BI$  ; & de même comme  $GF$  à  $GD$ , ainsi  $DF$  à  $DH$ , & les lignes  $AV$ ,  $BI$ ,  $DH$  seront les diametres des cercles  $VA$ ,  $BI$ ,  $DH$  qui sont le lieu qu'on cherche, Mais aussi il est facile à voir que tous les diametres de ces cercles seront toujours plus petits que  $OA$ , puisque le se-

cond terme de la proportion est toujours plus petit que le premier lorsque la base a sa convexité tournée vers celle de la parabole, & par conséquent le troisième terme qui est toujours égal à  $AO$  dans cet exemple sera plus grand que le quatrième.

On déterminera donc par le moyen de ces cercles l'espace où le point décrivant  $P$  doit être sur le plan de la parabole pour faire que la roulette ait un recourbement. Cet espace sera renfermé entre la parabole, & la Courbe qui touchera tous les cercles  $AV$ ,  $BI$ ,  $DH$ , qui seront décrits d'un côté & d'autre de l'axe de la parabole. Il est donc évident que si le point décrivant  $P$  est dans cet espace, il rencontrera un de ces cercles dont l'extrémité du diamètre sur la parabole en déterminera le point où elle doit être placée sur la base pour faire que ce point décrivant soit sur le recourbement. Mais si le point décrivant est hors cet espace, la roulette n'aura point de recourbement, ce qui suit des démonstrations précédentes.

Mais si le point décrivant  $P$  est donné de position avec un point comme  $B$  sur la parabole, & qu'on demande le diamètre de la base circulaire pour faire en sorte que lorsque le point  $B$  la touchera, le point  $P$  soit dans le recourbement de la roulette; il n'y aura qu'à se servir de la converse de la proposition générale, & mener la ligne droite  $PB$ , & par le point  $P$  la ligne  $PQ$  perpendiculaire à  $BP$ , laquelle rencontrera au point  $Q$  la ligne  $BK$  perpendiculaire à la parabole en  $B$ , en sorte que si l'on fait ensuite comme  $KQ$  à  $KB$  ainsi  $KB$  à une quatrième  $KR$ , le point  $R$  sera le centre du cercle de la base, lequel aura pour rayon  $RB$ . La grandeur  $KR$  peut être prise indifféremment d'un côté & d'autre de  $K$  sur  $KB$ , pour y déterminer le centre  $R$  du cercle de la base qui aura son rayon  $KB$ ; & il est évident qu'il y aura plusieurs cas particuliers qui naîtront des différentes grandeurs données. Et si le point  $Q$  tomboit au point  $K$ , le cercle de la base auroit son centre à distance infinie, & ce ne seroit qu'une ligne droite.

La démonstration de la construction de ce problème se tire de la règle que j'ay donnée: car si le point  $R$  est le centre de la base, on aura par la règle  $KR$  à  $KB$ , comme  $BR$  à  $BQ$ ; mais en divisant  $KR$  sera à  $BR$  moins  $KR$ , ce qui est égal à  $KB$ , comme  $KB$  à  $BQ$  moins  $KB$ , ce qui est égal à  $KQ$ ; ce qui est la même proportion que je viens de donner pour trouver le point  $R$ .

Ces démonstrations conviennent aussi à toutes les lignes qui sont décrites par l'évolution d'une autre, selon la méthode de M. HUGENS dans son Traité des Pendules, puisque toutes ces sortes de lignes ne sont que des roulettes qui ont pour base la ligne courbe qu'il appelle évoluë, & pour génératrice le cercle infini ou la ligne droite, ce qui est la même chose.

Pour les points de reflexion des roulettes, ils seront déterminés par la plus petite ou la plus grande ligne menée du point décrivant sur la génératrice, lorsque le point de rencontre de cette ligne avec la génératrice sera sur la base; alors le point décrivant sera dans le point de reflexion de la roulette; ce qui paroît par la seule inspection de la figure, & par la formation de la roulette.

*Détermination de la superficie & de la longueur  
des Roulettes.*

On peut par la méthode que j'ay donnée cy-devant déterminer la superficie des roulettes, & la longueur de leurs Courbes. Car si les lignes menées du point décrivant jusqu'aux points de la Courbe génératrice, gardent entr'elles quelque progression connue, les divisions de la génératrice auxquelles ces lignes sont menées en ayant aussi une; & de plus les angles que font les touchantes des lignes qui décrivent par leur évolution la génératrice & la base, étant aussi connus par rapport aux parties de ces lignes, on connoîtra la superficie & la longueur des roulettes par rapport à quelque superficie & à quelque ligne de celles qui sont données dans la génératrice & dans la base.

On verra dans les exemples suivans des applications de cette methode , qui serviront pour toutes les roulettes.

*Exemple I.*

FIG. 9. Soit le cercle  $ABD$  dont le centre est  $C$  pour la Courbe generatrice de la roulette  $DPV$ ; & le cercle  $AEP$  dont le centre est  $O$  pour la base. Les centres  $C$  &  $O$  de ces cercles representent les lignes dont les deux cercles sont évolus : c'est-pourquoy dans toutes les positions de ces deux cercles les lignes qui passeront par ces deux centres, seront perpendiculaires à la generatrice & à la base.

Maintenant dans telle position qu'on voudra du cercle generateur  $AEPD$  sur la base  $AAV$  laquelle il touche en  $A$ , le point décrivant  $P$  étant placé sur la roulette en  $P$ , si la generatrice a roulé sur la base d'une partie indéfiniment petite  $AE$ , la ligne  $CO$  qui joint les centres ou qui touche les Courbes qui décrivent par leur évolution la generatrice & la base, aura passé en  $OEQ$ , & le point décrivant  $P$  sera parvenu au point  $S$ .

Ayant mené comme on a fait pour les touchantes les lignes  $AP$ ,  $EP$ ,  $ES$ , il s'ensuit que la ligne  $EP$  sera parvenuë en  $ES$ , & que l'angle  $PES$  sera égal à l'angle  $CEQ$ . Ainsi dans ce petit roulement il se sera formé la figure  $PAES$ , qui sera la portion de la superficie de la roulette qui convient à ce roulement  $AE$ .

Mais cette superficie est composée de deux triangles  $APE$ ,  $PES$ , & le triangle  $APE$  a son angle en  $P$  égal à la moitié de l'angle  $ACE$  ou à l'angle  $ADE$  à cause du cercle. C'est pourquoy si l'on divise en deux également l'angle  $ACE$  par la ligne  $CR$  laquelle sera parallele à  $DE$ , on aura le triangle  $RCE$  qui aura son angle  $RCE$  égal à l'angle  $APE$  à cause du cercle, & son angle extérieur  $CEQ$  égal à l'angle  $PES$ . Mais comme dans les triangles qui ont leurs angles indéfiniment petits ou grands, on raisonne des côtés comme des angles; il s'ensuit que  $ER \parallel CR \parallel$  l'angle  $RCE$  ou  $APE \parallel$  l'angle  $CEP$  ou  $CEQ$  ou  $PES$ .

Mais aussi les deux triangles qui ont un angle indéfini-

ment petit  $PAE$ ,  $PES$  & qui ont le côté commun  $PE$  & les autres sensiblement égaux, sont entr'eux comme leurs angles  $APE$ ,  $PES$ ; on aura donc le triangle  $APE$  | triangle  $PES$  ||  $ER$  |  $CR$ .

Mais dans le triangle  $OCE$  dont les angles en  $C$  & en  $O$  sont indéfiniment petits, & dont l'angle  $C$  est divisé en deux également par la ligne  $CR$ , &  $CD$  étant égale à  $CA$  ou  $CE$ , on a  $OD$  |  $OC$  ||  $DE$  ou  $DA$  ou  $2CA$  |  $CR$ . Semblablement on a  $OD$  |  $DC$  ||  $OE$  ou  $OA$  |  $ER$ .

C'est-pourquoy  $OD \times CR$  sera égal à  $OC \times 2CA$ .

Et de même  $OD \times ER$  sera égal à  $DC$  ou  $CA \times OA$ .

Et comparant les quantités égales de l'un à l'autre, & à cause des côtés  $OD$  égaux, on a  $CR$  |  $ER$  ||  $OC \times 2CA$  |  $CA \times OA$ , ou bien ||  $OC \times 2CA$  |  $2CA \times \frac{1}{2}OA$ .

Donc aussi à cause du côté égal  $2CA$ , on a  $CR$  |  $ER$  ||  $OC$  |  $\frac{1}{2}OA$ , ou bien *invertendo*  $ER$  |  $CR$  ||  $\frac{1}{2}OA$  |  $OC$ ; ou doublant ||  $OA$  |  $2OC$  égal  $2OA$  plus  $2CA$ .

Donc enfin  $OA$  |  $2OA$  plus  $2CA$  || triangle  $APA$  | triangle  $PES$ .

Mais composant  $OA$  |  $OA$  plus  $2OA$ , ou bien  $3OA$  plus  $2CA$  || le triangle  $APE$  | triangle  $APES$  plus le triangle  $PE$  qui sont ensemble égaux à la figure  $PAES$ .

Mais comme on aura toujours la même analogie pour tous les points de la Courbe generatrice, & que tous les triangles  $APE$  ensemble composent le demi-cercle  $DBA$ , & toutes les figures  $PAES$  aussi prises ensemble composent toute la superficie de la roulette, on aura le demi-cercle generateur  $DBA$  | la demi-roulette  $ADPV$  ||  $OA$  rayon du cercle base |  $3OA$  plus  $2CA$ , ce qui est trois fois le rayon du cercle base plus deux fois le rayon du cercle generateur.

Lorsque les convexités du cercle generateur & du cercle base sont tournées du même côté, la même analogie subsiste, mais non-pas avec addition, mais par soustraction, ce qui vient de la suite des comparaisons.

On aura aussi par ce même moyen le rapport des secteurs du cercle generateur aux portions de la superficie de la

roulette, lesquelles seront faites par une ligne comme  $AP$  perpendiculaire à la Courbe de la roulette en  $P$ . Car nous avons vû dans les touchantes, que si l'on mène une ligne droite  $AP$  du point  $A$  où la generatrice touche la base jusqu'au point décrivant  $P$ , la ligne menée par  $P$  perpendiculaire à  $AP$  touchera la roulette en  $P$ ; c'est-pourquoy la ligne  $AP$  est perpendiculaire à la Courbe de la roulette. Mais il s'ensuit aussi par la démonstration que je viens de donner, que le segment du cercle generateur  $PEA$  fera au segment ou portion de la roulette  $PS/EA$  ||  $OA$   
 | 3  $OA$  plus 2  $CA$ .

Ils s'ensuit delà qu'une de ces roulettes étant donnée, on la peut diviser avec une ligne droite perpendiculaire à sa Courbe comme  $AP$  dans quelle raison on voudra, en divisant le cercle generateur  $DP A$  dans la même raison donnée par une corde comme  $AP$ , ce qui est facile en supposant cette division du cercle.

Pour la longueur de la Courbe de la roulette, on la détermine en cette maniere. Si les portions indéfiniment petites comme  $AE$  du cercle generateur sont toutes égales entr'elles, aussi tous les angles comme  $CEQ$  seront égaux entr'eux, qui son aussi égaux aux angles  $PES$ . Mais comme on considere les triangles  $PES$  comme isoscelles dont les bases  $PS$  sont portions de la roulette, il est évident que toutes ces bases  $PS$  auront entr'elles la même raison que les côtés  $PE$ . Mais les côtés  $PE$  sont les cordes du demi-cercle  $DBA$ , & toutes ces cordes étant élevées perpendiculairement sur les parties  $AE$  du demi-cercle, font une superficie égale au quarré du diametre  $DA$ , ce qui est connu.

Mais aussi la premiere corde qui est  $DA$  aura même raison à la premiere base  $PS$ , que toutes les cordes ensemble à routes les bases ensemble, & la premiere base  $PS$  est l'arc  $MN$  compris entre  $EC$  &  $EQ$ . C'est-pourquoy le produit de  $DA$  par toutes les  $PS$  prises ensemble, sera égal au preduit de  $MN$  par toutes les cordes prises ensemble.

Mais la base  $NM$  dans ce cas de la figure, est égale à  $ND$  ou  $AE$  son égale plus  $DM$ . Et toutes les cordes prises ensemble & multipliées par  $AE$  ou  $ND$ , sont égales à la somme du produit de chacune en particulier par la même  $AE$ , ce qui est égal au quarré du diametre  $DA$ , comme nous avons dit. Donc  $ND | NM ||$  le quarré de  $DA |$  produit de  $DA$  par toutes les  $PS$  prises ensemble; & à cause de la hauteur commune  $DA$ , on a  $ND | NM || DA |$  à toutes les  $PS$  prises ensemble.

Et par ce qu'on a démontré pour la superficie dans cet exemple,  $ND$  ou  $AE | NM || ER | CR$ , & aussi  $ER | CR || OA | 2 OA$  plus  $2 AC$ ; donc enfin  $OA | 2 OA$  plus  $2 AC || DA$  diametre du cercle generateur | à la circonférence de la roulette  $DPV$ ; ou bien ce qui est la même chose, en doublant les antecedens de cette analogie, & prenant ensuite la moitié de la premiere raison, on aura  $OA | OA$  plus  $AC || 2 DA | DPV$ .

Pour ce qui est des portions de cette roulette comme  $PV$ , il s'ensuit de ce qui a été démontré, que si l'on fait  $OA | OA$  plus  $AC || 2 EP$  qui est la corde de l'arc répondant à la portion de la roulette | à la portion  $PV$  de la roulette.

Si les convexités de la generatrice & de la base étoient tournées du même côté, on trouveroit pour le second terme de l'analogie,  $OA$  moins  $AC$ , au lieu de  $OA$  plus  $AC$ , & le reste seroit de même.

Si dans cette roulette la base étoit une ligne droite, la composition tant de la superficie que de la circonférence se déprimeroit; ce qui est facile à voir.

### Exemple II.

On peut encore déterminer d'une autre façon la superficie & la longueur de cette espece de roulette, & en même tems celles des roulettes allongées ou raccourcies, lesquelles sont formées par des points qui sont au dedans ou au dehors du cercle generateur qui roule sur un autre cercle.

## Lemme I.

FIG. 10. Soit le demi-cercle  $BDV$ , dont le diametre est  $BV$ , & le centre  $C$ ; soit  $CD$  un rayon perpendiculaire à  $BV$ , & quelque ligne droite  $P\pi$  parallele à  $BV$ , qui rencontre le cercle en  $P$  &  $\pi$ . Si sur le diametre prolongé ou non prolongé on prend quelque point  $A$ , & que de ce point on mene les lignes  $AD$ ,  $AP$ ,  $A\pi$ ; je dis que le quarré de  $AP$  joint au quarré de  $A\pi$  sera égal à deux fois le quarré de  $AD$ .

Des points  $P$  &  $\pi$  soient menées les perpendiculaires  $PO$ ,  $\pi\omega$  au diametre  $BV$ . On aura par la construction  $CO$  égale à  $C\omega$ , &  $PO$  égale à  $\pi\omega$ . Mais à cause des triangles rectangles,  $APO$ ,  $ADC$ ,  $A\pi\omega$ , le quarré de  $AP$  est égal au quarré de  $PO$  plus le quarré de  $AO$ , lequel est égal au quarré de  $AC$  plus le quarré de  $CO$  plus deux rectangles  $CA$  par  $CO$ . Mais aussi le quarré de  $A\pi$  est égal au quarré de  $\pi\omega$  plus le quarré de  $AC$  plus le quarré de  $C\omega$  moins deux rectangles  $CA$  par  $C\omega$ ; & assemblant ces deux valeurs, on aura le tout réduit à deux quarts de  $PO$  plus deux quarrés de  $CO$  plus deux quarrés de  $AC$ . Mais le quarré de  $PO$  plus le quarré de  $CO$ , est égal au quarré de  $CP$  ou de  $CD$ ; donc les deux quarrés de  $AP$  & de  $A\pi$  seront ensemble égaux à deux quarrés de  $AC$  plus deux quarrés de  $CD$ , lesquels sont ensemble égaux à deux quarrés de  $AD$ . *Ce qu'il falloit démontrer.*

Ce sera la même démonstration si l'on prend le point  $A$  sur le cercle en  $V$ , ou sur le diametre  $BV$  au dedans du cercle.

## Lemme II.

FIG. 11. Les mêmes choses étant posées comme dans le Lemme précédent, si par le point  $A$  on mene  $AE$  perpendiculaire à  $VB$  & soit  $AE$  de quelle grandeur on voudra, laquelle soit la base de trois triangles  $AEP$ ,  $A\pi E$  &  $AED$ ; je dis que les deux triangles ensemble  $AEP$ ,  $A\pi E$  sont doubles du triangle  $AED$ .

Ayant



Ayant mené les lignes  $EO$ ,  $E\omega$ ,  $EC$ , on formera trois autres triangles  $AEO$ ,  $AE\omega$ ,  $AEC$ , qui seront égaux aux précédens, puisqu'ils ont la même base  $AE$  & les mêmes hauteurs. Mais ces trois triangles qui ont la même base, sont entr'eux comme leurs hauteurs  $A\omega$ ,  $AC$ ,  $AO$ , qui sont des grandeurs en proportion arithmétique par la construction; c'est pourquoi la somme des extrêmes est double de celle du milieu, ce qui sera aussi des triangles qui sont en même proportion. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Si le point  $A$  étoit pris sur le diamètre  $VB$  au dedans du cercle; alors si  $CA$  est plus grande que  $CO$  ou  $C\omega$ , le cas est le même que le précédent: mais si le point  $O$  ou  $\omega$  tombe en  $A$ , alors  $AO$  est double de  $AC$ , & la proposition est évidente: Et enfin si  $CA$  est plus petite que  $CO$ , alors on aura la différence entre  $AO$  &  $A\omega$  qui sera double de  $AC$ , & ce sera la même chose pour les triangles.

*Construction & démonstration de la Proposition.*

Soit le cercle  $AVN$  dont le centre est  $O$  pour la base de la roulette, & le cercle generateur  $DBA$  dont le centre est  $C$ , & le point décrivant  $F$  placé où l'on voudra. Fig. 133

Il est évident que dans le roulement du cercle generateur  $DBA$  sur la base, le point décrivant tracera un cercle  $FIHG$  concentrique au generateur, & par rapport à ce cercle  $DBA$  & sur son plan, dans toutes ses positions différentes sur la base; mais le point décrivant tracera la roulette  $FM$  par rapport à la base & sur son plan.

Soit le point décrivant  $F$  en quelque position comme en  $I$ , Si par le point  $I$  on mène  $IK$  parallèle au diamètre  $DA$  du cercle generateur qui passe par le centre  $O$  de la base, quand le point décrivant est en  $I$ , & qu'on mène aussi les lignes  $Ii$ ,  $Kk$  &  $CB$  perpendiculaires au diamètre; & qu'on suppose que le cercle generateur se soit avancé sur la base en roulant, d'une partie  $AE$  indéfiniment petite; ayant tiré les lignes  $AI$ ,  $AH$ ,  $AK$ ;  $Ei$ ,  $EH$ ,  $EK$ ; &  $Ei$ ,  $EC$ ,  $Ek$ , on aura par le Lemme 2 les deux triangles ensemble  $AEI$ ,  $AEK$ , qui sont égaux aux

deux triangles  $AEI$ ,  $AEK$ , à cause des hauteurs égales, égaux au double du triangle  $AEH$ , égal au triangle  $AEC$ , & qui est aussi égal au triangle  $AEB$ ; donc tous les triangles ensemble  $AEI$ ,  $AEK$  dans la roulette  $FMNA$  seront aussi égaux au double de tous les triangles  $AEB$  ou  $AEC$ , puisqu'ils auront tous les mêmes petits arcs  $AE$  du cercle  $ABD$  pour base: mais la base  $AVN$  étant égale au demi-cercle  $AB$ , tous les triangles comme  $AEI$ , dont  $AEK$  en sera aussi un, seront ensemble égaux à tous les triangles  $AEB$  ou  $AEC$ , qui auront les mêmes bases  $AE$  qui composent le demi-cercle  $ABD$ ; donc enfin tous les triangles comme  $AEI$ , seront égaux à la surface du demi-cercle  $ABD$ , à laquelle tous les triangles  $AEB$  ou  $AEC$  sont égaux; ce qui est évident.

Ce sera la même chose si le point décrivant est sur la circonférence du cercle generateur  $ABD$ .

Mais outre les triangles  $AEI$  dans la superficie de la roulette, il y en a encore d'autres comme  $EIR$  ou  $AIR$  pour la remplir entièrement, suivant ce que nous avons dit d'abord dans la generation; & tous ces triangles sont semblables, car ils doivent tous avoir un même angle en  $E$  ou en  $A$ , & leurs côtes seront  $EI$ ,  $EH$ ,  $EK$ , ou bien  $AI$ ;  $AH$ ,  $AK$ ; car on regarde ces lignes comme égales entr'elles, les points  $A$  &  $E$  étant pris pour un même point. C'est-pourquoi tous ces triangles semblables seront entr'eux comme les quarrés de leurs côtés  $AI$ ,  $AH$ ,  $AK$ . Mais par le Lemme 1. le quarré de  $AI$  & le quarré de  $AK$  seront ensemble égaux au double du quarré de  $AH$ ; c'est pourquoi les deux triangles semblables  $AIR$ ,  $AKX$  seront ensemble égaux au double du triangle semblable  $AHY$ .

Il ne reste donc plus qu'à connoître la somme de tous les triangles  $AHY$  ou  $EHY$ .

J'ai déjà expliqué que tous les angles du sommet, comme  $HEY$  de ces triangles semblables, doivent être égaux à l'angle  $CEQ$  qui est l'exterieur du triangle  $CEO$ , & qui est égal aux deux interieurs  $OCE$ ,  $COE$ .

Je dis maintenant que si par le point  $O$  on mène la ligne  $Ob$  parallèle à  $AH$  ou  $EH$  qu'on regarde comme la même, & qu'au point  $b$  on élève sur  $Ob$  la perpendiculaire  $bq$  laquelle rencontre en  $q$  la ligne  $OC$ ; & qu'on fasse comme  $OA$  à  $OA$  plus  $Oq$ , ainsi la superficie du demi-cercle generateur  $DBA$ , à une autre superficie, cette superficie sera égale à celle de la demi-roulette  $FMNVA$ , soit intérieure, soit extérieure, soit moyenne; ce que je démontre comme il suit.

Toute la superficie de la demi-roulette est composée de quadrilataires comme  $AEIR$  formez sur tous les arcs  $AE$  du demi-cercle generateur  $ABD$ , lesquels par ce que nous venons de rapporter sont égaux à autant de triangles  $AEH$  ou  $AEC$  qu'il y a d'arcs  $AE$  dans le cercle, & qui tout ensemble sont égaux au demi-cercle  $ABD$ ; plus à autant de triangles  $EHT$  ou  $AHT$  qu'il y a aussi d'arcs  $AE$  dans le demi-cercle  $ABD$ .

Mais le triangle  $AEC$  est au triangle  $AHT$  dans la raison composée de la base  $AE$  à la base  $HT$ , & de la hauteur  $CA$  à la hauteur  $AH$ , car on considère ces triangles comme rectangles.

Mais  $AE$  est à  $HT$  dans la raison composée de la raison de  $AE$  à  $CQ$  qui est la partie de la ligne  $CB$  coupée par  $OE$  prolongée, &  $AE$  est à  $CQ$ , comme  $OA$  à  $OC$ , & de la raison de  $CQ$  à  $HY$  qui est aussi celle de  $EC$  à  $EH$ , ou de  $AC$  à  $AH$ .

Donc la raison du triangle  $AEC$  au triangle  $AHT$  sera celle du produit de  $AO$  par  $AC$  par  $CA$ , au produit de  $OC$  par  $AH$  par  $AH$ , qui est celle du carré de  $CA$  par  $AO$ , au carré de  $AH$  par  $OC$ .

Mais par la construction le carré de  $CA$  est au carré de  $AH$ ; ou bien, ce qui est la même chose, le carré de  $CO$  est au carré de  $Ob$ , comme  $CO$  à  $Oq$ : Donc la raison du triangle  $AEC$  au triangle  $AHT$  sera celle de  $CO$  par  $AO$  à  $Oq$  par  $OC$ ; & à cause du côté commun  $CO$ , ce sera celle de  $AO$  à  $Oq$ .

Donc enfin le triangle  $AEC$  est au triangle  $AHT$ ,

comme  $AO$  à  $Oq$ . Et composant le triangle  $AEO$ , est au triangle  $AEC$  plus le triangle  $AHY$ , ce qui forme la figure ou quadrilatere  $AETH$ , comme  $AO$  à  $AO$  plus  $Oq$ ; & le triangle  $AEC$  est au quadrilatere  $AETH$ , comme tous les triangles  $AEC$  égaux entr'eux, qui forment le demi-cercle  $ABD$ , à tous les quadrilateres  $AETH$  égaux entr'eux, qui forment la roulette  $FMNVA$ . Donc  $AO$  sera à  $AO$  plus  $Oq$ , comme le demi-cercle  $ABD$  à la demi-roulette  $FMNVA$ . *Ce qu'il falloit démontrer.*

Cette démonstration & construction convient à toutes ces sortes de roulettes, soit que le point décrivant soit au dedans ou au dehors du cercle generateur, ou sur sa circonférence. Mais dans ce dernier cas il est évident qu'au lieu de  $AH$  on aura  $AB$ , ce qui donnera le triangle isocelle  $ACB$ , & par consequent aussi le triangle isocelle  $Ahq$ , d'où l'on voit que  $CO$  &  $Cq$  seront égales entr'elles; & par consequent la raison de  $OA$  à  $OA$  plus  $Oq$ , se réduira à celle de  $OA$  à trois  $OA$  plus deux  $CA$ , qui est celle qu'on a trouvée par l'autre methode dans l'exemple précédent.

On trouvera aussi les parties de ces roulettes par les mêmes constructions. Et enfin ce sera la même chose pour toutes les roulettes tant allongées que raccourcies dont la base sera une ligne droite, qui n'est qu'un cercle dont le centre est à distance infinie; car alors les  $Oh$  & les  $hq$  qui sont paralleles aux  $AH$  &  $Hp$ , donneront des parties  $AO$ ,  $pq$  aussi infinies; & les  $AC$  &  $Cp$  n'entrent point en comparaison avec elles, quoique dans leur étendue infinie elles ne laissent pas de conserver toujours la même raison des  $AC$  à  $Cp$ . C'est-pourquoy on aura alors le cercle generateur à la superficie de la roulette, comme  $AO$  infinie à  $AO$  infinie plus  $Oq$  infinie. Mais cette  $Oq$  infinie est composée de  $AO$  infinie & de  $Aq$  infinie, qu'on ne considère que comme  $pq$  infinie; &  $AO$  infinie étant à  $pq$  comme  $AC$  à  $Cp$ , le rapport du cercle generateur à ces sortes de roulettes, sera comme  $AC$  à  $AC$  plus  $Ap$ , ou comme  $AC$  à  $2AC$  plus  $Cp$ .

Dans la premiere de ces roulettes où le point décrivant est sur le cercle generateur, & où alors  $Cp$  devient égale à  $CA$ , il s'en suit que la surface de la roulette sera triple du cercle generateur, puisque  $AC$  plus  $Ap$  sera égal à trois  $AC$ .

Mais en general pour toutes ces roulettes qui ont la base en ligne droite, si l'on tire par le point  $A$  la ligne  $Af$  perpendiculaire à  $CO$ , & qu'on la prenne égale à  $AH$ , la ligne  $Cf$  sera le rayon d'un demi-cercle égal à la demi-roulette. Car par les démonstrations précédentes  $CA$  est à  $CA$  plus  $Cp$ , comme le demi-cercle generateur à la demi-roulette, & comme le quarré de  $CA$  au quarré de  $CA$  plus le quarré de  $AH$ , ce qui est égal au quarré de  $Cf$ .

Pour les longueurs de ces roulettes on voit dans la figure précédente qu'elles sont toutes composées de toutes les bases  $IR$  des triangles semblables  $EIR$  ou  $AIR$ , & ces bases sont entr'elles comme les côtés  $IA$ : c'est-pourquoi comme  $IA$  sera à  $IB$  dans un des triangles, ainsi toutes les  $IA$ , à toutes les  $IR$  qui seront les longueurs de la roulette.

Si l'on prend la premiere ou la plus grande  $IA$  qui est  $FA$ , & la premiere ou la plus grande  $IR$  qui est  $FZ$  qu'on détermine dans cette figure, qui est la même que la précédente, & qu'on a seulement séparée pour éviter la confusion des lignes, en faisant comme  $AC$  à  $AF$ , ainsi  $CQ$  à  $FZ$ , ou bien en menant la ligne  $AQ$  qui rencontre en  $Z$  l'arc  $FZ$  décrit du centre  $A$  sur le rayon  $AF$ , ou  $FZ$  perpendiculaire à  $DA$ , ce qui est la même chose dans des arcs indéfiniment petits, comme on les suppose icy, on aura  $FA$  à  $FZ$ , comme toutes les  $IA$  à toutes les  $IR$  qui sont ensemble égales à la longueur de la roulette. Donc on a  $FA$  par toutes les  $IR$  égal à  $FZ$  par toutes les  $IA$ .

Soit mené  $CE$  qui coupe l'arc  $GH$  au point  $s$ , on aura l'arc  $Gs$  du cercle  $FHG$  semblable à l'arc  $AE$  du cercle  $ABD$ .

Mais toutes les  $IA$  par  $Gs$  seront à toutes les  $IA$  par  $FZ$ , comme  $Gs$  à  $FZ$  à cause de la hauteur commune  $IA$ . Si l'on détermine donc toutes les  $IA$  par  $Gs$ , & qu'on connoisse le rapport de  $Gs$  à  $FZ$ , on aura toutes les  $IA$  par  $FZ$  qui doivent être égales à  $FA$  par toutes les  $IR$ .

Mais on trouvera la raison de  $Gs$  à  $FZ$  en considérant qu'elle est composée de celle de  $Gs$  à  $AE$ , qui est celle de  $CG$  à  $CA$ ; & de celle de  $AE$  à  $CQ$ , qui est celle de  $OA$  à  $OC$ ; & enfin de celle de  $CQ$  à  $FZ$ , qui est celle de  $CA$  à  $AF$ ; & ces trois raisons font celle du produit de  $CG$  par  $OA$  par  $CA$  au produit de  $CA$  par  $OC$  par  $AF$ , laquelle se réduit à celle du produit de  $CG$  par  $OA$  au produit de  $OC$  par  $AF$ , à cause de la hauteur commune  $CA$ .

Et si l'on mène  $OH$  &  $Ar$  parallèle à  $OH$ , on aura  $OC$  à  $CG$  ou  $CH$ , comme  $OA$  à  $Hr$ ; c'est-pourquoi le produit de  $CG$  par  $OA$  sera égal au produit de  $OC$  par  $Hr$ , & substituant ce produit de  $OC$  par  $Hr$ , à la place du produit de  $CG$  par  $OC$  dans la dernière raison trouvée, elle se réduira à celle du produit de  $OC$  par  $Hr$  au produit de  $OC$  par  $AF$ , laquelle se réduit encore à celle de  $Hr$  à  $AF$ , à cause de la hauteur commune  $OC$ , laquelle sera celle de  $Gs$  à  $FZ$ .

Il ne faut plus maintenant que trouver le produit de toutes les  $IA$  par  $Gs$ , & l'on en tirera par la raison de  $Hr$  à  $AF$  le produit de toutes  $IA$  par  $FZ$ , qui doit être égal au produit de  $FA$  par routes les  $IR$ , & par conséquent ce produit étant divisé par  $FA$ , donnera toutes les  $IR$  égales à la longueur de la roulette.

Fig. 14.. Le demi-cercle  $FHG$  étant donné avec son diamètre  $EF$  prolongé d'un-côté & d'autre, & le point  $A$  aussi donné sur ce diamètre; si l'on mène le rayon  $CH$  perpendiculaire à  $FG$ ; & menant aussi  $AH$  avec la perpendiculaire  $HP$  qui rencontre le diamètre en  $P$ , on aura le rectangle de  $AC$  par  $AP$  égal au quarré de  $AH$ :

Maintenant si l'on fait  $CV$  égale à un demi- $AP$ , & qu'on prenne  $VK$  égale à  $AC$ , & qu'enfin du point  $K$  pour centre & pour rayon  $KV$  on décrive le demi-cercle  $VNM$ ;

une ligne telle qu'on voudra  $ON$  perpendiculaire à  $FA$ , laquelle coupe les deux cercles en  $P$  & en  $N$ , fera  $AI$  égale à  $VN$ .

Car le quarré de  $AH$  est égal au rectangle de  $AC$  par  $AP$  par la construction, ou bien égal au rectangle de  $2AC$  par  $\frac{1}{2}AP$ , &  $\frac{1}{2}AP$  est égal à  $CV$ , &  $2AC$  égal à  $VM$ .

Le quarré de  $AI$  est égal au quarré de  $OI$  plus le quarré de  $AC$  plus le quarré de  $CO$  plus le rectangle de  $2AC$  par  $CO$ ; & le quarré de  $CI$  étant égal au quarré de  $OI$  plus le quarré de  $CO$ , il s'ensuit que le quarré de  $AI$  sera égal au quarré de  $CI$  ou  $CH$  plus le quarré de  $AC$  plus le rectangle de  $2AC$  par  $CO$ , & enfin le quarré de  $AI$  sera égal au quarré de  $AH$  plus le rectangle de  $2AC$  par  $CO$ .

Mais enfin le rectangle de  $2AC$  ou  $VM$  par  $CO$  plus le rectangle de  $2AC$  ou  $VM$  par  $VC$  ou  $\frac{1}{2}AP$ , lequel est égal au quarré de  $AH$ , sera égal au quarré de  $VN$  par la construction; donc le quarré de  $AI$  sera égal au quarré de  $VN$ , &  $AI$  égale à  $VN$ . On fera une semblable démonstration si la ligne  $ON$  est au-dessous de  $CH$ .

On voit aussi que si l'on décrit une Parabole  $VX$  dont  $VF$  soit l'axe,  $V$  le sommet, & son parametre égal à  $VM$  ou  $2AC$ , elle aura toutes ses ordonnées  $OX$  qui couperont les cercles  $FHG$ ,  $MNV$  aux points  $I$  &  $N$ , égales à  $AI$  & à  $VN$ .

Ainsi les ordonnées  $OX$  de la parabole  $VX$  étant élevées perpendiculairement sur les points  $I$ , formeront une figure sur le cylindre droit qui a pour base le cercle  $FHG$ , laquelle sera égale à tous les  $IA$  par  $G_s$ , ou égales ensemble à chaque  $IA$  par chaque  $G_s$ , ou égales ensemble à chaque  $IA$  par chaque  $G_s$  qu'on suppose égales entr'elles.

Il paroît enfin que si l'on élève le plan de la parabole  $VX$  perpendiculairement sur son axe  $VM$ , & qu'on imagine un cylindre droit qui ait pour base cette Parabole, sa superficie coupera de la superficie du cylindre droit qui ait pour base le cercle  $FHG$ , la même figure que nous venons de déterminer. *Ce qu'il falloit faire.*

On peut aussi faire la même opération d'une manière un peu plus abrégée, en se servant du calcul des lieux; c'est pourquoi je l'emploieray dans la méthode suivante pour trouver d'une manière différente de la précédente, la même valeur de toutes les *LA* par *Gs*.

FIG. 15.

Soit le cercle *FIG* dont le centre est *C*, & sur son diamètre *FG* prolongé soit le point *A*, d'où soit mené les lignes *AI* à la circonférence du cercle. Du point *G* pour centre & pour rayon *GF* soit décrit le quart de cercle *FTS*, lequel aura son rayon double de celui du cercle *FHG*. Soit aussi dans le cercle *FIG* quelque corde *GI* prolongée en *T* jusqu'au cercle *FTS*. Du point *T* soit mené *TQ* perpendiculaire à *GS*. On sçait que *TQ* doit être égale à *GI*.

Maintenant soit fait  $CG = r$ ,  $GQ = y$ ,  $CA = a$ , donc  $FG = 2r$ .

Si l'on mène *AI* on trouvera sa valeur; car *GI* est la même que  $TQ = \sqrt{4rr - yy}$ .

Mais  $4rr =$  au quarré de *GT*  $| yy || 4rr - yy | \frac{4rryy - y^4}{4rr} = 10$  quarré.

Mais aussi *CI* quarré moins *IO* quarré = *CO* quarré, ce qui est  $rr - \frac{4rryy + y^4}{4rr}$ , ou bien  $\frac{4r^4 - 4rry + y^4}{4rr} = CO$  quarré, & par conséquent  $\frac{2rr - yy}{2r} = CO$ .

Donc enfin  $a + \frac{2rr - yy}{2r}$ , ou bien  $\frac{2ar + 2rr - yy}{2r} = AO$ , & par conséquent *AI* quarré = *AO* quarré plus *IO* quarré, ce qui est  $\frac{4aar + 4r^2 + 8ary - 4aryy - 4rryy + 4rryy - y^4}{4rr}$ , ce qui se réduit à  $\frac{raa + r^2 + 2rra - ayy}{r}$ , ou bien à  $aa + rr + 2ra - \frac{ayy}{r}$ . Mais pour abréger soit  $aa + rr + 2ra = dd = AF$  quarré: donc  $dd - \frac{ayy}{r} = AI$  quarré, & faisant cette valeur = *zx* = *QX* quarré, on aura  $dd - \frac{ayy}{r} = zx$ , ou bien  $dd - zx = \frac{ayy}{r}$ , ou enfin  $dd - zx - \frac{ayy}{rr}$ , qui est un lieu à l'Éllipse, laquelle passera par tous les points *X*, & qui sera très-facile à construire.

Car



Car si l'on prolonge  $GF$  jusqu'en  $M$ , & qu'on prenne  $CM = CA$ , & que  $GM$  comme diametre on décrive le demi-cercle  $GhM$  qui rencontre  $CH$  prolongée en  $h$ , on aura  $Ch$  quarré = au rectangle  $CG$  par  $CM = ra$ .

C'est-pourquoy ayant mené  $Mh$  prolongée jusqu'à  $GS$  en  $V$ , on aura  $GM$  &  $GV$  pour les deux demi-axes de l'Ellipse  $MXV$ ; & toutes les ordonnées comme  $XQ$  au petit axe de cette Ellipse seront égales aux  $IA$ , & les arcs  $FT$  seront égaux aux arcs  $FI$ .

Il s'ensuit donc que si l'on élève toutes les ordonnées  $XQ$  sur les points  $T$ , on aura la même figure que si on élevoit les  $IA = XQ$  sur les points  $T$ , & cette figure sera une portion de cylindre droit dont la base est le cercle  $FTS$ ,

Cette figure déterminée se réduira, comme la précédente pour en tirer la valeur de la longueur de la roulette cherchée.

On voit aussi que si l'on élève l'Ellipse  $MXV$  perpendiculairement sur son axe  $GV$ , & qu'on imagine un cylindre droit qui ait pour base cette Ellipse, la rencontre de sa superficie avec celle du cylindre droit, dont la base est le cercle  $FTS$ , retranchera de ce dernier une figure égale à celle des  $XT$  élevées sur les points  $T$ .

Si la base de ces sortes de roulettes étoit une ligne droite, on trouvera par la même methode la valeur de la superficie cherchée, qu'on pourra égaler à d'autres figures.

### Exemple III.

#### Autre espece de roulette.

Si la generatrice de la roulette est une ligne droite, & que le point décrivant soit un des points de cette ligne, & que la base soit un cercle, on pourra connoître la superficie & la longueur de cette roulette, puisqu'on connoît tout ce qui est nécessaire pour ce sujet tant dans la generatrice que dans la base. Car puisque la ligne qui décrit la ligne droite par son évolution est un point à distan-

ce infini, & que celle qui décrit le cercle est un point à distance finie, on connoîtra comme on a fait cy-devant la grandeur des triangles qui composent cette roulette.

FIG. 16. Soit la ligne generatrice  $AM$  dont le point  $P$  joint au point  $A$  soit celui qui décrit la roulette, & que le cercle  $AB$  en soit la base. Ayant pris les parties  $AE$ ,  $EI$  de la generatrice égales entr'elles & indéfiniment petites; lorsque les lignes  $EC$ ,  $IC$  qui touchent celle qui décrit la generatrice  $AM$  par son évolution, seront jointes aux lignes  $DE$ ,  $DI$  de celle qui décrit la base par son évolution, le point décrivant  $P$  ou  $A$  se fera mu en  $F$  & en  $Q$ , & l'angle  $PEF$  sera égal à l'angle  $CEK$ . De même l'angle  $FIQ$  sera égal à l'angle  $LIG$ ; car  $CI$  sera posée en  $LI$  quand  $PE$  est en  $FE$ , &  $LI$  sera parallèle à  $KE$ : mais tous ces angles  $CEK$ ,  $LIG$  & les autres semblables étant toujours égaux entr'eux par la construction, les angles  $PEF$ ,  $FIQ$  seront aussi égaux entr'eux, puisqu'ils sont égaux à l'angle  $CEK$  ou aux angles égaux  $ADE$ ,  $EDI$ .

Tous les triangles comme  $PEF$ ,  $FIQ$  étant donc considerez comme isoscelles qui ont l'angle du sommet égal en tous; l'espace de la roulette  $PQNOBA$  en quelque endroit qu'elle soit terminée par sa ligne décrivante comme en  $ON$  & par sa base  $ABO$ , sera égal à la somme de tous ces triangles isoscelles semblables.

Mais tous ces triangles isoscelles semblables ont tous leurs côtés en proportion arithmetique; car chaque côté sera égal aux parties de la generatrice comme  $EP$ ,  $IP$ , &c. qui augmentent de parties égales entr'elles, & à  $PE$ ,  $EI$ , &c. C'est-pourquoi cet espace de la roulette  $PQNOBA$ , dont la base  $ABO$  sera égale à la partie  $AM$  de la generatrice, sera égal à un espace qui sera au tiers du secteur de cercle  $DABOD$  comme le quarré de la ligne  $AM$  ou de la partie  $ABO$  de la base qui lui est égale, est au quarré du rayon  $DA$  de la base.

Car les angles  $ADE$ ,  $EDI$  du secteur sont égaux à ceux des triangles isoscelles qui composent l'espace de la roulette, & aussi en même nombre; mais si de tous les petits

secteurs comme  $ADE$ ,  $EDI$  qui composent le grand secteur  $ADOBA$ , on en retranche des parties vers le sommet  $D$  qui soient de petits triangles isoscelles dont les côtés soient en proportion arithmétique depuis le point  $D$  jusqu'à la ligne  $DO$ , il est évident que la somme de tous ces petits triangles retranchés sera égale au tiers du secteur. Mais aussi chacun de ces petits triangles isoscelles aura une même raison à celui qui répond dans la roulette comme  $PEF$  à celui qui est retranché de  $ADE$ ;  $FIQ$  à celui qui est retranché de  $ADE$ , & ainsi des autres: c'est pourquoi la somme des triangles retranchés du secteur de cercle, sera à la somme des triangles semblables aux petits secteurs qui composent la roulette, comme un seul de ceux du secteur à un seul de ceux de l'espace de la roulette, qui pourra être le dernier dans l'un & dans l'autre. Mais le dernier du secteur a pour côté le rayon du cercle, & celui de l'espace de la roulette a pour côté la ligne  $AM$  ou la partie  $ABO$  de la base égale à  $ON$ ; & l'un de ces triangles étant à l'autre comme le carré de son côté au carré de celui de l'autre, il est évident que le tiers du secteur  $ABOD$  sera à l'espace de la roulette  $AQNOBA$ , comme le carré de  $DA$  au carré de  $ON$ . *Ce qu'il falloit démontrer pour l'espace.*

On peut déterminer aussi cet espace en décrivant un cercle qui ait pour rayon  $ON$ , qui est la partie de la génératrice qui a décrit la roulette depuis le point décrivant  $P$ : car si l'on prend le tiers d'un secteur de ce cercle, lequel soit semblable au secteur de la base  $ADDBA$ , on aura l'espace de la roulette  $AQNOBA$ ; ce qui est évident, puisque le secteur de la base sera au secteur semblable du cercle qui a pour rayon  $ON$ , comme les carrés des rayons de ces cercles, & les tiers de ces secteurs étant aussi en même raison, celui du cercle dont le rayon est  $ON$  sera égal à l'espace qu'on cherche.

Pour la longueur de cette roulette, il est évident par la méthode que j'ay donnée cy-devant, qu'elle doit être égale à la somme de toutes les bases des petits triangles

isofcelles comme  $AEF$ ,  $FIQ$ , &c. Mais toutes ces bases ayant entr'elles même raison que les côtés de ces mêmes triangles qui sont isofcelles semblables entr'eux, & aux triangles ou secteurs égaux de la base  $ADE$ ,  $EDI$ , si on en retranche de la base de semblables qui soient en progression arithmétique depuis le premier jusqu'au dernier, comme sont ceux de l'espace de la roulette, & comme je viens de dire en parlant de l'espace, il est évident que la somme de toutes les bases des petits triangles du secteur de la base de la roulette, sera à la somme de toutes les bases des triangles qui composent la roulette, comme celle du dernier de l'un à celle du dernier de l'autre: mais ces bases sont entr'elles comme leurs côtés qui sont dans le secteur de la base le rayon  $DA$ , & dans la roulette la ligne  $ON$ . Mais toutes les bases ensemble des petits triangles dans le secteur  $AD O B A$  de la base, sont égales à la moitié de la dernière prise autant de fois qu'il y a de triangles, c'est-à-dire à la moitié de tout l'arc  $ABO$  du secteur de la base. Donc comme  $DA$  est à  $ON$ , ainsi la moitié de l'arc  $ABO$  sera à la Courbe  $PQN$  de la roulette; ou bien, ce qui est la même chose, cette Courbe de la roulette sera égale à la moitié de l'arc du secteur de cercle semblable au secteur de la base, & décrit sur le rayon  $ON$ .

Ce que je viens de démontrer de la partie de la roulette  $PQNOBA$  se doit entendre de même de toute autre partie; car cette roulette est infinie si sa génératrice est supposée infinie, & elle fera plusieurs tours autour du cercle de la base; & pour déterminer tant l'espace que la longueur de sa ligne, si elle fait plus d'une révolution autour de la base, il faudra prendre pour secteur de cercle un ou plusieurs cercles entiers avec le secteur qui se trouvera de plus dans sa révolution, & comprendre dans sa superficie les espaces des révolutions inférieures autant de fois qu'il y aura de révolutions; ce qui est facile à voir par la génération.

On peut remarquer que cette roulette est aussi la ligne

qui est décrite par l'évolution du cercle dans le tout ou dans ses parties, ou même dans plusieurs révolutions. C'est aussi une espece de Spirale; car si l'on assemble tous les sommets  $E, I$  des triangles comme  $AEF, FIQ$  en un même point, au lieu qu'ils sont icy disposés autour de la circonference du cercle, on en fera la Spirale d'Archimede, ce qui est facile à voir, car toutes les lignes comme  $FE, QI$  seront en proportion arithmetique, & comprendront des angles égaux autours du point commun qui sera le sommet de tous les triangles.

Mais quoique l'on puisse considerer l'espace de la Spirale d'Archimede égal à celui de cette roulette, puisqu'il est composé de triangle égaux aux précédens & indéfiniment petits, ce qui est égal au tiers du secteur de cercle, dont le rayon est la ligne qui termine la Spirale, il ne s'ensuit pas que sa ligne soit égale à la moitié de l'arc de ce même secteur, qui est la somme des bases de tous les petits triangles  $AF, EQ, &c.$  comme avoit crû un celebre Geometre, n'ayant pas fait assez d'attention à la methode des indivisibles. Car on ne peut pas appeller une ligne courbe continuë, celle qui n'est composée que de petites lignes toutes séparées & qui ne sont point touchantes, quoiqu'on les considere indéfiniment petites & indéfiniment proches les unes des autres, mais dont on ne peut pas démontrer que la difference avec la ligne proposée soit moindre qu'aucune quantité donnée. Il n'en est pas de même de la superficie de cette figure, où les petits trilignes qui la composent sont joints tous les uns aux autres, & approchent à l'infini de l'espace proposé.

*Voicy de quelle maniere on peut donner une ligne droite égale à la Spirale d'Archimede.*

Soit une portion de Spirale  $CEFGO$  comprise dans l'angle  $ACO$ , laquelle a été décrite par la ligne  $CA$  qui s'est meuë jusqu'en  $CO$  d'un mouvement égal, pendant que le point décrivant s'est meuë aussi sur la ligne  $CA$  uniformément depuis le point  $C$  par l'espace  $CA$  égal à  $CO$ .

Que la ligne  $CO$  soit divisée en parties indéfiniment petites aux points  $NQR$ , &c.. & l'angle  $ACO$  en de petits angles tous égaux entr'eux, & dont le nombre soit égal à celui des parties de la ligne  $CO$ , & que  $PCO$  en soit le dernier. Si par toutes les divisions de la ligne  $CO$  on lui mène des perpendiculaires comme  $NG$ ,  $QM$ ,  $RS$ , qui pourront être considérées comme des arcs de cercles dont les rayons sont les lignes  $CG$ ,  $CF$ ,  $CE$  qui décroissent en proportion arithmétique par la generation de la Spirale, puisqu'elles sont menées du centre  $C$  jusqu'à la circonference aux points  $GFE$ , & qu'elles font des angles tous égaux entr'eux  $OCG$ ,  $GCF$ ,  $FCE$ , ces lignes  $CG$ ,  $CF$ ,  $CE$  seront aussi égales aux lignes  $CN$ ,  $CQ$ ,  $CR$ ; c'est pourquoi toutes les petites diagonales  $OG$ ,  $NM$ ,  $QS$ , &c. dans les petits quadrilatères  $OPGN$ ,  $NGMQ$ ,  $QMSR$ , seront égales aux portions de la Spirale  $OG$ ,  $GF$ ,  $FE$  comprises dans les angles égaux. Il s'ensuit donc aussi que la somme de toutes les diagonales  $OG$ ,  $NM$ ,  $QS$  dans le triangle  $COP$ , sera égale à toute la ligne spirale  $OGEC$ .

Maintenant si sur la même ligne  $CO$  on élève les perpendiculaires  $OB$ ,  $ND$ ,  $QH$  par les points de division  $ONQ$ , &c. & qu'on les fasse égales chacune à des lignes qui aient même raison à  $CO$ , que les lignes  $OG$ ,  $MN$ ,  $QS$  ont aux parties égales  $ON$ ,  $NQ$ ,  $QR$  de la ligne  $CO$ ; ces lignes renfermeront un espace  $CVHBO$ , qui sera au quarré de  $CO$  qui est  $CT$ , comme la somme des lignes  $OG$ ,  $GE$ ,  $EF$ , c'est-à-dire, la Spirale, à la somme des lignes égales  $ON$ ,  $NQ$ ,  $QR$ , c'est-à-dire, la ligne droite  $CO$ , ce qui est évident, puisque chacune de ces lignes tant dans l'espace  $CVBO$  que dans le quarré  $CT$ , sont multipliées par les parties égales  $ON$ ,  $NQ$ ,  $QR$ .

Je dis maintenant que l'espace  $CVBO$  est un espace hyperbolique dont  $CV$  est le demi-axe déterminé, &  $C$  le centre. *Ce que je démontre ainsi,*

Puisque les parties  $ON$ ,  $NQ$ ,  $QR$  sont des parties égales indéfiniment petites, aussi les parties de la Spirale  $OG$ ,  $GF$ ,  $FE$  ou  $OG$ ,  $NM$ ,  $QS$  seront indéfiniment petites,

& elles peuvent être supposées, ou touchantes, ou cordes de la Spirale. Soit  $OI$  perpendiculaire à  $CO$  & égale à l'arc de cercle  $OA$  qui a pour rayon  $CO$ , & qui est compris dans l'angle  $ACO$ .

Soit  $CO = r$ ,  $OI = s$ , & les parties de  $CO$  comme  $CQ = y$ .

Ayant fait  $CX$  perpendiculaire à  $CO$ , & prolongé quelqu'une des diagonales comme  $QS$  en  $X$  sur  $CX$ , il y aura même raison de  $QR$  à  $RS$ , que de  $QC$  à  $CX$ .

Si l'on prolonge  $QM$  perpendiculaire à  $CO$  ou parallèle à  $OI$  jusqu'à la rencontre de  $CI$  au point  $K$ ; il est évident que la ligne  $QK$  sera égale à l'arc de cercle renfermé dans l'angle  $ACO$  sur le rayon  $CQ$ . Mais lorsque le point décrivant est en  $Q$  sur  $CO$ , ou en  $F$  sur la Spirale, s'il vient  $F$  vers  $E$  ou de  $Q$  en  $S$ , il n'a plus que l'angle  $ACF$  à décrire, qui a même raison à tout l'angle  $ACO$  que  $CQ$  a à  $CO$ ; car la ligne  $CO$  se meut également autour du point  $C$ , pendant que le point décrivant descend également de  $O$  vers  $C$ . La raison de  $QR$  à  $RS$  ou de  $QC$  à  $CX$ , doit donc être composée de celle de  $CQ$  à  $QK$ , & de celle de  $CO$  à  $CQ$ , qui est celle de  $Co$  à  $QK$ ; mais  $QK$  est  $\frac{sy}{r}$ ; donc  $QR$  à  $RS$  comme  $r$  à  $\frac{sy}{r}$ . Mais si l'on

mène  $OY$  parallèle à  $QSX$ , on trouvera  $CY = \frac{sy}{r}$ ; car on aura  $r$  à  $\frac{sy}{r}$  ::  $r$  à  $\frac{sy}{r}$ .

Mais puisque  $OY$  doit être égale à  $QH$ , & que l'on connoît seulement  $OY$  par son carré qui est  $= rr + \frac{ssy}{r}$ , si l'on veut faire un lieu de tous les points trouvés comme  $H$ , supposant  $CQ = y$  comme on a fait, il faut poser  $QH = x$ , ce qui donnera l'équation du lieu  $rr + \frac{ssy}{r} = xx$  ou  $\frac{ssy}{rr} xx - rr$  à l'hyperbole. Ainsi l'on sçait que la ligne  $VHDB$  est une hyperbole dont le demi-axe  $CV = r$  qui est aussi  $= CO$ .

Mais par la nature de cette équation à l'hyperbole, il

est évident que si du point  $O$  on mene la ligne  $OL$  perpendiculaire sur  $CI$  jusqu'à la ligne  $CX$  en  $L$ , & que du sommet  $V$  de l'hyperbole on mene  $VZ$  parallèle à  $CO$  & égale à  $CL$ , la ligne  $CZ$  sera l'asymptote de l'hyperbole  $VHB$ . Enfin si l'on fait que comme le carré de  $CO$  qui est  $CT$  à l'espace hyperbolique  $CVBO$ , ainsi  $CO$  à une ligne droite, cette ligne droite sera égale à la longueur de la Spirale depuis le point  $O$  jusqu'au centre ou à l'œil  $C$  de la Spirale. *Ce qu'il falloit démontrer.*

*Exemple IV.*

*Voicy encore un exemple de ces sortes de lignes.*

FIG. 18. Soit la première roulette  $ABI$ , qui a pour base la ligne droite  $AE$ , & pour cercle generateur  $EFI$ , & dont l'axe est  $EI$ . Si l'on forme une roulette  $AMN$  qui ait pour base la roulette  $ABI$ , & pour ligne generatrice une ligne droite, & que le commencement du roulement se fasse en  $A$ , on déterminera la superficie  $ADINMA$ , & la grandeur de sa ligne  $AMN$  en cette sorte.

Si l'on prend sur le cercle generateur de la roulette qui en est la base, des points comme  $FGH$  qui soient indéfiniment proches les uns des autres & à égale distance, & que par ces points on mene des parallèles  $FB$ ,  $GC$ ,  $HD$ , &c. à la base  $AE$  jusqu'à la rencontre de la roulette en  $BCD$ , & que la ligne generatrice se trouve dans les positions  $BK$ ,  $CL$ ,  $DM$  quand elle touche la base en  $BCD$ ; à cause que les points  $BCD$  sont indéfiniment proches les uns des autres, on les peut regarder comme les sommets des triangles  $KCL$ ,  $LDM$ , quoique ces sommets soient véritablement entre les points  $BC$  &  $CD$ . Mais ces triangles auront leurs angles du sommet  $KCL$ ,  $LDM$  égaux entr'eux; car les lignes qui passent par les points  $BCD$ , & qui touchent les deux lignes qui décrivent par leur évolution la base & la generatrice, feront des angles égaux entr'eux, ce qui est évident, puisque la base étant une ligne droite, la ligne qui la décrit par son évolution est un point à distance infinie, & celle qui décrit

crit



crit la base est une roulette semblable à la base, ce qui est connu. Mais les touchantes de cette roulette, ou bien les perpendiculaires à la roulette  $ADI$ , seront des lignes parallèles aux cordes du cercle  $EF$ ,  $EG$ ,  $EH$  qui feront des angles égaux entr'eux au point  $E$ ; & par conséquent les touchantes  $BK$ ,  $CL$ ,  $DM$ , de la roulette  $ADI$ , qui sont aussi parallèles aux cordes  $IF$ ,  $IG$ ,  $IH$  feront des angles égaux entr'eux, puisque ces cordes font des angles égaux entr'eux au point  $I$ .

Mais par les propriétés connues de la roulette, on sçait que la longueur des lignes  $BK$ ,  $CL$ ,  $DM$  sont égales au double de la différence qui est entre le diamètre  $IE$  du cercle generateur & les cordes  $IF$ ,  $IG$ ,  $IH$ : c'est pourquoi si du centre  $I$  & pour rayon  $IE$  on décrit le quart de cercle  $EQR$ ; & si l'on prolonge les cordes  $IF$ ,  $IG$ ,  $IH$ , jusqu'au quart de cercle en  $OPQ$ , les lignes  $BK$ ,  $CL$ ,  $DM$  seront chacune double de  $FO$ ,  $GP$ ,  $HQ$ : car les longueurs des parties de la roulette  $IB$ ,  $IC$ ,  $ID$  sont doubles des cordes  $IF$ ,  $IG$ ,  $IH$ , & toute la roulette  $IA$  est égale au double  $IE$ .

Mais dans le demi-cercle toutes les cordes comme  $IF$  Fig. 19. sont égales aux sinus comme  $OS$  du quart de cercle. C'est pourquoi si l'on conçoit un cylindre droit sur le quart de cercle  $EPR$ , & que ce cylindre soit coupé par un plan incliné au plan de sa base d'un angle demi-droit & qui la rencontre en  $RI$ , on sçait que la superficie de ce quart de cylindre comprise entre la base & le plan coupant, sera égale à la superficie formée par tous les sinus sur leurs arcs, & égale au carré du rayon  $IE$ ; mais la superficie de ce cylindre qui a pour hauteur le rayon  $IE$ , sera égale au rectangle  $IR$  dont le côté  $EPR$  est égal à la circonférence du quart de cercle, & le côté  $IE$  égal au rayon du quart de cercle. Mais aussi la portion de cette superficie cylindrique comprise entre le plan coupant & le plan supérieur, sera égale à la figure faite de toutes les parties  $FO$ ,  $GE$ ,  $HQ$ , qui sont les différences entre les sinus comme  $OS$ , ou les cordes comme  $IF$  & le rayon  $IE$  ou  $IO$ ,

& cette figure *EGVR* sera le complément de la figure des sinus *EGVI*.

Il est donc évident que toutes les lignes comme *OF*, *PG* dans le complément de la figure des sinus, garderont toutes entr'elles la même proportion que les côtez *BK*, *CL*, *DM* des triangles qui composent la figure de la roulette *ALN*. Mais comme tous ces triangles sont semblables comme *KCL*, *LDM*, &c. ils seront tous entr'eux comme les quarrés de leurs côtez, ou comme les cercles qui auront ces côtez pour rayons ; & par conséquent si l'on fait tourner la figure *EGVR* sur la ligne *ER* comme axe, le Conoïde pointu qui s'en formera, sera au cylindre qui se formera du rectangle *EV* qui tourne aussi sur *ER* pour axe, comme la somme de tous les petits triangles comme *KCL*, *LDM* qui composent la roulette *AIN*, au dernier triangle *INY* pris autant de fois qu'il y a de triangles dans la figure de la roulette.

Mais le dernier triangle *INY* pris autant de fois qu'il y a de triangles dans la figure de la roulette, est égal au quadruple du quart de cercle *IER* ; car le dernier triangle qui a pour côté *IN*, est quadruple de celui qui a pour côté *IR*, & pour base une des divisions du cercle comme *OP* : donc comme le cylindre formé par le rectangle *EV* est au conoïde formé par le complément de la figure des sinus, ainsi le cercle entier sur le rayon *EI* sera à la superficie de la roulette *ADINMA* ; ou bien si sur chacune des ordonnées *PT*, *Od* dans la figure des sinus on prend *Pa*, *Ob* troisièmes proportionnelles après *PT*, *PG* & *Od*, *OF*, &c. il y aura même raison du cercle sur *PT* au cercle sur *PG*, que de la ligne *PT* à la ligne *Pa*, &c. Donc le cylindre sera au conoïde pointu comme le rectangle *EV* à la figure *EaVR*. Mais le rectangle *EV* n'étant considéré que comme la moitié du cercle entier dont le rayon est *IE*, aussi la figure *EaVR* ne donnera que la moitié de la roulette.

Maintenant pour la longueur de cette roulette *AMN*, puisqu'il y a même raison entre la base *NY* du dernier

triangle  $INY$  pris autant de fois qu'il y a de triangles, à la somme des bases de tous les triangles, que du rectangle  $EV$  au complément  $EaVR$  de la figure des sinus; & que la somme de la base  $NY$  du dernier triangle, laquelle est double d'une des divisions du quart de cercle comme  $OP$ , est double aussi de la circonférence du quart de cercle; donc la circonférence du demi-cercle qui a pour rayon  $IE$ , sera à la circonférence de la roulette  $AMN$ , comme le rectangle  $EV$  au complément  $EGVR$  de la figure des sinus  $EGVI$ . Mais le rectangle  $EV$  est égal au demi-cercle dont le rayon est  $IE$ , & la figure des sinus est égale au carré du rayon: donc enfin la circonférence du demi-cercle dont  $IE$  est le rayon, sera à la roulette  $AMN$  comme la superficie du demi-cercle, à la différence de cette même superficie avec le carré du rayon. Mais la superficie du demi-cercle est à la différence entre cette même superficie & le carré du rayon, comme  $IV$  circonférence du quart de cercle à la différence entre  $IV$  &  $IE$ ; donc la longueur de la roulette sera double de la différence entre  $IV$  &  $IE$ , qui est aussi la différence double entre le diamètre du cercle generateur de la base & sa demi-circonférence.

## METHODE GENERALE.

*Pour réduire toutes les Lignes courbes à des Roulettes, leur generatrice ou leur base étant donnée telle qu'on voudra.*

*Et premicrement la base étant donnée de position, il faut trouver la generatrice de la Courbe comme étant une Roulette.*

PAR M. DE LA HIRE.

**S**Oit une ligne courbe  $ADB$  donnée telle qu'on voudra que l'on considère comme une roulette, dont la ligne  $CB$  droite ou courbe soit aussi donnée de position pour la base de cette roulette.

1706.  
13. Août.  
FIG. 20.

Bbb ij

De tous les points  $DLN$  de la Courbe  $A$ , soit mené à la Courbe les perpendiculaires  $DF$ ,  $LM$ ,  $NO$ , &c. indéfiniment proche les unes des autres, lesquelles rencontrent la base donnée en  $F$ ,  $M$ ,  $O$ , &c.

Sur quelqu'une de ces perpendiculaires comme  $DF$  pour base, soit formé le triangle  $DFG$ , dont le côté  $DG$  soit égal à la plus proche  $LM$  des perpendiculaires après  $DF$ , & le côté  $FG$  égal à la partie indéfiniment petite  $FM$  de la base donnée & comprise entre les perpendiculaires  $DF$ ,  $LM$ . De même sur  $DG$  pour base égale à  $LM$  soit formé le triangle  $DGH$  dont le côté  $GH$  soit égal à  $NO$ , & le côté  $GH$  égal à  $MO$ , & ainsi de suite tant d'un côté que d'autre de la première  $DF$  qu'on a prise.

Il se formera par ce moïen une ligne droite ou courbe  $IHGFK$  qui sera la generatrice de la Courbe  $ADB$  proposée pour roulette, & dont la base  $CB$  est donnée de position, & le point  $D$  qui est l'extremité de la perpendiculaire  $DF$  qu'on a prise d'abord, sera le point décrivant de la roulette par rapport à la generatrice trouvée dans la position où elle est sur la base  $CB$ .

On voit par la formation de la generatrice trouvée  $IHGFK$  que lorsqu'elle roulera sur la base  $CB$  proposée, le même point  $D$  du plan de la generatrice, doit passer successivement par tous les points de la Courbe  $DLN$ . Car la generatrice touchera la base dans tous ses points  $FMO$ , lorsque les points de la generatrice  $FGH$  qui leur répondent y seront posez, & alors les lignes  $DG$ ,  $DH$  seront jointes aux perpendiculaires  $LM$ ,  $NO$ . Et par conséquent les lignes qui décrivent par leur évolution la base & la generatrice, auront une touchante commune qui passera par le point où la base & la generatrice se touchent; ce qui suit de ce qui a été démontré d'abord.

Les différentes bases proposées pour une même Courbe donnée comme roulette, formeront des generatrices différentes qui auront des proprieté particulières, comme toutes les bases qui ne rencontrent pas perpendiculairement les roulettes proposées, donneront des genera-

trices qu'on ne pourra terminer, quoique leur longueur soit connue qui est celle de la base. La Spirale dont tous ses rayons font des angles égaux avec elle, est une Courbe de cette nature; car si on la fait rouler sur une ligne droite qui lui serve de base, la roulette qu'elle formera sera une ligne droite; & si une ligne droite étoit proposée comme une roulette, & qu'on donne une autre ligne droite pour sa base qui ne lui soit pas parallèle, on trouvera pour sa generatrice une Spirale telle que nous venons de l'exposer; mais si la base étoit parallèle à la roulette, la generatrice seroit un cercle, & le centre en seroit le point décrivant; ce qui est vrai aussi de toutes sortes de Courbes proposées, quand on propose pour base une ligne qui lui est parallèle; ce qui est évident, puisque tous les rayons comme  $DF$ ,  $DG$ ,  $DH$  seront tous égaux entr'eux.

Pour déterminer la nature de ces generatrices, il faut connoître quelque propriété particulière des perpendiculaires à la roulette proposée par rapport à la base donnée, ou quelque chose d'équivalent, comme on le verra clairement dans l'exemple suivant.

*Exemple suivant.*

Soit la Courbe  $ADP$  proposée comme une roulette, & soit donné sa base  $CB$  une ligne droite. Ayant pris sur la Courbe les parties  $AD$ ,  $DP$ , indéfiniment petites, soit mené les perpendiculaires  $AF$ ,  $DM$ ,  $PO$  à la Courbe; mais ayant formé comme on a expliqué cy-devant le triangle  $AFG$ , en sorte que les points  $FG$  soient sur la generatrice, on donne cette propriété, que dans tous les triangles comme  $AFG$  formez pour trouver la generatrice, l'angle  $FAG$  sera égal à l'angle  $AED$  que font les deux perpendiculaires  $AF$ ,  $DM$  en se rencontrant au point  $E$ . FIG. 213

Il s'ensuit de cette propriété donnée que le triangle  $AEM$  ou  $AEG$ , car les deux points  $M$  &  $G$  ne sont remarquez que comme un autre point, sera isoscèle; & par

consequent l'angle  $AMD$  extérieur du triangle  $AME$  sera double de l'intérieur  $FAM$  ou  $FAG$ .

Mais par ce qui a été démontré cy-devant, le point qui décrit la roulette étant en  $A$ , la touchante de la ligne qui décrit la generatrice  $FG$  par son évolution sera  $FM$  perpendiculaire à la generatrice  $FG$  & à la base  $CB$ , & fera aussi jointe à celle qui décrit la base par son évolution.

De même dans la seconde position du point décrivant en  $D$ , la ligne qui décrit la generatrice par son évolution comme  $MK$  sera aussi perpendiculaire à la base  $CB$ . C'est pourquoi l'angle  $DMK$  sera plus grand que l'angle  $AFM$  de la quantité de l'angle  $AED$  ou son égal  $FAG$ .

Mais lorsque le point  $D$  étoit au point  $A$  &  $DM$  en  $AG$ , la ligne  $KM$  perpendiculaire à la generatrice devoit être placée en  $MG$ , & elle devoit rencontrer  $FM$  en quelque point  $N$ , en sorte que l'angle  $FNG$  étoit double de l'angle  $FAM$ .

Car les points  $M$  &  $G$  n'étant considérés que comme un seul point, si l'angle  $DMK$  se meut sur  $M$ , & que son côté  $MD$  passe en  $MA$ , le côté  $MK$  passera en  $MN$  ou  $GN$ , & l'angle  $KGN$  sera égal à l'angle  $DMA$ . Mais l'angle  $DMA$  a été démontré double de l'angle  $FAM$ ; donc l'angle  $KGN$  est double de l'angle  $FAM$  ou  $FAG$ . Mais aussi à cause des parallèles  $FN$ ,  $MK$ , l'angle  $FNG$  sera égal à l'angle  $KGN$ ; donc enfin l'angle  $FNG$  sera double de l'angle  $FAG$ .

Il s'ensuit de là que les points  $FGA$  seront à la circonférence d'un cercle dont le point  $N$  sera le centre, & les lignes  $NF$ ,  $NG$ ,  $NA$  seront égales entr'elles.

Si l'on poursuit la description de la generatrice comme on a enseigné, en cherchant un autre point  $H$ , en sorte que le triangle  $AGH$  soit formé par les lignes  $PO$  &  $MO$  sur  $AG$  égale à  $DM$ , on démontrera comme on a fait ci-devant que l'angle  $GAH$  sera la moitié de l'angle  $GQH$  formé par la ligne  $GN$  & par la ligne  $OI$  placée en  $HQ$ , & qui rencontrera  $GN$  en quelque point  $Q$ , & par con-

féquent le cercle qui passeroit par les points  $GHA$  auroit son centre en  $Q$ , & les lignes  $QG$ ,  $QH$ ,  $QA$  seroient égales entr'elles ; mais ce point  $Q$  placé sur  $GN$  ne peut pas être différent du point  $N$ , puisque  $NG$  &  $NA$  sont aussi égales entr'elles ; c'est pourquoi le point  $N$  fera le centre d'un cercle qui passera par les points  $FGHA$ .

On fera la même démonstration pour tous les autres points qu'on trouvera de la generatrice ; & par conséquent la generatrice cherchée sera un cercle qui aura  $NF$  pour son rayon , & dont le point décrivant  $A$  de la Courbe proposée , sera placé à l'extrémité d'un de ses diametres.

*Autre Exemple.*

Soit une Courbe  $FB$  donnée pour roulette , & la ligne droite  $VA$  aussi donnée pour sa base , & soit  $FV$  l'axe de la Courbe qui est perpendiculaire à la Courbe en  $F$  & à la base en  $V$ . FIG. 22.

Si de tous les points comme  $B$  de la Courbe on mene une perpendiculaire  $BD$  à la base , la propriété de cette Courbe est telle que si sur  $BD$  comme diametre on décrit le demi-cercle  $BOD$ , & qu'on y mene la corde  $BO$  égale à l'axe  $FV$ , la ligne  $BOA$  sera perpendiculaire à la Courbe  $FB$  proposée.

Ayant tiré  $DO$ , on aura le triangle rectangle  $DOB$  semblable au triangle rectangle  $ADB$  ; & par conséquent le rectangle  $AO$ ,  $OB$  sera égal au quarré de  $DO$ .

Maintenant si sur quelque perpendiculaire à la Courbe comme  $BA$ , ou sur l'axe  $FV$  qui lui est aussi perpendiculaire, on forme la generatrice  $AHI$  par la methode proposée ci-devant, le point  $B$  étant le point décrivant , & toutes les lignes comme  $BA$ ,  $BH$  representant dans cette generatrice les perpendiculaires à la Courbe, &  $BI$  étant la plus courte qui represente  $FV$ ,  $BI$  sera aussi l'axe de la generatrice , & la perpendiculaire  $Id$  sur  $BI$  au point  $I$  representera la base  $VD$  perpendiculaire à l'axe  $FV$  en  $V$ .

Il s'ensuit de la propriété donnée que si du point  $B$

pour centre & pour rayon  $BI$  égale à  $FV$ , on décrit un cercle  $IEO$ , il doit passer par tous les points comme  $O$  des lignes qui representent sur la generatrice les perpendiculaires comme  $BA$  à la Courbe  $FB$ , & que  $DI$  menée du point  $D$  au point  $I$  de la generatrice, touchera le cercle en  $I$ , & sera égale à  $DO$ . Car par la formation de la generatrice, puisque la partie  $BK$  de la Courbe proposée  $BKF$  est indéfiniment petite, &  $AB$  étant perpendiculaire à la Courbe en  $B$ , on peut considerer  $AK$  comme égale à  $AB$ , &  $KL$  étant aussi perpendiculaire à la Courbe en  $K$ , le triangle  $AKL$  s'est placé en  $ABH$  pour la formation de la generatrice, en sorte que  $AH$  égale à  $AL$  est la corde indéfiniment petite de la generatrice, & par ce mouvement l'angle  $BAK$  est égal à l'angle  $HAL$ . Mais par le Lemme suivant l'angle  $AKL$  est double de l'angle  $BAK$ ; donc tous les angles ensemble comme  $ABH$  égaux aux angles  $AKL$  qui sont formez dans la generatrice par les lignes menées du point  $B$  aux points de cette generatrice jusqu'à l'axe  $BI$ , feront ensemble un angle  $ABI$  double de tous les angles  $BAK$ , ou de ceux que font toutes les cordes comme  $HAL$  les unes avec les autres qui sera l'angle  $IdT$ . Et si par tous les points  $K$  on mene des paralleles  $KS$  aux perpendiculaires les plus proches comme  $KA$ , l'angle  $AKS$  étant égal à l'angle  $BAK$  qui est la moitié de l'angle  $AKL$ , on aura l'angle  $SKL$  égal à l'angle  $BAK$ . Mais aussi tous les angles ensemble  $SKL$  que font toutes les perpendiculaires à la courbe les unes avec les autres de suite, ne peuvent être égaux qu'à l'angle  $ABD$  fait de la premiere  $AB$  & de la derniere  $VF$ , ou de sa parallele  $DB$ : c'est-pourquoi l'angle  $ABI$  sera double de l'angle  $ABD$ , & par consequent la ligne  $Id$  perpendiculaire à  $BI$  en  $I$  tombera sur  $ID$ , & les deux triangles  $DBO$ ,  $DBI$  seront égaux & semblables, &  $DI$  touchera le cercle  $IEO$  en  $I$  & sera égale à  $DO$ .

Mais de plus, puisque l'angle  $DBI$  est égal à l'angle  $DBA$ , & que  $ADT$  touche la generatrice en  $A$  & qu'elle rencontre



rencontre l'axe  $BI$  en  $T$ ,  $DA$  sera égale à  $DT$ ; & si du point  $A$  on mène  $AR$  parallèle à  $DI$  ou perpendiculaire à l'axe  $IB$ ,  $IR$  sera égale à  $IT$ , ce qui est une propriété de la touchante d'une parabole au point  $A$ . Et comme ce sera la même chose pour tous les autres points de la génératrice  $IHA$ , les points  $I$  &  $B$  demeurant les mêmes, il s'en suit que la génératrice sera une parabole.

Mais comme les deux triangles rectangles  $TAR$ ,  $ADO$  ont leurs angles égaux en  $T$  & en  $A$ , ils seront semblables, &  $TR$  sera double de  $AO$ , comme  $TA$  est double de  $AD$ ; donc  $RI$  est égale à  $AO$ , & par conséquent le rectangle  $RI$ ,  $IB$  ou le rectangle  $AO$ ,  $OB$  qui lui est égal puisque leurs côtés sont égaux, lequel est égal au carré de  $DO$ , sera aussi égal au carré de  $DI$  qui sera le quart du carré de  $AR$  ordonnée à l'axe  $IB$  & double de  $DI$ ; donc enfin le point  $B$  est le foyer de cette parabole.

## L E M M E.

Soit le demi-cercle  $HIG$  dont le diamètre  $HG$  est perpendiculaire sur la touchante  $GA$  prolongée vers  $F$ , & soit une corde  $HI$  appliquée dans le cercle & prolongée en  $A$  à la touchante  $GA$ . FIG. 22

Soit aussi  $HE$  perpendiculaire à  $HA$  au point  $H$ ; & de quelque point  $E$  indéfiniment proche de  $H$  soit  $EF$  perpendiculaire à  $GA$  & par conséquent parallèle à  $HG$ , & sur  $EF$  soit décrit le demi-cercle  $ELF$ . Du point  $E$  soit appliqué dans le cercle  $ELF$  la corde  $EM$  égale à la corde  $HI$  & prolongée en  $D$ , & soit mené  $ELB$  parallèle à  $HA$ , & de plus la ligne  $EA$ .

A cause de l'angle  $BED$  indéfiniment petit, on a  $EL \parallel EM \parallel ED \parallel EB$ . Mais à cause des parallèles qu'on a menées  $EL \parallel EM$  ou  $HI$  on égale  $\parallel EF \parallel HG$  &  $\parallel EB \parallel HA$  ou  $EA$  qu'on peut lui supposer égale: donc  $ED \parallel EB \parallel EB \parallel EA$ .

Mais  $DA$  étant indéfiniment petite par rapport à  $EB$  grandeur déterminée, si l'on mène  $RS$  perpendiculaire à  $ED$  & à  $EA$ ,

C'est pourquoi ayant  $ED \mid EB \parallel EB \mid EA$ , si l'on divise, on aura  $ED \mid EB - ED$ , ce qui est  $DR \parallel EB \mid EA - EB$ , ce qui est  $SA$ , donc  $ED \mid EB \parallel DR \mid SA$ . Mais la différence des deux  $ED$ ,  $EB$  est indéfiniment petite; donc la différence des deux  $DR$ ,  $SA$  qui sont elles-mêmes indéfiniment petites, sera encore indéfiniment petite; c'est pourquoi elles doivent être considérées comme égales entr'elles, &  $BR$ ,  $BS$  aussi égales; & par conséquent l'angle  $BER$  égal à l'angle  $BES$  égal à l'angle  $EAH$ , donc l'angle  $AED$  sera double de l'angle  $EAH$ .

*Secondement.*

Une courbe telle qu'on voudra étant proposée comme une roulette avec une autre Courbe aussi telle qu'on voudra pour être sa generatrice, & donnée de position avec un point de la roulette sur le plan de la generatrice, comme point décrivant, la generatrice étant dans la position donnée, il faut déterminer la base.

FIG. 24. Soit la Courbe proposée  $AP$  pour roulette, & la Courbe  $BE$  pour generatrice qui est donnée de position par rapport à la roulette  $AP$ , quand le point décrivant  $P$  du plan de la generatrice est aussi donné de position sur la roulette quand la generatrice est en  $BE$ .

On suppose qu'on sçache mener des perpendiculaires tant à la Courbe  $AP$  qu'à la generatrice  $BE$ .

Soit donc du point  $P$  la perpendiculaire  $PB$  à la roulette  $AP$ , laquelle rencontre en  $B$  la generatrice  $BE$ . Soit aussi par le point  $B$  de la generatrice la ligne  $CB$  qui lui soit perpendiculaire, & qui par les propositions précédentes doit aussi être perpendiculaire à la base dans ce même point  $B$ , quand le point  $P$  décrivant est sur la roulette. C'est pourquoi si l'on mene  $BF$  perpendiculaire à  $CB$ , elle touchera la generatrice  $BE$  & la base aussi dans ce même point  $B$ ; & par conséquent une portion de  $BF$  indéfiniment petite & contiguë à ce point, sera considérée comme partie de la base & de la generatrice tout ensemble.

Mais soit un autre point  $A$  de la roulette indéfiniment

proche du point  $P$ , & par ce point  $A$  soit la perpendiculaire  $AG$  à la roulette, laquelle rencontre la generatrice en  $G$  dans la position où elle est, & la touchante  $FB$  en  $I$ . Maintenant si sur  $P$  on forme le triangle  $PHB$  dont le côté  $BH$  soit égal à  $BG$ , & le côté  $PH$  égal à  $AG$ .

Ayant fait mouvoir ce triangle  $PHB$  sur le point  $B$ , ensorte que la ligne  $BH$  soit posée en  $BI$  sur  $FB$ , & le côté  $HP$  en  $IL$ , &  $BP$  en  $BE$ , l'angle  $PBL$  sera égal à l'angle  $HBI$ , & les points  $G$  &  $I$  ne doivent être considérés que comme un même point, puisque la partie  $BI$  de la touchante  $FB$  de la Courbe  $GB$  est indéfiniment petite.

Mais si dans cette position du triangle  $HPB$  en  $ILB$ , la ligne  $IL$  n'est pas posée sur  $GA$ , & qu'elles fassent ensemble un angle comme  $LIA$ , par le point  $I$  soit mené la ligne  $IK$  qui fasse avec  $FIB$  au point  $I$  l'angle  $FIK$  égal à l'angle  $LIA$ , il s'ensuit que si l'on fait mouvoir sur le point  $I$  le plan sur lequel est le triangle  $BIL$ , ensorte que la ligne  $IL$  qui est  $GD$  ou  $IA$  soit placée sur  $IA$ , la ligne  $IF$  qui étoit touchante de la base en  $B$ , sera placée en  $IK$ , & le point  $G$  de la generatrice étant placé en  $I$ , toute la generatrice aura changé de place dans cette seconde position, ensorte que la perpendiculaire à  $IK$  au point  $I$  sera touchante des Courbes qui décrivent la generatrice & la base par leur évolution, ce qui suit des premieres propositions. Ainsi on aura les positions de toutes les touchantes indéfiniment petites de la base, comme  $BI$ ,  $IK$ , &c. ce qui formera cette base.

Il s'ensuit delà que si le point  $L$  est joint au point  $A$  après le premier mouvement que la ligne  $HP$  a fait en  $IL$ , la base aura un recourbement dans le point  $B$ ; mais si le point  $L$  est placé entre  $P$  &  $A$  comme dans cette figure, la base aura sa convexité tournée vers  $P$ , au contraire si le point  $L$  est au delà de  $AI$ , la base aura sa concavité tournée vers  $A$ ; car il faudra dans le second mouvement ramener  $IL$  en  $IA$ , ce qui suit des propositions qu'on a démontrées d'abord.

On pourra aussi déterminer la nature de la base si l'on a quelque propriété particulière tant de la roulette donnée que de la generatrice : mais il me suffit d'en avoir indiqué la methode , comme j'ai fait dans l'exemple précédent pour la détermination de la generatrice par les proprieté de la roulette & de la base.

SUITE DE LA PREMIERE  
Partie du Supplément au Memoire sur la  
Voix & sur les Tons.

P A R M. D O D A R T.

IV. ADDITION.

*De la difference des tons de la parole & de la voix du chant  
par rapport au recitatif, & par occasion, des expressions  
de la Musique antique & de la Musique moderne.*

1706.  
24. Avril.

**J**E n'avois pas dessein de rien dire sur la difference des tons de la voix de la parole & de la voix de chant : mais à l'occasion de ce que j'ai dit sur la difference du son de ces deux voix , je dirai ce que je pense sur la difference de leurs tons , sur ce en quoi elle consiste , sur l'usage qu'on en fait dans la Musique recitative , sur celui qu'on y en pourroit & peut-être qu'on y en devoit faire , & sur ce qu'on pourroit attendre pour la perfection de cet art en ce qui est du chant , dans le progrès merveilleux qu'il a fait pour la simphonie depuis son renouvellement , c'est-à-dire , depuis près de 700 ans jusqu'à present. Car ce bel art avoit été absolument perdu durant plus de 700 autres années avant Guy d'Arezzo pere de la Musique telle que nous l'avons , très-differente de l'antique , fort au-dessus pour le contre - point , & peut-être même pour le chant en ce qui regarde le plaisir de l'oreille , mais fort au-dessous en tout ce que le chant peut avoir de ca-



Fig 1<sup>re</sup>

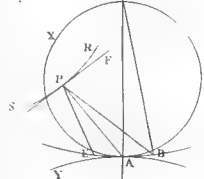


Fig 4

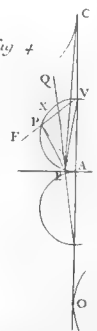


Fig 6

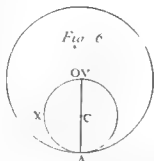


Fig 7

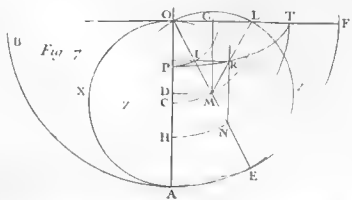


Fig 2

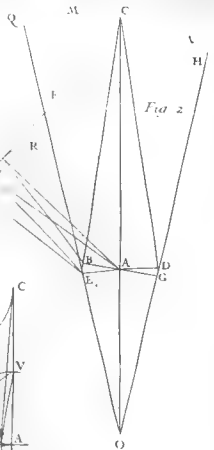


Fig 3

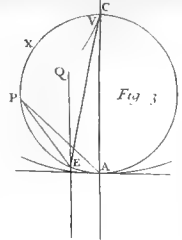


Fig 5

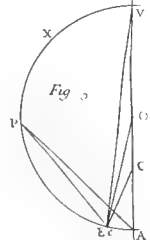
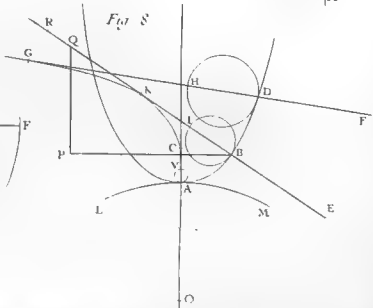
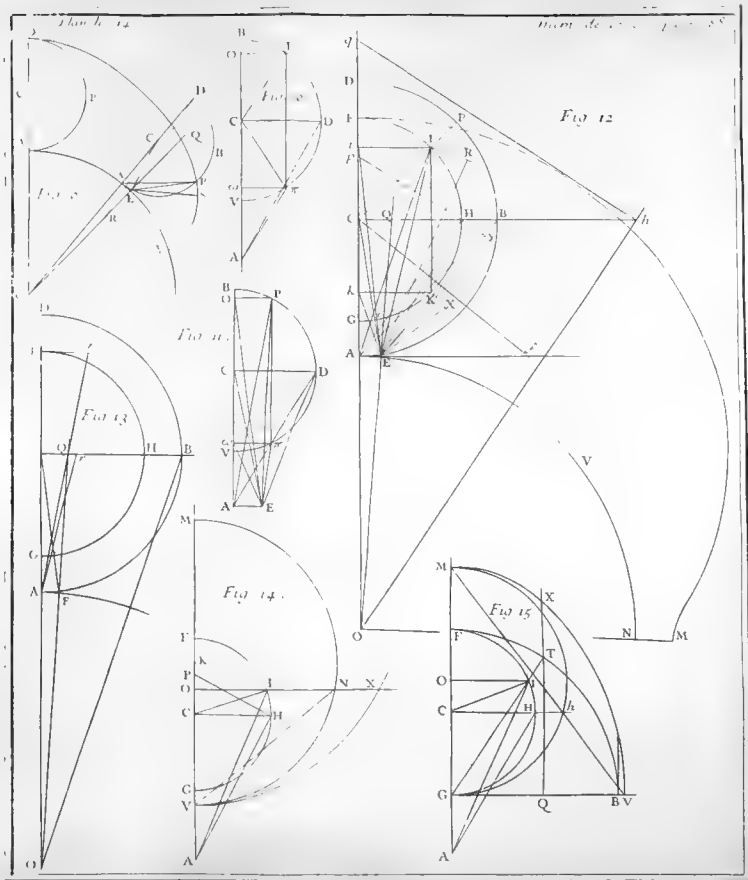


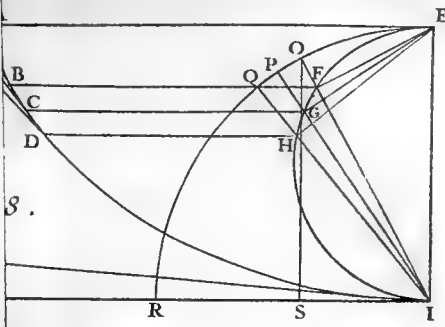
Fig 8











8.

Fig. 24.

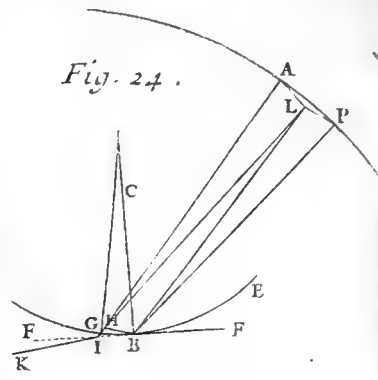


Fig. 22.

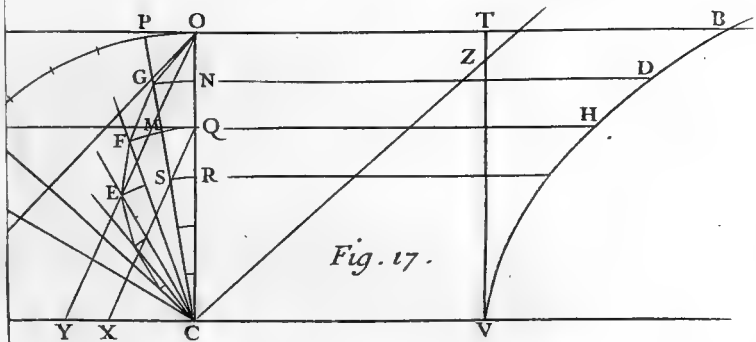
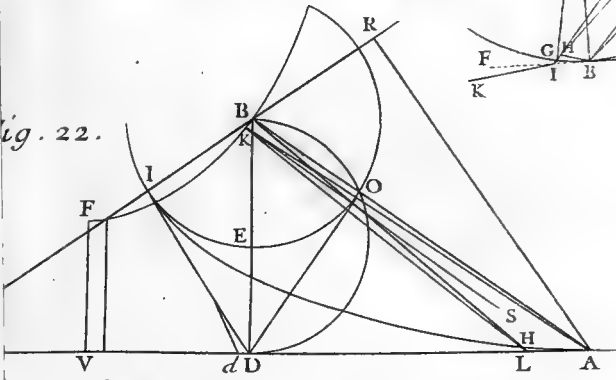


Fig. 17.

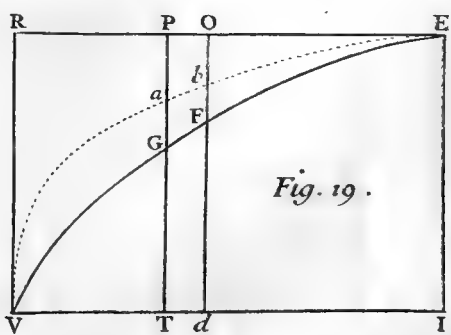
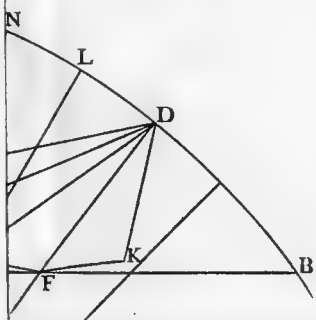


Fig. 19.



pable de toucher le cœur par l'expression des mœurs & des passions, dont les anciens Grecs ont sçu tirer de si grands avantages. Car la Musique étoit chez les Anciens un art très-serieux, étant considéré comme important au gouvernement des Etats par la part qu'ils lui donnoient à l'éducation de la jeunesse. Cet âge s'étendoit à cet égard jusqu'à 28 ans chez certains Peuples, & chez d'autres jusqu'à 30. Le but des Anciens du premier âge immédiatement après les tems heroïques, environ mille ans avant l'Ere commune, étoit de former les mœurs, de moderer les passions qui les pouvoient corrompre, & d'exciter celles qui pouvoient les regler & les conserver, & cela par un moyen agreable capable d'insinuer la vertu. Celle-cy étoit leur fin, & le plaisir le moyen. Ainsi leur principale attention dans la Musique étoit d'émouvoir certaines passions, & calmer les autres pour parvenir au reglement des mœurs & toucher le cœur d'une maniere convenable à ces deux intentions. Quant au reste, c'est-à-dire, le plaisir de l'oreille, ils n'y avoient d'égard qu'autant qu'il étoit possible sans préjudice de leur principale intention.

Il falloit donc imiter dans le chant les tons les plus naturels aux passions, & ces tons doivent être dans la Musique recitative, & on peut même dire en toute Musique, surtout dans la vocale, les plus ressemblans qu'il se peut à ceux de la parole; car la parole a ses tons comme le chant a les siens. On connoît les tons de la parole dans la conversation; mais ces tons paroissent beaucoup plus dans les discours des personnes agitées de quelque passion que ce soit, & chaque passion a ses tons & ses mouvemens, au sens auquel on a coutume de prendre ce mot en Musique. Les tons devroient être à peu près les mêmes en toute nation, car la nature est la même par tout; cependant il n'en est pas absolument ainsi. Il s'y mêle des tons d'institution qui sont ceux des langues & des dialectes; mais malgré ce mélange un homme attentif à une conversation passionnée entre plusieurs personnes de quelque nation que ce soit dont il ignoreroit la langue, distinguera

facilement par l'oreille seule quelle est la passion qui anime la conversation.

Il n'est pas aisé de rapporter ces tons à la Musique. Une personne passionnée ne pense ni à chanter ni à divertir l'oreille, elle ne tend uniquement qu'à toucher le cœur en la manière qui lui convient; par exemple, d'effroy ou de pitié, qui sont les passions regnantes dans le tragique, ou de quelqu'autre passion selon les occasions qui se présentent dans la vie commune. Tout cela n'est touchant dans les spectacles & dans la Musique, que parce qu'il l'est dans les actions ordinaires des hommes. Ainsi les tons & les mouvemens qui ont rapport aux passions ne sont touchans dans la Musique, qu'autant qu'ils sont conformes aux tons & aux mouvemens que la passion produit dans le commerce ordinaire. Les intervalles des sons de la parole ne sont souvent que d'un demi-ton, quelquefois hors de mode, souvent d'un quart de ton. Cependant c'est delà que dépend presque tout ce que la Musique peut avoir de touchant par l'expression des passions dans sa partie harmonique. Car ils en comprenoient six sous le nom de Musique. Celle qu'ils comptoient la première & qu'ils regardoient comme la principale étoit la Rythmique, & celle qu'ils comptoient la dernière & qu'ils considéroient le moins étoit l'Harmonique. Ils souffroient les fautes & les licences en celles-cy, mais ils n'en pardonnoient aucune dans la Rythmique. Cette partie regloit les démarches & certains autres mouvemens, le tems & la cadence de la recitation, les gestes & la composition de toute la personne, & apparemment plus celle de son visage que de tout le reste du corps; car ils vouloient que tout concourût à l'expression des mœurs & des passions. Cela étant, ce qu'ils pouvoient faire de mieux dans la partie harmonique de la Musique pour arriver à cette expression, c'étoit de se rendre attentifs aux inflexions naturelles de la voix passionnée, & de tâcher de les imiter dans la composition du chant. C'est ce qui a donné lieu au genre Chromatique de Timothée de Milet par les demi-tons

hors de mode, & à l'Enharmonique d'Olympe par la subdivision des demi-tons en quarts de ton.

On peut bien & mal user de ces subdivisions par rapport aux mœurs, car elles peuvent flatter les passions dangereuses, comme elles peuvent servir à en exciter de louables & d'utiles. Mais sans entrer ici dans l'abus qu'on en peut faire, ces subdivisions ont servi dans la Musique antique à former une partie de ses expressions, & d'ailleurs il paroît certain que le genre enharmonique ne peut avoir été introduit que pour cette seule raison, n'offrant rien à l'oreille qui ne la doive blesser par la bizarrerie de ses intervalles, ni qui puisse plaire, sinon au cœur par une expression capable de le toucher, & par conséquent capable de lui plaire dans l'imitation. Car il semble qu'on peut regarder le cœur à cet égard comme l'organe d'un sixième sens d'autant plus distingué des cinq sens externes, qu'ayant besoin des organes externes pour être ébranlé, & ne l'étant ordinairement que par leur rapport, il est souvent agréablement touché dans l'imitation, de ce qui frappe les sens desagréablement, & qui frapperoit le cœur de la même manière, hors le cas de l'imitation.

Quoiqu'il en soit, les expressions de la Musique antique alloient à peindre les passions, dont les Législateurs, les Magistrats & les Philosophes approuvoient la représentation pour former les mœurs de l'État à la magnanimité, à l'humanité & à la sagesse, par la crainte & la piété; plus curieux d'instruire & de toucher le cœur par des sentimens qui font les grands hommes, que de plaire à l'oreille en flattant les passions basses qui les avilissent, & qui n'ont nul besoin du secours de la Musique pour être excitées. Ces chants si concertés d'après nature n'étoient accompagnés pour tout contre-point que d'une espèce de contre-partie en quarte, en quinte ou en octave sur l'instrument qui accompagnoit la voix; car les Anciens ne reconnoissoient pour accords ni les tierces ni les sixtes qui donnent un si grand jeu à la composition à plusieurs parties.

Cependant malgré cette simplicité ces chants faisoient sur les hommes, au moins une partie des grands effets auxquels toute l'antiquité rend témoignage. Effets surprenans qu'on a peine à croire en ce tems-cy, où on n'éprouve plus rien de pareil de la Musique. Il ne seroit pourtant pas impossible de prouver non-seulement la possibilité, mais encore la vérité d'une partie de ces grands effets. Mais cela ne se peut que dans un Memoire particulier, celui-cy n'étant déjà que trop long.

Il n'auroit peut-être pas été impossible aux Anciens de rendre leur melodie morale & pathetique plus agreable, en la joignant avec une basse continuë, s'ils avoient sçu le contre-point. Ils auroient même pû y joindre plus d'agrément, s'ils avoient connu le contre-point figuré : mais l'honneur du premier contre-point étoit réservé à l'onzième Siecle de l'Ere commune, & l'honneur du second au quatorzième. On pourroit donc dans 49 chordes du système moderne, multipliées par le rétablissement des chordes du genre enharmonique jusqu'au nombre de 97, trouver tout ensemble & la Musique expressive des Anciens, & l'agrément de la symphonie moderne, malgré les demi-tons hors de mode du Chromatique, & les quarts de ton de l'Enharmonique : mais trois causes nous priveront toujours de cet avantage, malgré tous les efforts de la Musique moderne pour parvenir à l'expression. La premiere cause est l'impossibilité de faire entonner juste aux Musiciens des quarts de ton. C'est ce qui a fait renoncer toute la Musique antique depuis Aristoxene, à plus forte raison toute la Musique moderne au genre Enharmonique. La seconde cause est le peu de litterature d'une grande partie des Maîtres de l'art. La troisième qui est une suite de la seconde, le peu d'attention que la plupart des Maîtres donne à imiter les tons naturels. Ce n'est pas que tous les Maîtres de Musique ne se piquent d'imiter, mais toute l'imitation que plusieurs se proposent ne consiste gueres en ce qu'il y a de moral dans le sujet. C'est, par exemple, monter le ton quand le mot *Ciel* entre dans la lettre

lettre du sujet, baïsser le ton quand il y est parlé de la *Terre* & des abîmes, quoiqu'il fallût souvent faire tout le contraire par rapport au sens de la lettre. C'est encore imiter le bruit d'une tempête, ou d'un fracas, ou du tonnerre, ou l'agitation de la mer & des vents, quelques chûtes ou quelques vols qui sont choses si étrangères à tout ce qu'il peut y avoir de moral dans la Musique, que rien au monde n'est plus propre à le faire entièrement perdre de vûë. Cette imitation moderne consiste encore, & trop souvent, à exprimer par des tons & des mouvemens gais le sens d'une parole gaie, enclavée dans un sujet serieux, grave ou même triste, ou à représenter le sens d'une parole triste dans un sujet tout enjoué, & tout cela parcequ'une partie des Maîtres ne cherche dans la Musique que la surprise de l'oreille des Auditeurs, sans aucun égard à satisfaire leur propre raison & celle de l'Auditeur. Je passe sous silence ces longs passages souvent composés de doubles & triples croches sur une seule syllabe, ces répétitions si multipliées, ces fugues & mille autres semblables jeux de composition, admirables surtout dans la Musique instrumentale, mais qui ne signifient rien dans la Musique vocale, sinon la délicatesse, la souplesse & la legereté d'un gosier capable de franchir ces passages à perte d'haleine, sur une seule syllabe, & le profond sçavoir d'un Compositeur capable de soutenir l'agréable jeu de tant de parties les unes avec les autres. Car il n'y a personne qui ne s'apperçoive dans un moment de reflexion que tout cela ne va point au cœur, & n'est capable que de plaire à l'oreille & de la surprendre; ce qui paroît, comme j'ay dit cy-dessus, être l'unique ou le principal but de la Musique moderne. Il n'y a donc nulle apparence ni d'espérer le rétablissement de la Musique morale des Anciens pour la composition du chant & pour la culture politique des bonnes mœurs, ni de craindre ce rétablissement pour le mauvais effet qu'il pouvoit produire dans les mœurs, si on entreprenoit ce rétablissement sur le plan des mœurs publiques, & d'ailleurs rien n'est si opposé à la conciliation de

*J'en ay vu  
46 sur une  
syllabe dans  
un motet  
d'Occupati  
Ce motet é-  
toit sur le  
dernier Vers.  
du Pseaume  
c x v i i i.  
Erravi sicut  
ovis quæ pe-  
ruit, quære  
servum tuû  
quia man-  
datum non  
sumoblitus.  
Et le passage  
étoit sur la  
syllabe quæ  
dans quære*

la Musique ancienne avec la moderne, quelque avantage réciproque qu'elles pussent tirer l'une de l'autre, que le charme des symphonies d'apresent, à cause de l'avantage que leur donne le systême moderne par ses 49 chordes sur le systême des Grecs, qui dans la plus grande richesse n'a jamais eu que quinze chordes en chaque genre réglées sur l'étenduë ordinaire de la voix. Cela suffit sur la difference des tons de la parole aux tons musicaux.

## V. A D D I T I O N.

*Les muscles propres des cartilages du larynx ne donnent aucun mouvement à la Glotte, qui ne soit contraire à la formation de la voix, ou qui y contribuë immédiatement.*

1706.  
4 septemb.

J'y dit dans les notes sur le Memoire de la voix, que qui considerera bien les suites de la Mechanique du larynx, telle que je l'ay décrite, tiendra pour prouvé que le seul usage des muscles propres extérieurs du larynx à l'égard de la voix, est de tenir ferme & ouverte la caisse composée des cartilages du larynx pour servir d'appui à la Glotte dans son mouvement actif, nécessaire pour la voix : car elle a des mouvements passifs par certains muscles latéraux tant externes propres du larynx qu'internes propres à la Glotte même. Mais de ces muscles les externes ne peuvent que relâcher la Glotte & par consequent nuire à la voix, & les internes ne peuvent gueres que faciliter l'évacuation des gros excremens du poulmon. J'avois invité dans la même note Messieurs les Anatomistes à examiner cette matiere qui paroît importante pour confirmer la cause précise de la voix. En attendant leur décision je diray pour y donner lieu ce qui m'est venu dans l'esprit sur ce sujet.

Tout ce que j'ay lû d'Anatomistes imprimés qui sont entrés dans le détail des organes de la voix & des tons, ont crû que l'usage des muscles propres du larynx est de dilater la Glotte & de la resserrer ou de l'accourir & la dilater pour les tons bas, & de l'allonger & étrecir pour les tons hauts.



Il me paroît impossible que cela soit. La démonstration Mechanique résulte de la position des muscles tant intérieurs qu'extérieurs telle qu'elle est d'écrite sous la note susdite ; car elle démontre qu'ils sont incapables d'augmenter ou diminuer la glotte, au moins d'une manière qui puisse contribuer à la voix. De plus le raisonnement suivant me semble démonstratif.

Tous les mouvemens du larynx qui accourceroient la glotte approcheroient le cartilage antérieur des postérieurs. Or par cette approche ils en relâcheroient les lèvres, & il faut nécessairement qu'elles soient bandées pour produire le son de la voix ; car sans cela il n'y auroit nul fremissement, & sans fremissement il n'y auroit nul son de voix. De plus tous les mouvemens du larynx qui l'étréciraient iroient à l'allonger, ceux qui la dilateraient tendraient à l'accourcir. Or un de ces effets iroit à détruire ou à compenser l'autre, & par cette compensation il n'y auroit plus de changement de ton ; car allonger est augmenter, & par-là tendre à produire un ton plus bas : étrécir est diminuer, & par-là tendre à produire un son plus haut. Ainsi le même mouvement iroit ou à produire deux effets incompatibles, ou à jeter à peu près le même son si on diminuoit autant l'ouverture en l'étrécissant qu'on l'augmenterait en l'allongeant, réciproquement si on diminuoit autant l'ouverture en l'accourcissant qu'on l'augmenterait en la dilatant. Aussi voit-on dans la coupe ou embouchure des anches des haut-bois que celles qui sonnent le plus bas sont tout ensemble & les plus ouvertes & les plus longues, & que les anches qui sonnent le plus haut sont tout ensemble & les plus serrées & les plus courtes. Les glottes depuis le plus bas âge où on a la voix la plus claire jusqu'à l'âge fait, où la voix est la plus grave vont toujours en s'ouvrant & s'allongeant de plus en plus à proportion du progrès de l'âge jusqu'à l'âge de puberté, où l'accroissement précipité de tout le larynx fait mûrir la voix.

## VI. ADDITION.

*La suppression totale de l'air par la glotte formée exactement, confirme la même vérité.*

On peut voir dans le Memoire auquel celui-cy sert de supplément, la description de l'ouverture de la glotte en l'état où elle est mise pour produire la voix, & sous la note *b* l'état où est cette ouverture quand il ne s'agit que de respirer, ou de parler bas, ou de souffler, ou de donner issue aux excremens du poulmon; car elle a tous ces usages sans compter le nombre infini d'usages differens renfermés dans celui de produire la voix dans les sons innombrables que l'exécution de la Musique suppose. Mais il n'est parlé dans ce Memoire qu'en un endroit & seulement en passant d'un troisième usage, qui consiste, dans la suppression totale & volontaire de la respiration, & il n'en est dit qu'un mot dans les notes, parce que dans ces deux endroits il ne s'agissoit pas principalement de cet usage, mais indirectement.

Cependant on peut tirer un grand avantage pour l'établissement de la cause précise de la voix, de l'état où la glotte se met elle même en supprimant l'air, & se rendant incapable par-là de produire en ce moment aucun son de voix. Car la cause principale & précise de la voix est fondée toute entiere sur le mouvement volontaire & actif des deux cordons musculieux-tendineux qui constituent les levres de la glotte, & qui doivent produire tous les mouvemens. Or plus on est obligé de les reconnoître actifs pour la suppression totale de l'air, plus on doit les reconnoître actifs pour l'économie de la dépense de l'air dans son passage gradué pour la formation des differens sons. Car on ne peut fermer le passage de l'air qu'en passant par tous les degrés de resserrement depuis le premier jusqu'à l'extrême, duquel résulte la réduction de la ligne circulaire de chacune des levres à la ligne droite, d'où s'ensuit le contract immédiat des deux levres dans toutes leur étendues.

duë, & conséquemment l'entiere suppression de l'air.

Dans les premiers degrés d'approche mutuelle des deux levres, on peut chicaner en attribuant la cause du rétrécissement de la glotte pour la production des tons de la voix de bas en haut aux muscles internes du larynx : mais on ne leur peut attribuer ni de fermer entierelement la glotte, ni de remplir entierelement tout le canal du larynx. Or il faudroit qu'ils fissent l'un ou l'autre pour supprimer totalement la respiration. Il ne faut que considerer le volume de ces muscles tapis sur le concave du larynx de part & d'autre de la glotte les attaches haut & bas de chacun de ces muscles haut & bas au-dessous de la glotte, la nature & la situation des parties auxquelles ils sont attachés, pour voir qu'ils sont incapables de satisfaire à aucun de ces deux usages ; & en effet, s'ils font quelque chose aux mouvemens de la glotte, c'est pour l'ouvrir quand elle est entierelement relâchée pour laisser l'issuë libre aux excremens du pöümon, & non pour la resserrer. De tout cela résulte ce raisonnement.

Les tons de la voix sont certainement l'effet d'un mouvement volontaire capable de resserrer la glotte moins ou plus en autant de degrés qu'il y a de tons actuels & possibles. Ce mouvement volontaire ne peut être celui des muscles propres du larynx. Ce n'est pas celui des muscles externes tant anterieurs que posterieurs, qui ne peuvent que dilater la caisse du larynx en tout sens. Ce n'est pas celui des muscles externes lateraux qui ne peuvent que relâcher la glotte ni celui des muscles internes qui ne peuvent que la dilater pour donner passage aux gros excremens du pöümon. Il faut donc que ce soit quelque autre partie soumise à la volonté, qui par ses attaches & sa direction soit capable de resserrer la glotte naturellement ouverte, & de la resserrer en tous les degrés musicaux depuis son ouverture naturelle jusqu'à son entiere clôture exclusivement.

Or les cordons des levres de la glotte ont leurs attaches, leur direction, leur position très-convenable à cet effet.

en tous degrés, & même à fermer exactement la glotte.

Ces cordons doivent donc être chacun de son côté l'organe du rétrécissement gradué de la glotte pour les tons musicaux du plus bas au plus haut son dans chaque glotte.

## VII. ADDITION.

*Les changemens de la Glotte viennent de la Glotte même par deux muscles de structure extraordinaire.*

Comment ces cordons ne seroient-ils pas l'organe du rétrécissement gradué de la glotte, puisqu'ils sont certainement celui de la clôture absolue de la glotte ? Car il est certain que la glotte ne peut passer de l'état de son ouverture naturelle, qui est celui qui convient à la respiration, libre, à celui de la clôture absolue ; d'où s'ensuit la suppression de toute respiration, qu'en passant par tous les degrés possibles du rétrécissement. Or comme cette diminution poussée jusqu'à l'entière suppression de l'air est absolument volontaire, il faut que l'organe de ce mouvement soit construit de manière à pouvoir être commandé par la volonté ; il faut donc que chacun des cordons cachés dans les levres de la glotte soit ou un muscle ou quelque chose d'équivalent, c'est-à-dire un muscle d'une structure différente de la structure ordinaire du muscle, à moins qu'on ne voulût dire que la volonté de l'homme produit ce mouvement sans organe ; ce qui ne se peut dire en Physique, ni proposer en Métaphysique sans égaler la volonté de l'homme à celle du Createur. Or c'est ce qu'on ne peut prétendre raisonnablement ; ce n'est pas certainement un muscle ordinaire, c'est donc un organe extraordinaire équivalent à un muscle ordinaire, sinon dans sa structure, au moins dans son action.

Un Anatomiste célèbre qui a bien voulu vérifier par une dissection exacte ce que je lui avois dit de ces cordons cachés dans les levres de la glotte, considéroit comme ligamenteux ces deux cordons que j'appellois muscu-

leux tendineux. C'est un epithete dont je m'étois avisé pour marquer par un mot inventé ce que je voyois d'extraordinaire dans ces cordons, musculeux dans leur action, quoiqu'ils ne paroissent que tendineux dans leur structure. Cet Anatomiste les consideroit comme simplement ligamenteux, parcequ'il n'y remarquoit non-plus que moi aucune trace de fibres charnuës à aucunes des deux extremités, ni mêlées avec les fibres du cordon; mais seulement quelques fibres charnuës paralleles à ces cordons, & qui ne faisoient pas un seul corps avec eux : de sorte que je ne croyois pas possible de soutenir que ces fibres charnuës fissent avec ces fibres tendineuses un corps de muscles capable de mouvement volontaire qui pût constituer ces cordons tendineux en qualité de muscles, n'y trouvant pas la structure des autres muscles du corps humain. Je trouvois donc alors sa difficulté bien fondée, & elle l'étoit en effet à juger des choses selon la structure ordinaire.

Mais j'ay pensé depuis que l'action de ces cordons tendineux étant prouvée tant par leur position que par l'exclusion de toute autre cause capable de produire une action aussi marquée que celle qui produit le contract parfait des deux levres de la glotte, on ne pouvoit se dispenser de considerer ces deux cordons comme deux instrumens du mouvement volontaire, c'est à dire comme deux muscles d'une structure particuliere.

Dés qu'on ne peut se défendre d'admettre cette structure differente de celle de tout autre muscle, il est avantageux de la recevoir comme un nouvel exemple ajouté au nombre infini d'autres exemples de structures differentes pour parvenir à un même effet, en d'autres genres d'effets qui prouvent comme celui-cy la richesse infinie de la Mechanique du Createur.

Toutes les instances fondées sur les inconveniens prétendus, titrés du seul extraordinaire de la structure seroient donc allegués mal à propos à moins qu'on ne fit voir que cette structure extraordinaire est incompatible avec leur

action. Mais comment le pourroit-on montrer ? On connoît beaucoup mieux la structure des grands muscles de structure ordinaire , mais on n'en sçait gueres mieux ce que cette structure contribuë à leur accourcissement ; & qui pourroit empêcher que dans un aussi petit muscle on ne supposât une structure tendineuse invisible semblable à celle qu'on remarque dans la partie charnuë des autres muscles ? On connoît des contractions dans un nombre infini de fibres purement membraneuses au moins en apparence, c'est à dire, autant que les yeux sont capables de distinguer les parties dites vulgairement spermatiques de celles qu'on nomme charnuës. Le mouvement peristaltique des intestins gresles ne s'exécute pas autrement que celui de l'œsophage. Les mouvemens peristaltiques des boyaux ne sont pas à la verité soumis à la volonté , mais ils n'en sont pas moins réglés en eux-mêmes, & il ne leur manque rien pour être censés volontaires, quë d'attendre les ordres de la volonté pour entrer en exercice, & pour interrompre, presser, ou ralentir leur action. Cette action s'exécute avec un ordre merveilleux, chaque fibre membraneuse circulaire entrant en mouvement à son rang pour exprimer & transmettre la charge du boyau à la fibre voisine inferieure qui se resserre à son tour pour le même effet, sans que cette succession de mouvement soit troublée ni interrompuë tant que le besoin subsiste dans l'animal en santé à cet égard. Les mouvemens progressifs des vers ne sont pas plus réglés, & personne ne peut nier que ces mouvemens dans les vers ne soient volontaires au moins selon la maniere ordinaire de parler, & parfaitement semblables au mouvement vermiculaire des boyaux quant à l'exécution, quoique differente dans le principe.

La dépendance des muscles à l'égard de la volonté est manifestement d'institution, aussi-bien que l'union d'une ame immortelle à un corps mortel. Ce n'est pas que l'Auteur de cette institution n'ait donné des organes convenables à l'exécution de cette dépendance, & ces organes  
sont

sont les muscles ; mais on ne voit pas clairement dans ce qu'on connoît de leur structure, comme il a été dit, la raison de leur mouvement, quoiqu'on soit assuré que cette structure & l'influence des esprits sont la cause immédiate de leurs mouvemens. Il est vrai que les cordons de la glotte sont fort différens des muscles ; mais s'il avoit plu au Createur de les faire dépendre de la volonté, on en feroit quitte pour admettre deux sortes d'instrumens, des mouvemens volontaires, c'est à dire des muscles, les uns charnus & sanguins, les autres spermatiques. Car enfin dans les fibres blanches comme dans les fibres rouges, le mouvement est également, contraction par l'enceinte des esprits, & relâchement par la suspension du mouvement des esprits ou par leur dissipation. De quelque cause que procède le mouvement ou la suspension du mouvement, il se fait également dans les fibres blanches comme dans les rouges, & apparemment par la même mécanique ou par une mécanique équivalente. La seule différence que j'y trouve est, que c'est le seul besoin qui exige le mouvement des fibres blanches, & la seule volonté qui commande le mouvement des fibres rouges. Mais ni le besoin, ni la volonté n'influënt rien par eux-mêmes dans les organes. Le besoin & la volonté précédent & accompagnent, l'un les mouvemens des fibres blanches, l'autre ceux des fibres rouges : mais l'un & l'autre n'en sont que l'occasion, & ni l'un ni l'autre n'en sont les causes, puisqu'il est clair que sans l'institution divine, le besoin exigeroit en vain les mouvemens des fibres blanches, & la volonté commanderoit inutilement celui des fibres rouges. Ces organes ne sont nullement soumis par eux-mêmes ni à la volonté, ni au besoin. Car celui-ci ne peut être une cause active, puisque ce n'est souvent qu'une pure privation ; quant à la volonté, quelque active qu'elle soit en tout ce qui est compris dans l'étendue de son activité, c'est à dire de son pouvoir, elle en a aussi peu par elle-même sur les corps les plus délicats, que les corps les plus délicats & les plus mobiles ont par eux-mêmes peu d'intelligence pour recevoir les ordres de la volonté, pour

les comprendre & pour les executer. Y a-t-il donc quelque inconvenient de penser que le Createur a soumis ces deux cordons à la volonté, en les construisant capables de recevoir des esprits? Les Physiciens sont réduits à l'égard des mouvemens volontaires qui s'exécutent par des muscles de structure ordinaire, de recourir à la seule institution du Createur pour comprendre, autant qu'ils en sont capables, comment il se peut faire qu'une ame remue un corps, ce qui est encore plus difficile à concevoir, que de comprendre comment une ame peut être unie avec un corps. Sera-t-il donc plus difficile de reconnoître qu'une ame peut remuer un corps par un cordon de structure convenable, qu'il n'est difficile de comprendre qu'elle le peut remuer par un muscle de structure ordinaire, en vertu d'une institution toute-puissante, sans laquelle on ne peut entendre ni l'un ni l'autre, & par laquelle on entend également l'un & l'autre?

Les Physiciens qui regardent les brutes comme de pures machines, n'auroient nulle peine à admettre cette division de muscles en muscles sanguins & muscles spermatiques; car les mouvemens dits volontaires dans les bêtes n'exécutent selon cette opinion en conséquence d'aucun ordre de volonté, mais seulement à l'occasion des impulsions externes sur les organes des sens, d'où s'ensuivent nécessairement & mechaniquement les mouvemens dits volontaires dans les brutes. Ces mouvemens volontaires ne sont donc selon ces Physiciens en rien differens des mouvemens peristaltiques des boyaux des brutes, sinon que ces boyaux sont eux-mêmes tout ensemble l'organe d'un sens, c'est-à-dire, du toucher mechanique, en ce qui regarde leur æconomie, & en même tems les organes du mouvement peristaltique. Et ainsi les deux structures dans les brutes sont également des organes destinés à entrer en exercice dès qu'une impression externe l'exige.

Enfin si dans l'homme le cœur nous oblige de reconnoître au moins un muscle sanguin de structure ordinaire absolument indépendant de la volonté, sans aucun inconve-



nient, pourquoy y auroit-il de l'inconvenient qu'il y eût un muscle spermatique de structure extraordinaire qui fût soumis à la volonté ? J'avouë que pour moy je n'y en vois aucun. Il y auroit un très-grand inconvenient à rendre l'homme maître absolu des mouvemens vitaux du cœur par sa seule volonté, ce qui seroit le rendre maître absolu de sa vie, & il y auroit un autre inconvenient très-considérable à ne le rendre pas maître des mouvemens nécessaires pour la production de la voix & des tons qui font partie de la parole, ce qui seroit le rendre incapable de la société. Or la société est absolument nécessaire à la vie humaine.

Je donne donc pour vrai & pour prouvé dans ce Supplément, ce que je n'ay avancé que comme probable dans le Memoire & dans les Notes. C'est-à-dire que les cordons de la glotte sont de vrais muscles quant à leur usage, & consequemment des muscles d'une structure extraordinaire & singulière dans l'homme.

### VIII. ADDITION.

*Ces cordons tendineux de la glotte surmontent sans effort l'effort de plusieurs grands muscles & de l'air supprimé, non par leur propre force, mais par une adresse de mécanique naturelle, qui consiste toute, 1. dans leur position, 2. dans la simplicité d'un sphincter rectiligne.*

Avant que de quitter cet usage de la glotte si opposé à la voix, puisqu'il n'est établi que pour supprimer l'air, & cependant si propre à en démontrer l'organe ; je tâcheray de donner la solution d'une difficulté que Galien a proposée sans la résoudre, s'étant contenté d'admirer ce qu'il auroit aisément compris s'il avoit voulu faire usage de la connoissance qu'il avoit de la Mécanique.

J'ay dit sous le renvoy cy-dessus que la suppression de l'air est une action sans comparaison plus forte que la voix, & cela est vrai ; car la clôture entière suppose tous les degrés d'action nécessaires pour le chant. Mais la suppression totale comprend actuellement outre tous les degrés

necessaires pour le chant celui qui est necessaire pour la suppression totale. Galien prouve la force de cette action par la force des muscles du bas ventre, de ceux qui resserrent la poitrine, & de ceux qui remuent les bras dans les actions les plus fortes de tous ces muscles, ou de la plupart, comme dans l'éternuement, dans les plus pressantes necessitez de vider un ventre paresseux ou d'assener quelque coup de toute sa force. Car dans toutes ces occasions si importantes & si necessaires à la vie & à plusieurs arts, ces deux petits cordons seuls joints ensemble, tiennent contre huit grands muscles qui couvrent tout le ventre, quatre grands muscles très-composés qui resserrent la poitrine, sans compter les autres muscles que plusieurs Anatomistes croient non sans quelque fondement capables de la même action, comme les intercostaux. Galien admire cette résistance, & en effet elle est admirable : mais on y doit plus admirer la position que la force, car tout cela se fait sans grand effort. En voici la preuve. Ces cordons de la glotte n'agissent que sur le fondement que leur donnent les muscles extérieurs du larynx antérieurs & postérieurs, qui ne sont que quatre, très foibles par leur position, & par-là incapables de soutenir la contraction de ces deux cordons si elle avoit une force considerable. La contraction de ces deux cordons tendineux est donc manifestement un action foible. Tout cela augmente de beaucoup la difficulté proposée par Galien. Ce qui suit la pourra résoudre.

Il faut rabattre de l'effort des huit muscles du bas ventre bandez contre les muscles de la glotte, tantôt pour l'accouchement, tantôt pour l'évacuation d'un ventre paresseux, tout ce qui peut être soutenu de cet effort par l'action du diaphragme bandé, qui en cette action est le principal antagoniste de ces huit muscles. Il est vrai que l'air respiré qui emplit la poitrine pour appuyer l'action du diaphragme appuie sa contraction, & l'appuie de plus en plus à mesure qu'il se rarefie de plus en plus en s'échauffant dans la poitrine où il est retenu. Il faut donc rabattre sur

l'effort du diaphragme contre les huit muscles du bas ventre, tout ce que le volume & la rarefaction de l'air contenu dans les p<sup>ou</sup>mons contribuënt à la résistance du diaphragme contre ces huit muscles. Et il faut tenir compte aux deux petits cordons de la glotte de toute la part que le volume & la rarefaction de l'air contenu dans les p<sup>ou</sup>mons contribuënt à la résistance du diaphragme; car ce sont eux seuls qui tiennent contre ce volume d'air qui a part à la résistance du diaphragme. Or cette part n'est pas petite. Car il y faut ajouter l'effort que les muscles qui resserrent la poitrine font contre l'air qui la dilate, pour le resserer de plus en plus à mesure qu'il se rarefie, & réunir tout son effort contre le diaphragme qui doit presser les boyaux de plus en plus pour en concourir avec les huit muscles du bas ventre à chasser ce qui charge & incommode le ventre dans les deux sexes, & la matrice dans les accouchemens. Or cette action est si forte qu'elle va souvent jusqu'à jeter une partie des boyaux & même la matrice hors de la capacité du ventre, c'est-à-dire les boyaux dans les deux sexes, & la matrice dans les femmes: les boyaux en forçant l'ouverture étroite & très-forte des muscles obliques & transversaux du bas ventre menagée dans les aponevroses pour donner passage au cordon des vaisseaux spermatiques dans les hommes, & aux ligamens ronds dans les femmes: la matrice, malgré les fortes attaches qui devoient la retenir en sa situation naturelle. Or le plus fort de cette action, qui est le dernier degré de cet effort, est tout entier de l'air rarefié pressé par les côtes sur le diaphragme; car le diaphragme contrebandé & retenu par le mediastin, ne peut par lui-même que commencer l'action en diminuant sa voûture naturelle pour diminuer d'autant la capacité du ventre. Il faut donc reconnoître que le plus pénible de cet effort est réservé aux deux foibles cordons de la glotte; car ce n'est que leur contract immédiat qui soutient l'effort de l'air rarefié, pressé par les muscles intercostaux, par le diaphragme, & par tous les muscles du ventre.

Cet effort paroît fort supérieur à la force de ces deux petits muscles tendineux à n'en considérer que le volume & les fibres : mais sion en considère la situation & la direction, c'est toute autre chose ; car ils sont posez de sorte que sans effort ils peuvent soutenir les plus grands efforts de tout ce grand nombre de grands muscles dont j'ay fait mention. Voici comment.

Les liquides qui n'ont point de ressort n'ont de force que selon leur poids, & leur poids n'agit que suivant leur hauteur. Les liquides qui ont ressort agissent en tout sens, dès que les causes de la rarefaction mettent leur ressort en état d'agir : mais les uns & les autres agissent en ligne directe, les premiers de haut en bas selon le diametre & la hauteur de leur colonne, les seconds du centre à la circonférence en tout sens. Or l'air est un des liquides capables de rarefaction.

Cela étant, l'effort de l'air retenu & rarefié dans la poitrine se doit partager sur toutes les parties solides de la capacité de la poitrine qui en doivent soutenir chacune leur part. La glotte ne doit soutenir que la colonne ou la base du cône qui convient au diametre du larynx en sa partie supérieure, ou plutôt la colonne qui convient à son ouverture naturelle : car la partie solide de la glotte doit être en cela considérée, à peu près, comme le reste de la circonférence concave de la poitrine.

Ainsi ces deux petits muscles ne se trouvent chargez que de repousser l'air qui porte contre cette ouverture, ou plutôt celui qui porte contre le contract des deux levres jointes l'une à l'autre. Or elles sont jointes l'une à l'autre par un contract immediat. Cet effort se réduiroit donc presqu'à rien, c'est-à-dire à l'exercice de la seule force nécessaire pour contrebander les attaches du demi tympan de part & d'autre de l'ouverture jusqu'au point de rendre droite la ligne circulaire de chaque levre.

Il est vrai qu'une colonne d'air égale à la capacité du larynx fait quelque effort contre le tympan : mais c'est à peu près comme quelqu'un qui voudroit passer au travers

d'une ouverture fermée par deux coulisses, en poussant à plomb contre cette double coulisse parfaitement jointe au milieu de cette ouverture, & bien arrêtée haut & bas. Car l'effort de l'air n'est que de bas en haut, & la force des levres & leur direction d'avant en arrière. De sorte, qu'au pis aller l'effort de l'air à l'égard des cordons tendineux ne peut être considéré que comme deux poids égaux suspendus chacun au milieu d'une corde de la longueur des deux muscles tendineux qui constituent les deux levres de la glotte, chaque poids suspendu à sa corde bien arrêtée à ses deux extrémités. Or ces deux poids pesant à plomb ne tendroient nullement à écarter, mais seulement & au plus à cambrer & plier chaque corde également, & par conséquent sans préjudice de leur contact.

Ainsi l'air poussé directement de bas en haut ne tend qu'à soulever & seulement à proportion de son volume, & non à écarter. Il ne peut même soulever que fort peu les cordons tendineux, car il n'a de force sur eux qu'autant qu'ils lui donnent de prise. Or ils ne lui en peuvent donner qu'à proportion de leur diamètre & de leur longueur, & tout cela est fort peu de chose. Ils seront donc soulevés, si l'on veut, mais sans préjudice de leur contiguité. La partie charnue & membraneuse de chaque demi tympan prêtera beaucoup davantage à proportion de son étendue & de sa consistance, & soulagera d'autant les deux cordons.

Il n'y a donc pas lieu de s'étonner de la résistance immense du bandement de ces petits muscles à l'effort de l'air & de tant de grands muscles. Ce n'est pas par une force extraordinaire, mais par l'application avantageuse de leur peu de force qu'ils produisent un si grand effet, jointe à la simplicité de leur structure & de leur application mutuelle en sphincter rectiligne, beaucoup plus exact pour la suppression de l'air que les sphincters circulaires. Ceux-ci sont beaucoup plus aisés à forcer ; car il n'est pas possible qu'ils suppriment l'air, qu'en accourcissant leur diamètre avec beaucoup d'effort. Or cela ne se peut que

leur circonference ne soit extrêmement froncée de plusieurs plis tous fort serrés les uns contre les autres. Ce sont donc autant d'ouvertures en rayon chacune capable d'être forcée dès que l'effort qui les serre diminuëra, sans compter qu'il est difficile que le centre mécanique de ces rayons soit réduit à un point indivisible. Et il est impossible au contraire que ces deux lignes parfaitement droites appliquées l'une à l'autre dans toute leur longueur, fassent entr'elles par un contract immédiat autre chose qu'une ligne indivisible. Ces plis froncés sont donc dans les sphincters circulaires plusieurs échappées à garder avec autant d'efforts multipliés à proportion qu'il y a d'échappées, au lieu qu'un sphincter rectiligne comme celui de la glotte demande d'autant moins d'effort que la seule justesse de l'application suffit pour la suppression totale. Je ne sçay si je me trompe, mais il me semble qu'on pourroit calculer cette différence entre les sphincters rectilignes & les circulaires par la proportion du diamètre à la circonference, plus au nombre & à l'étendue d'autant de rayons qu'il peut y avoir de plis dans les sphincters circulaires

## IX. ADDITION.

*Considération sur un prétendu fait allégué par Galien pour preuve de la clôture exacte de la Glotte, dont l'exactitude n'a nul besoin d'être prouvée.*

Galien donne pour preuve de l'exactitude de la suppression de l'air par l'action de ces deux muscles, un fait dont la vérité me paroît fort suspecte, quoiqu'il soit confirmé par plusieurs relations modernes de voyageurs. Le fait prétendu est que plusieurs Esclaves au desespoir, privés par leur état & par la précaution de leurs maîtres de tout moyen de s'échaper & de se tuer, se sont avisés de s'étouffer par la seule action de ces muscles, opiniâtrée jusqu'à cet étrange effet. Voilà ce que Galien suppose, peut-être pour l'avoir ouï dire & l'avoir crû sans preuve,

&c

& sans approfondir la verité ou l'impossibilité du fait.

Les raisons que je crois avoir d'en douter m'ont porté à m'en informer plus particulièrement, & j'en ay trouvé l'occasion par le retour du Directeur general de la Compagnie du Senegal. Il m'a confirmé le fait, & sur mes difficultés il a fait intervenir dans nôtre conversation un des principaux Commis chargé du soin des Negres vendus, & des embarquemens pour l'Amerique. Ce premier Commis a été autrefois Chirurgien.

M. Bru.

M. Caftain.

Celui-ci m'a assuré qu'il avoit vû deux faits de cette espece. L'un de ces faits fut d'un jeune Negre de 14 ou 15 ans, qu'il fut contraint de faire embarquer les fers aux pieds & aux mains, se défiant de lui parcequ'il ne l'avoit jamais pû apprivoiser, quelque bon traitement qu'il lui eût fait pour le desabuser de l'opinion qu'ils ont tous qu'on ne les transporte en Amerique que pour les y manger. Demi-quart-d'heure après l'embarquement on vint dire au Commis que le jeune Negre étoit mort. L'autre étoit un Negre de 27 ou 28 ans qui mourut de la même maniere, étant assis à la vûe de plusieurs personnes qui ne pensoient à rien de semblable. Je lui demanday la cause de ces étouffemens volontaires prétendus, il me dit que c'étoit la langue ramenée vers la gorge & appliquée sur le conduit de la respiration. Je soutins l'impossibilité de cette application, & lui voulois faire soupçonner quelque poison. Il repliqua que ces Negres étoient nuds comme la main, & qu'on les visitoit par tout avant l'embarquement, & sur tout avant le débarquement, parce qu'alors leurs fraieurs redoublent.

Il ne paroît sur le corps de ces miserables aucune marque de violence, ils ne jettent du sang par aucun endroit, on n'a pas eu la curiosité de les ouvrir. On m'a promis de le faire à la premiere occasion, & de m'en envoyer une relation exacte suivant le Memoire que je dois donner pour cet effet.

J'avouë que j'ignore la cause de ces morts volontaires ; mais je crois être assuré que ce n'est l'effet d'aucun mouve-

ment volontaire, quel qu'il puisse être, soit de la langue, soit des levres de la glotte. Aucun mouvement volontaire, quel qu'opiniâtré qu'il puisse être, ne peut être poussé que jusqu'à perte de connoissance; & dès qu'en en est venu là, le mouvement machinal de la respiration, tel qu'il s'exerce dans un profond sommeil indépendamment de la volonté, recommence sans attendre l'ordre de la volonté, & reprend peu à peu son train ordinaire. De sorte que tout ce que la volonté peut faire en ceci, seroit de suspendre la respiration jusqu'à perte de connoissance, & de donner par-là lieu à des retours alternatifs, qui donnant autant de fois lieu de se repentir d'une extravagance si outrée & si opposée à l'inclination naturelle de se conserver, prévien-droient une décision finale dans tous les corps dont les vaisseaux ne seroient pas pleins à crever. La promptitude de ces morts sans retour ne s'accorde pas avec semblables alternatives. Et d'ailleurs on ne voit pas que les Plongeurs de profession meurent dans cet exercice de respiration supprimée, à moins qu'il ne leur arrive sous l'eau quelque accident du dehors ou du dedans qui les empêche de prendre le haut pour reprendre haleine. Je ne puis donc croire cette cause; & comme semblables morts sont rares, puisqu'un Commis appliqué depuis 17 ans au soin de ces Esclaves n'en a que deux exemples en une si longue suite de tems. J'aime mieux avouer mon ignorance, ou attribuer semblables morts aux cas imprévus des morts subites par différentes causes, ou à la fraïeur d'un homme qui croit n'être embarqué ou ne débarquer que pour être égorgé par un Boucher, & son corps débité par quartiers dès qu'il sera à terre au lieu de sa destination.

Voilà les IX additions que je me suis proposées pour la premiere Partie de ce Supplement au Memoire sur la Voix. J'espere donner dans la seconde Partie de nouvelles preuves des principes du même Memoire.



*QUE LES PLANTES  
contiennent réellement du fer, & que ce métal  
entre nécessairement dans leur composition natu-  
relle.*

PAR M. LEMERY le fils.

IL y a quelque tems que M. Geoffroy fit part à l'Académie d'une découverte fort curieuse qu'il avoit faite sur un grand nombre de cendres de différentes Plantes : Il nous dit qu'il n'en avoit trouvé aucune où il n'y eût des grains capables d'être attirés par l'aimant. Mon Pere a fait voir depuis à la Compagnie que dans les cendres mêmes restées dans la cornue après la distillation du miel, on trouvoit aussi de semblables grains, & j'en ay trouvé jusques dans les cendres du Castoreum.

1706.  
13. Nov.

Quoique ces grains soient aussi facilement attirés par l'aimant que des grains de fer de même volume, n'y a-t-il point lieu de soupçonner que ces grains soient une matière différente du fer, & néanmoins aussi propre que le fer même à être attirée par l'aimant ? Ou si l'on prouve que ces grains ne peuvent être autre chose qu'un fer véritable, ou une matière de même nature que celle de l'aimant, cette matière n'a-t-elle point été formée pendant que la plante a été brûlée & réduite en cendres ? ou n'étoit-elle point déjà dans la plante ? & n'y est-elle point montée avec les suc qui ont servi à nourrir & à faire vegeter la plante pendant qu'elle étoit sur la terre ? Voilà, à mon avis, les doutes les plus raisonnables qu'on puisse avoir sur la nature & la formation de cette matière surprenante. Je vais tâcher de les éclaircir le plus succinctement que je pourray.

Il me seroit aisé de prouver par plusieurs expériences que la matière qui se trouve dans les cendres est une véri-

table fer ou aimant ; mais je m'en tiens à une seule expérience qui me paroît suffisante pour cela. J'ay exposé la matiere en question au verre ardent de Monseigneur le Duc d'Orleans : elle s'y est fonduë de la même maniere & avec les mêmes circonstances que le fer ou l'aimant, c'est-à-dire en petillant ou étincellant beaucoup , & après la fusion elle s'est réduite en une boule métallique comme fait la limaille de fer , ou la poudre d'aimant exposez au même verre ardent.

Puis donc que cette matiere est un veritable fer ou aimant , par quel hazard s'est-elle rencontrée dans les cendres ? & que croire de sa formation ? La principale raison qu'on allegue pour prouver que cette matiere a été formée dans le tems que le feu a brûlé & calciné la plante , c'est qu'on ne conçoit pas aisément comment des parties aussi grossieres que celles du fer auroient pû monter & se distribuer dans tous les vaisseaux d'une plante , passer jusques dans les tuyaux des fleurs qui doivent être d'une très-grande subtilité , être recueillies par les abeilles , & se retrouver enfin après la distillation du miel , qui comme tout le monde sçait n'est qu'un composé des parties les plus subtiles des fleurs ; mais cette objection disparaîtra peut-être par le raisonnement & les expériences suivantes.

Premierement le fer est un metal si commun , du moins dans nos païs , que je pose en fait qu'il n'y a point de terre où l'on n'en trouve. En second lieu ce métal se dissout avec la dernière facilité par toutes sortes de sels , & prend différentes formes suivant la nature des sels qui ont servi à le dissoudre. Quand il rencontre dans la terre des acides semblables à ceux de l'esprit de souffre , de l'esprit d'alun & de l'esprit de vitriol , il s'y réduit en un veritable sel concret que nous appellons vitriol. Pourquoi , par exemple , ce sel dont la base est du fer , comme je l'ay démontré dans un autre Memoire : ce sel , dis-je , résous dans une quantité suffisante d'eau , ne pourra-t-il pas se distribuer dans toute la plante ! Est-ce parceque l'em-

bouchure de ses tuyaux est fort petite, & qu'on ne croit pas que ce sel soit divisible en d'assez petites parties pour enfiler des routes aussi étroites? On reviendra de ce préjugé si l'on considère qu'un seul grain de vitriol dissous dans neuf mil deux cens seize grains d'eau commune, teint sensiblement de sa couleur toute cette quantité d'eau, & lui donne en même tems un goût assez considérable de fer ou de vitriol; car en ce cas il faut que le fer ait été divisé en des parties bien petites & bien subtiles pour communiquer son goût, & une couleur sensible à un si grand nombre de particules d'eau. Cette divisibilité du fer ou du vitriol me paroît plus que suffisante pour le rendre capable de pénétrer dans les tuyaux des plantes les plus déliées.

On objectera peut-être que si le fer peut prendre une forme assez petite pour passer par les filets les plus déliés des racines des plantes, il conserve toujours sa pesanteur spécifique qui les rendra éternellement incapable de s'élever plus avant dans la plante, & de monter jusques dans les fleurs.

Je réponds premièrement que si l'on dissout dans de l'eau commune autant de vitriol qu'elle en peut contenir, & qu'on tire ensuite par un siphon cette eau chargée de fer ou de vitriol, elle montera aussi-bien malgré son nouveau poids, que si elle n'eut point contenu de fer ou de vitriol. Pourquoi donc le fer ne pourra-t-il pas monter de même dans les tuyaux de la plante qui peuvent être regardez comme des especes de siphons?

Mais si l'on veut encore une nouvelle preuve que la pesanteur spécifique du fer ne peut jamais être un obstacle à son élévation dans les plus petits tuyaux des plantes, on n'a qu'à considérer que le principe le plus fixe & le plus grossier, sçavoir la terre qui comme tout le monde sçait, résiste à une violence de feu très-considérable, ne laisse pas de s'insinuer par le cours de la circulation dans le tissu même des fleurs; car on en trouve toujours dans leur analyse: pourquoi donc le fer réduit en sel par des acides

ne montera-t-il pas dans les fleurs? Et cela d'autant mieux que ce sel s'élève & se sublime de lui-même avec la dernière facilité.

Je prouve la facilité qu'il a à s'élever, 1<sup>o</sup>. Parceque quand on met dans une même boîte du vitriol blanc, du vitriol verd, & du vitriol bleu sans les couvrir séparément, les parties qui s'exhalent naturellement de chacun d'eux, & qui retombent ensuite confusément sur ces vitriols, changent tellement leur couleur, que le vitriol blanc devient gris blanc, le vitriol verd d'un gris plus foncé, le vitriol d'Allemagne qui est bleuâtre devient gris brun, & jaunâtre en quelques endroits, & enfin le vitriol de Chypre qui est fort bleu devient d'un bleu tirant sur le gris. Il est encore à remarquer que ces vitriols ne changent point de couleur dans leur surface inférieure qui est appliquée contre la boîte, mais seulement dans leur surface supérieure qui peut recevoir les différentes parties qui s'élèvent de tous ces vitriols, & qui retombent ensuite indifféremment sur chacun d'eux.

2<sup>o</sup> Si l'on met dans un pot du vitriol & qu'on l'humecte avec un peu d'eau, on verra quelque tems après le fer chargé d'acides monter de lui-même jusqu'au haut des parois du pot, & quelquefois même retomber en dehors & fort bas contre ces mêmes parois. Cette espece de sublimation naturelle du fer prouve assez la facilité qu'il a à s'élever quand il a été pénétré par des acides; mais voici une expérience nouvelle qui la prouve encore infiniment mieux qu'aucune autre.

Quand on verse de l'esprit de nitre sur de la limaille de fer, on sçait qu'il se fait un bouillonnement violent & accompagné d'une chaleur si forte, qu'il n'est presque pas possible de tenir la main sur le vaisseau. Après le bouillonnement la liqueur devient rouge & chargée, à cause du fer qui y a été dissous. J'ay jetté de l'huile de tartre par défaut sur cette dissolution de fer, il s'est fait une fermentation médiocre, pendant laquelle la liqueur s'est fort gonflée: j'en ay laissé reposer, & peu de tems après il s'est

formé aux parois du vaisseau quantité de petits branchages fort distincts, qui s'élevant toujours de la liqueur sans qu'il y eût de fermentation apparente dans cette liqueur & augmentant continuellement, ont bien-tôt gagné le haut du vaisseau, & sont même retombés au dehors en si grande quantité qu'ils couvroient la surface interne & externe du vaisseau. On pourroit donner le nom d'arbre de fer ou de mars à cette espèce de vegetation Chimique. Cette experience m'ayant paru curieuse, je l'ay repetée un très-grand nombre de fois, tantôt augmentant, tantôt diminuant la dose de l'huile de tartre, & il s'est toujours fait différentes sortes de vegetations qui quelquefois ne ressembloient qu'à de purs branchages : souvent ces branchages étoient garnis comme de feuilles, & portoient en haut comme des fruits ou des fleurs, & à l'extrémité d'en bas ou des petits filets qui y imitoient parfaitement la figure de ceux des racines, ou des tuyaux véritablement creux qui partoient du fond du vaisseau, & qui communiquoient au haut où étoit le fort de la vegetation. Enfin il m'est souvent arrivé de faire un mélange si exact d'huile de tartre par défaillance, & de la dissolution de fer dont il a été parlé, que la liqueur après avoir suffisamment fermenté, & avoir ensuite reposé dans le verre pendant quelques heures, sans produire aucune apparence de vegetation bien considerable, elle devint tout d'un coup d'une volatilité surprenante ; car elle s'éleva en fort peu de tems au haut du verre, & une partie de cette liqueur s'y condensa sous la figure de fleurs parfaitement bien formées, tandis que l'autre coula en dehors où elle produisit de pareilles fleurs, & enfin le surplus de la liqueur tomba par terre ; de sorte que je fus obligé de mettre au plutôt une petite écuelle sous le verre qui resta bien-tôt sans liqueur. Je remis dans le verre la liqueur qui étoit tombée dans l'écuelle, mais elle ne demeura pas longtemps en place, & retomba de nouveau dans l'écuelle, augmentant toujours en passant la vegetation qu'elle avoit commencée. Je remis encore la liqueur dans le verre, & je

continuay un grand nombre de fois le même manège jusqu'à ce que toute cette liqueur se fût corporifiée, & eût été employée à couvrir de branchages & de fleurs la surface interne & externe du verre, & même une bonne partie de l'écuëlle où elle s'étoit répandue tant de fois ; ce qui fit un spectacle fort agreable à la vûë.

Je ne donne point icy un détail bien circonstancié de toutes les observations que j'ay faites sur cette operation, parceque je craindrois d'être long & de faire perdre de vûë le sujet principal pour lequel j'ay rapporté cétte experience particuliere. Je réserve ce détail pour un supplément à ce Memoire-cy, que je donneray dans une autre Assemblée. Je diray seulement en passant que c'est le fer qui donne dans ce cas-cy toute la force & la volatilité à la liqueur dont il a été parlé, & que sans le mélange de ce métal cette liqueur, qui n'est à proprement parler qu'un veritable nitre fondu dans une certaine quantité d'eau, ne produiroit tout au plus au fond du verre que quelques cristaux semblables à ceux qu'on fait tous les jours quand on purifie le nitre commun.

Toutes les experiences qui ont été rapportées dans ce Memoire, prouvent que le fer dissous par des acides peut-être aisément réduit en des particules assez petites & d'une assez grande legereté pour pouvoir penetrer les tuyaux les plus petits & les plus élevez des plantes. Concluons donc que le fer qui se trouve dans les cendres des plantes, étoit dans ces mêmes plantes avant qu'elles eussent été brûlées ; & en effet le fer étant repandu en abondance dans toutes sortes de terres, & pouvant être aisément dissous par les premieres liqueurs salines qui l'arrosent, comme il a déjà été dit ; ces liqueurs montant ensuite par la chaleur du Soleil dans les tuyaux des plantes pour les nourrir & les faire croître : ces liqueurs, dis-je, portent naturellement avec elles le fer dont elles se sont chargées. Ces raisons une fois conçûës, il y auroit bien plus de lieu d'être surpris si l'on ne trouvoit point de fer dans les plantes, que l'on ne doit être étonné d'en trouver,

On:

On pourroit même dire avec quelque vrai-semblance , que non-seulement le fer est réellement existant dans les plantes , mais qu'il leur est peut-être encore plus nécessaire qu'on ne pense ; car comme ce métal suffisamment atténué par des acides acquiert une force & une volatilité surprenante , qu'il prend avec la dernière facilité la figure de branchages, & qu'il produit un grand nombre de différentes sortes de végétations ; ne pourroit-il pas servir par tout le mouvement & toutes les figures dont il est susceptible , à étendre puissamment & de la manière la plus convenable les petits tuyaux des plantes où il se rencontre , & contribuer par-là beaucoup à la végétation de ces mêmes plantes ? Enfin comme le fer se peut rencontrer plus ou moins abondamment dans certaines plantes que dans d'autres , & s'unir dans les unes à de certains sels , & dans d'autres à des sels d'une autre nature , ce métal contribué peut-être encore beaucoup par-là aux différentes qualitez & vertus médicinales des plantes.

Il ne me reste plus qu'à expliquer pourquoy les plantes dans leur entier ne donnent aucun goût ni aucune marque de fer. C'est que le fer s'y trouve en petite quantité par rapport aux parties huileuses , salines , aqueuses & terreuses qui l'envelopent , & qui le cachent de manière qu'il n'est plus reconnoissable en cet état. Mais quand la plante a été brûlée & réduite en cendres , & que l'on a eu soin de bien laver ces cendres pour en emporter les sels fixes , les grains ferrugineux dégagent alors de leurs enveloppes qui empêchoient l'aimant d'y produire aucun effet , reprennent leur première qualité , & sont ensuite facilement attirés par l'aimant , ou par une lame d'acier aimantée ; de même que le vitriol poussé par un grand feu se réduit par la perte de ses acides en une matière qui recommence à pouvoir être attirée par l'aimant , & qui certainement avoit servi de base à la formation du vitriol , comme je l'ay démontré dans un autre Mémoire. On pourroit encore ajouter que comme le fer qui a servi à faire du vitriol , & qui a été ensuite revivifié par la vio-

lence du feu, a perdu pendant cette operation un assez grand nombre de parties huileuses, pour être devenu sensiblement different de ce qu'il étoit auparavant par rapport aux experiences Chimiques; le fer qui est entré dans la composition des plantes souffre aussi une alteration pareille par la calcination, & devient une matiere plus semblable par sa nature à la matiere propre de l'aimant qu'à celle du fer.

Je répondray dans le Tome de 1707 à une objection contre ce Memoire-cy, qui m'a été faite dans une Assemblée particuliere de l'Academie. Je renvoie cette réponse à un autre Memoire, parce qu'elle demande plusieurs experiences nouvelles dont le détail la rend un peu longue.

## O B S E R V A T I O N

## SUR DEUX ENFANS

## JOINTS ENSEMBLE.

PAR M. DU VERNEY, l'aîné.

1706.  
13 Nov.

**L**E dix-neuvième du mois de Septembre de l'année 1706, Catherine Feüillet femme de Michel Alibert Jardinier du Village de Vitry près Paris, accoucha de deux Enfans mâles joints ensemble par la partie inferieure du ventre. C'étoit sa sixième grossesse, & elle entroit dans son neuvième mois quand elle accoucha.

Il lui est arrivé ce qui est ordinaire à toutes les femmes qui sont grosses de deux Enfans, qui est d'être plus incommodée que dans les autres grossesses, d'avoir le ventre fort gros & fort tendu, & des varices aux jambes.

Le travail ne fut ni trop long ni trop penible, parceque l'un de ces Enfans se presenta dans la situation naturelle; & que la Sage-femme, qui dans cette occasion fit connoître





*qui n'a couvert que la Surface interne et le haut du verre.*

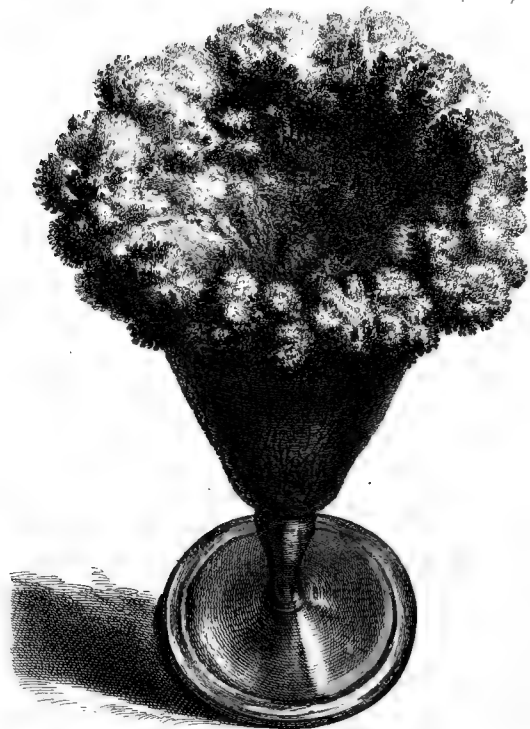


Figure d'une végétation qui n'a couvert que la surface interne et le haut du verre



vegetation plus belle et plus distincte qui s'est faite  
tens que la premiere et qui a couvert le dedans et  
t mesme une bonne partie du petit vaisseau qu'on  
a esté obligé de mettre dessous



Figure d'une autre végétation plus belle et plus distincte qui s'est faite  
en beaucoup moins de tems que la première et qui a couvert le dedan  
le dehors du verre et même une bonne partie du petit vaisseau par où  
on étoit obligé de mettre dessous

qu'elle est habile dans son art, ayant reconnu par les tentatives qu'elle avoit faites, qu'il y avoit quelque obstacle qui empêchoit l'Enfant de sortir, & examinant d'où cela pouvoit venir, s'aperçût que sa poitrine étoit embrassée par les jambes d'un second Enfant qu'elle croioit être séparé du premier; ce qui l'obligea de faire de nouvelles tentatives pour tirer celui qui se presentoit au passage : mais ces tentatives furent inutiles; c'est-pourquoy elle résolut sur le champ de tirer dehors les deux pieds du second Enfant, & d'achever son opération, comme si elle n'eût eu à en tirer qu'un seul qui se feroit présenté par les pieds, ce qui réussit fort heureusement.

Le délivre étoit composé d'un seul cordon & d'un seul *placenta*, & ces Jumeaux étoient renfermez sous les mêmes membranes. Le *placenta* étoit plus grand & plus épais qu'à l'ordinaire, les envelopes plus fortes & plus épaisses; & le cordon plus gros.

Ces Enfans étoient fort vifs; ils ont vécu depuis le 19. Septembre jusqu'au 26, & pendant ce tems-là ils ont fait leurs fonctions naturelles autant que la situation où on les mettoit a pû le permettre.

Celui qui paroissoit le plus fort mourut à quatre heures du matin, & l'autre trois heures après.

On peut penser que trois choses ont contribué à leur mort. La premiere est la mauvaise situation qu'on leur donnoit en les emmaillant à l'ordinaire, ce qui a comprimé la partie du bas ventre qui leur étoit commune, & les conduits par où les excremens devoient sortir, comme on le prouvera dans la suite.

La seconde, parce qu'ils n'ont jamais tété, & qu'on ne les a nourris que de lait de Vache lequel s'est caillé dans l'estomac & dans les intestins qui en étoient remplis, comme je l'ay reconnu en les ouvrant.

La troisième, parce qu'on les découvroit trop souvent pour satisfaire la curiosité de plusieurs personnes, & qu'à chaque fois on les tournoit en divers sens.

Ces Enfans joints ensemble, comme on le voit dans la

premiere Figure, avoient 22 pouces de long. Il seroit inutile de décrire tout ce qui se presente depuis la tête jusqu'à la partie moïenne de leurs ventres, parceque toutes ces parties ont leur conformation ordinaire; mais la partie moïenne du ventre, qu'on nomme communément ombilicale, n'avoit point de nombril; & au lieu que ces Jumeaux en devoient avoir chacun un, il n'y en avoit qu'un seul pour tous les deux, dont on marquera la situation.

Le bas du ventre, qu'on nomme communément l'Hypogastre, est tout ce qu'il y a de singulier.

Dans la conformation naturelle des autres enfans, les os pubis en se joignant font une espee de cintre, qui termine le bas de la partie anterieure du ventre; & par leur jonct'on avec les os des Iles & les Ischions qui s'unissent avec l'os sacrum, ils forment tous ensemble la cavité qu'on nomme le bassin.

Dans ces Jumeaux il n'y avoit point de Pubis; mais les os qui eussent dû le composer par leur jonction, étoient separez & placez vers les aînes; l'os pubis droit d'un de ces Jumeaux au lieu de se joindre avec l'os pubis gauche du même sujet, rencontroit l'os pubis gauche de l'autre, auquel il s'unissoit par un ligament très-fort & très-souple, & les deux faisoient en cet endroit une espee de cintre.

Ces ligamens qui joignoient les os pubis de chaque côté n'avoient chacun qu'environ 2 lignes de long, & faisoient une espee d'articulation aisée & commode, qui permettoit à ces Enfans d'approcher & d'éloigner réciproquement les troncs de leur corps jusqu'à un certain point.

On voyoit encore un ligament très-fort & très-épais, qui allant d'un côté à l'autre s'implanter dans la partie inférieure de la jonction des os pubis, divisoit en quelque maniere le bassin commun en deux parties. Ce ligament avoit la figure d'un cintre renversé, & la peau qui joignoit les deux derrieres de ces Enfans y étoit étroitement colée. Les os des Iles étoient plus plats qu'à l'ordinaire, tournez en arriere, & posez presque sur le même plan. Les Ischions

étoient aussi tournez en arriere, les os sacrum moins convexes & plus recouverts des os des Iles. Les coccyx plus racourcis, & leur pointe étoit un peu de côté.

Par cet arrangement les trous qu'on nomme ovales se trouvoient sur les côtez & l'un vis-à-vis de l'autre, & la boîte des anches étoit fort tournée en arriere; ainsi les cuisses étoient tellement articulées que la pointe des pieds étoit entierement en dehors.

On découvre aisément la conformation & la situation extraordinaire de ces os dans la troisième Figure; & il est nécessaire de la consulter: on doit pareillement jeter les yeux sur les autres Figures avant que de lire le reste de la description.

Le nombril commun aux deux Enfans étoit précisément au milieu de la partie la plus basse du ventre, laquelle leur étoit aussi commune; & en cet endroit le ventre étoit aussi un peu plus étroit, & la peau qui le recouvroit étoit plus ferme, étant fortifiée par plusieurs fibres tendineuses; on y distinguoit même comme une espece de couture qui marquoit le lieu où la peau des ventres de ces enfans s'unissoit. Cette peau alloit d'un des côtez de la jonction des os pubis jusqu'à l'autre, en faisant une espece de cintre opposé à celui de dessous.

On a déjà vû quelques monstres de cette nature. Paré dans ses Oeuvres de Chirurgie, donne la figure de deux Jumeaux presque semblables nez à Paris en mil cinq cens soixante & dix: mais au lieu que nos deux Enfans étoient tous deux mâles, Paré rapporte que les Chirurgiens jugerent quel'un des deux dont il parle étoit mâle, & l'autre femelle; ce que l'on ne peut connoître par la Figure qu'il en a donnée, parce qu'elle les represente seulement couchez sur le dos.

Dans la seconde Figure qui represente les Enfans dont je parle icy, couchez sur le ventre, tout est semblable à ce que l'on voit dans les autres enfans: mais les os des Iles étant plus serrez contre l'os sacrum, comme il a été dit, font que le derriere de chaque Enfant est plus plat & plus étroit.

Ces Enfans n'avoient point d'anus, & de l'endroit où il est ordinairement on voyoit sortir les verges, dont l'une étoit tournée d'un côté & l'autre de l'autre.

A chaque côté de ces parties on voyoit un repli de peau qui representoit assez bien la moitié d'un scrotum vuide & applati.

*Voyez la 3.  
Figure.*

Ces Enfans étant couchez sur le ventre, les deux verges paroissoient situées d'une maniere bisarre, quoyqu'en effet elles fussent simplement abaissées & tournées vers le croupion.

En faisant la dissection de ce Monstre, la premiere chose qui me parut meriter quelque attention, fut la disposition des muscles droits; car dans l'état naturel ils vont droit du sternum par la partie antérieure du ventre s'insérer aux os pubis: mais dans ces Jumeaux, après être parvenus vers la partie moïenne du ventre, ils se détournent vers les côtez pour s'insérer aux os pubis qui sont leur appui naturel & qui y sont placez. Par ce moïen il restoit une espace à peu près de la figure d'un losange qui étoit rempli par les aponevroses des autres muscles du bas ventre. Le nombril étoit placé au milieu de cet espace, le cordon qui en sortoit étoit plus gros qu'à l'ordinaire, & composé d'un plus grand nombre de vaisseaux, comme nous l'expliquons dans la suite.

*Voyez la 1.  
Figure.*

Comme les parties externes étoient semblables à celles des autres enfans depuis la tête jusqu'à la partie basse du ventre, les parties internes l'étoient aussi; le Foye, la Ratte, le Pancreas, l'Estomac & le canal des intestins grêles, tout y étoit semblable aux mêmes parties des autres sujets; mais les intestins grêles de chacun de ces Jumeaux venoient par leurs extremités s'ouvrir dans un intestin commun, qui à l'un de ses côtez avoit un petit cœcum garni d'une appendice sans issue; & la rencontre de ces trois intestins se faisoit vers un des côtez où les os pubis se joignoient.

Cet intestin commun doit être regardé comme un Colon, tant par rapport à son diametre qu'à la forme de son



appendice. Il étoit néanmoins garni de feüillets semblables à ceux des intestins grêles ; il étoit un peu évasé à sa naissance, & peu après il faisoit deux plis en se tournant d'abord vers l'os sacrum, puis il venoit s'ouvrir dans un autre intestin qui avoit de chaque côté un cœcum garni de son appendice aveugle. Ce second intestin, qu'on peut nommer un second Colon, faisoit d'abord un long repli en allant sous les intestins grêles de l'un de ces deux Enfans ; puis revenant, il faisoit un autre repli, mais plus petit, sous les intestins grêles de l'autre enfant, & enfin il alloit s'insérer dans une espece de sac commun à ces Jumeaux. Ce dernier colon qui étoit sans cellules & sans feüillets, avoit un pouce de diametre sur neuf de long ; & le premier colon qui paroissoit y être enté, avoit un pouce de diametre sur six de long.

Les intestins grêles avoient dans chaque Enfant leur mezentere & leurs vaisseaux particuliers ; mais le colon étoit attaché de chaque côté dans toute sa longueur par un prolongement du mezentere de chacun de ces Jumeaux : ainsi les vaisseaux dont il étoit arrosé étoient communs aux deux Enfans, & outre les vaisseaux qu'il recevoit de l'artere qu'on nomme Mezenterique superieure, il en recevoit aussi de la Mezenterique inferieure, & la veine qui en rapportoit le sang se déchargeoit dans la veine cave au-dessous des Emulgentes. On voit par cette description que la jonction de ces Freres étoit fort étroite, puisqu'elle étoit formée non-seulement par les parties solides & molles, mais encore par le cours des liqueurs.

Le sac où s'ouvre l'intestin dont on a parlé, paroissoit composé de deux vessies applaties & joinres l'une à l'autre par le côté & sans cloison ; de sorte qu'il n'y avoit à proprement parler qu'une cavité. Ces vessies n'étoient pas unies suivant toute leur longueur ; car par enhaut il s'en falloit environ trois lignes que la jonction n'allât jusqu'au sommet, qu'on nomme ordinairement le fond, & par enbas il y avoit environ un demi pouce de séparation dans cet

endroit le ligament qui separoit les deux bassins supportoit cette vessie qu'on peut nommer jumelle, & la partie de cette double vessie particuliere à chacun de ces Enfans étoit située dans la cavité du bassin qui lui répondoit, & qui étoit propre à cet Enfant; mais elle n'occupoit pas cette cavité toute entiere, parce que quelques contours du colon en occupoient une partie.

Les Ureteres s'ouvroient presque à l'ordinaire dans chaque vessie, dont la tunique charnuë étoit fort épaisse, & composée d'un double plan de fibres qui se croisoient, & dont plusieurs passioient obliquement d'une vessie à l'autre en se croisant.

Il y avoit dans chacun de ces Jumeaux à chaque côté du ligament qui separoit les deux bassins, deux gros trousseaux de fibres qui alloient s'épanouir sur les côtez de chaque vessie, dont la tunique interieure étoit un peu goderonnée, épaisse, & comme calleuse.

L'extrémité de l'intestin s'appliquoit obliquement sur un des côtez de cette vessie, l'embouchure en étoit fort étroite par rapport à son diametre, & elle ne se trouvoit qu'à l'un des côtez de l'extrémité de l'intestin, l'autre côté faisant une espece de sac aveugle. La plus grande partie de cette ouverture répondoit à l'une des vessies; la plus petite avoit sa direction vers l'autre vessie: de manière qu'il semble que l'un étoit compensé par l'autre pour distribuer également les matieres dans les deux vessies. Il y avoit aussi sur cette vessie un petit sac aveugle qui communiquoit avec l'embouchure de l'intestin.

Dans les Enfans d'une structure ordinaire la vessie a la figure d'une poire; ce qui fait qu'on y distingue un fond & un col, lequel diminuant insensiblement, s'abouche avec l'urethre: mais l'une & l'autre vessie de ces Jumeaux n'avoit point de col, & l'urethre qui sortoit d'abord de chaque vessie, se courboit sous le ligament qui separe les deux bassins, à peu près comme il fait sous les os pubis dans la conformation

mation ordinaire, & il passoit entre les corps caverneux.

Dans le trajet que l'urethre faisoit depuis sa naissance jusqu'à la verge, il étoit garni de plusieurs muscles.

Outre ceux qui tiennent lieu des accelerateurs, il y en avoit deux parties particulieres dans chaque Enfant.

La premiere prenoit son origine de la partie anterieure du trou ovale, & descendant un peu obliquement s'inféroit à la partie de l'urethre qui regarde le coccyx. La seconde paire sortoit de la partie inferieure du même trou ovale, & remontant & repassant sous la premiere paire s'implantoit dans la partie anterieure de l'urethre. On voit par-là que de chaque côté ces muscles se croisent, & que leur plan represente la machine qu'on appelle Sauterelle, dont un lozange embrasse le conduit de l'urethre.

Du côté où l'intestin s'ouvroit dans la vessie, un des testicules de chaque enfant étoit placé dans l'aîne, & renfermé dans une poche émanée, du peritoine, dont l'entrée n'étoit pas fermée comme elle est dans les hommes, mais ouverte comme elle est dans les autres animaux.

De l'autre côté, les deux autres testicules de ces Enfans étoient à nud dans la cavité du ventre, placés à la même hauteur, & attachés au peritoine. Les testicules, les épidyimes, les vessicules seminales, & tout ce qui appartient à ces parties avoit sa conformation naturelle. Mais les vaisseaux déferens au lieu de s'ouvrir dans l'urethre, venoient s'insérer dans chaque côté de cette vessie un peu au-dessus de la naissance de chaque urethre, & leur embouchure étoit simple & sans caruncule.

Tout ce que les verges avoient de plus singulier, étoit que leurs racines étoient un peu plus écartées à cause de la separation des os pubis, & qu'au lieu d'être suspendues en devant comme à l'ordinaire, elles étoient abaissées & tournées en arriere un peu sur le côté.

La construction de la vessie étant bien connue, il sera plus aisé de parler de la route des vaisseaux qui composoient le cordon.

Le cordon du fœtus ordinaire est composé de deux ar-

teres, d'une veine & de l'ouraque. Le cordon de ces Jumeaux étoit composé d'un ouraque, de deux veines & de trois arteres.

L'ouraque sortoit de l'échancrure supérieure des deux vessies : elle ne paroissoit point percée, & l'on voïoit clairement qu'elle étoit formée par un prolongement des fibres charnuës des même vessies.

Il n'y avoit rien d'extraordinaire dans la route ni dans la grosseur des deux veines : mais au lieu que le cordon de chaque fœtus a deux arteres, il n'y en avoit que trois pour ces deux enfans, & elles étoient placées sur le même côté de la double vessie.

Pour rendre raison de la situation & de la route de ces trois arteres, il faut remarquer qu'un côté de la double vessie étoit presque tout occupé par les circonvolutions du colon & par son insertion, & que sur l'autre côté qui étoit libre, ces trois arteres étoient placées l'une au milieu, & les deux autres aux côtez.

L'un de ces Jumeaux avoit deux arteres ombilicales, & l'autre n'en avoit qu'une.

Dans celui qui avoit deux arteres, celle du côté droit faisoit sa route à l'ordinaire : celle du côté gauche ne pouvant se rendre au cordon à cause des obstacles qui s'y trouvoient, descendoit sous cette double vessie, & passant sous la grande separation dont on a parlé, remontoit par le milieu du côté opposé qui étoit libre jusqu'au cordon.

L'artere ombilicale de l'autre Jumeau étoit posée à son côté gauche ; il n'y en avoit point au côté droit, parce que l'intestin & son mezentere occupoit la place où elle eût dû être : mais si cette artere étoit unique, elle étoit en récompense plus grosse que les deux autres prises ensemble, & l'iliaque d'où elle sort étoit double de l'autre iliaque.

Pour comprendre les Usages des parties singulieres qui se rencontroient dans ces Jumeaux, on remarquera que l'os pubis droit de chacun de ces Enfans alloit ren-

contrer l'os pubis gauche de l'autre. Ces quatre os pubis joints ensemble deux à deux, & unis avec les os des iles, les ischions & les os sacrum, faisoient un bassin commun, ferme, solide, commode pour renfermer les gros intestins & la vessie qui étoient communs à ces Jumeaux.

Dans les autres hommes les os pubis sont joints par un cartilage d'une consistance ferme, & leur union est si étroite qu'ils pressent fort peu.

Dans ces Jumeaux, au lieu d'un cartilage on voïoit un ligament fort souple, qui joignoit de chaque côté l'os pubis droit de l'un avec l'os pubis gauche de l'autre; & cette espece d'union leur permettoit d'approcher ou d'éloigner les troncs de leurs corps l'un de l'autre jusqu'à un certain point, comme on pourra voir dans la suite, & afin que ce mouvement fût plus libre, les extrémités par où ces os se joignoient étoient arrondies.

Si cette conformation ne venoit que de l'union de deux œufs & d'une espece de rencontre fortuite, il faudroit qu'elle eût été fort heureuse; car pour peu que les extrémités de ces os, qui ont peu de largeur eussent glissé l'une sur l'autre, presque toutes les parties tant solides que molles qui composoient le bassin, auroient été privées de leurs fonctions sans ressource; mais je n'entrerais pas dans ce détail qui meneroit trop loin.

On a observé que les muscles droits étant parvenus vers la partie moyenne du ventre, se détournoient vers les côtes pour aller s'insérer aux os pubis. Dans cette situation ils ne laissoient pas de faire leur fonction, & d'aider à comprimer le milieu de la partie inferieure du ventre; parce qu'étant dans chaque Enfant inserez aux os pubis, comme à deux points fixes, ils ne pouvoient se raccourcir que les aponevroses, auxquelles ils sont aussi attachez, ne s'approchassent du plan de leurs appuis autant qu'il étoit possible, & ne comprimassent le bas du ventre de chaque Enfant.

Le foye, la ratte, le pancreas, l'estomac & les intestins gresles avoient leur conformation ordinaire dans ces Ju-

meaux, qui étoient par ce moyen pourvûs de tous les organes nécessaires pour digerer les alimens, pour les convertir en chyle; & pour le bien filtrer.

La structure des intestins merite une consideration particulière.

Les intestins gresles venoient s'ouvrir par leurs extrémités dans un intestin commun qui leur servoit de colon. Il s'agit maintenant de faire voir la difference qui se rencontroit entre ce colon & celui des autres hommes.

Ce colon ordinaire fait un contour considerable en forme d'arc, attaché aux principaux viscères du bas ventre; il n'a qu'un mésentère, & il est garni de feuillets & de cellules.

Il n'y avoit qu'un seul colon pour ces Jumeaux; il étoit court, avec un double mésentère, & garni de feuillets seulement dans le tiers de sa longueur, & il n'avoit aucune connexion avec les viscères du bas ventre.

La longue circonvolution des colons, les cellules, & les feuillets ordinaires servent à leur donner une grande capacité pour contenir plus de matieres, pour en retarder le cours, pour les rendre plus épaisses, & pour nous dispenser de la nécessité de les rendre trop souvent. Dans ces enfans le colon étoit fort court, sans cellules, & peu garnis de feuillets; ainsi les matieres y séjournant moins y prenoient moins de consistance; tout cela étoit nécessaire à cause de la petitesse des passages par où elles devoient sortir.

Comme cet intestin étoit fort court dans ces enfans, il étoit aisément renfermé dans la partie du ventre qui leur étoit commune, sans avoir besoin d'être suspendu, ni attaché aussi fortement aux autres viscères que le colon des autres hommes, lequel étant très-long, le poids & la quantité des matieres qu'il contient demandent qu'il soit ainsi soutenu; mais les matieres ne séjournant pas long-temps dans le colon de ces enfans, il n'étoit pas nécessaire qu'il fût d'une grande capacité ni qu'il y en eût deux.

On a dit que le colon de ces Jumeaux étoit attaché de chaque côté à un prolongement de leurs mésentères, & que les vaisseaux de ces mésentères, par un très-grand nombre de rameaux, venoient se ramifier de chaque côté sur le corps de cet intestin où ils s'abouchoient les uns aux autres. Toutes ces anastomozes établissoient un commerce mutuel du sang entre ces enfans, & les nerfs, par une distribution à peu près semblable, y établissoient pareillement une communication reciproque des esprits.

De ce que l'on vient de dire, on peut juger aisément que les bonnes & les mauvaises qualitez du sang & des esprits pouvant se communiquer par cette partie, toutes les maladies qui y pouvoient arriver, ou par les liquides dont elle étoit arrosée, ou par les matieres qu'elle renfermoit, auroient été communes à ces deux freres. Ainsi il n'étoit pas possible, que l'un des deux venant à mourir, l'autre pût vivre que fort peu de tems.

On a fait observer que le colon s'ouvroit par son extrémité dans une vessie jumelle ; que son embouchure étoit fort étroite, mais disposée de maniere, qu'elle distribuoit presqu'également les matieres dans chaque vessie : Comme il n'y avoit point de sphincter à l'embouchure de l'intestin dans la vessie, on peut dire qu'elle faisoit dans ces Enfans la fonction des intestins *Rectum*. En effet elle servoit de receptacle aux excremens, & elle n'en permettoit la sortie, que quand le sphincter de l'urethre s'ouvroit : il tenoit donc lieu du sphincter & l'anus & de celui de la vessie.

Plusieurs choses favorisoient cette sortie. La premiere étoit la consistance des excremens qui étoit fort molle, tant par le peu de séjour qu'ils faisoient dans le colon, que par leur mélange avec l'urine fournie par les quatre ureteres.

La seconde étoit la contraction de chaque vessie qui étoit beaucoup plus forte que dans les autres enfans ; parce que leur tunique musculieuse étoit beaucoup plus épaisse qu'à l'ordinaire. De plus, l'ouverture du conduit de

l'urethre étant plus large qu'à l'ordinaire & dans la partie la plus basse de chaque vessie, les excréments s'y portent par leur propre poids. Quoique cette vessie jumelle n'eût qu'une capacité commune, cependant elle recevoit de chaque côté l'urine par les deux ureteres de chaque enfant, & chacune avoit son urethre qui lui servoit comme à l'ordinaire de conduit de décharge; ainsi les excréments solides & les liquides mêlez ensemble sortoient par les verges, qui faisoient la fonction d'anús. Cette vessie n'avoit ni col, ni prostates, ni sphincter; mais les deux paires de muscles, dont l'urethre étoit garnie à sa naissance, & qui ont été décrites, tenoient lieu de sphincter: car comme elles se croisoient & qu'elles embrassoient le devant & le derriere de l'urethre dans un sens opposé, il falloit de nécessité qu'agissant ensemble elles comprimaient ce canal.

Il nous reste à parler de la situation qui paroît avoir dû être la plus convenable & la plus commode à ces Jumeaux. Il nous a paru que c'eût été d'être à demi couchés avec quelque appuy sous le dos; d'autant que par ce moyen les parties du bas ventre, sur tout celles qui leur étoient communes, pouvoient alors faire librement leurs fonctions. Cette situation jointe aux vestiges qui restent de celle qu'ils avoient dans le sein de la mere avec ce qu'elle nous a dit, nous a fait juger qu'ils y étoient à peu près dans la posture que la figure represente, & qui instruira mieux que ce que nous en pourrions dire.

Quant au marcher, il nous a paru qu'ils pouvoient aller tous deux de côté du même sens; mais on voit qu'il étoit impossible, quel'un allât en avant que l'autre ne reculât en arriere; & qu'ainsi ils auroient marché avec beaucoup de difficulté.

Les canaux déferens s'ouvroient dans la vessie; & comme on n'y appercevoit point de sphincters qui auroient pu empêcher l'écoulement continuel de la semence, ainsi que dans les autres hommes, il y a apparence que ces Jumeaux eussent été steriles, parceque leur semence au-



roit été toujours mêlée avec l'urine & les excremens grossiers.

On attribue d'ordinaire la production des Monstres, tantôt au hazard, tantôt à des mouvemens purement naturels mais dereglez, tantôt aux égaremens d'une vertu formatrice aveugle, à ce qu'on dit, même dans les ouvrages les plus reglez, & qui cependant agit comme si elle avoit de l'intelligence : mais le Monstre dont nous venons de faire la description, & le rapport de sa conformation interne à sa figure extérieure, font bien voir qu'il n'a pu être l'ouvrage du hazard, ou d'une vertu formatrice aveugle, ni l'effet d'un dérangement fortuit des mouvemens naturels.

Depuis les enveloppes jusqu'au plus profond des entrailles, tout y est d'un dessein conduit par une intelligence libre dans sa fin, toute puissante dans l'exécution, & toujours sage & arrangée dans les moyens qu'elle emploie.

Suivant l'ordre commun les hommes & les animaux à quatre pieds ont deux issues pour l'évacuation des excremens de la première digestion ; l'une pour les solides, & l'autre pour les liquides : au lieu que dans ce Monstre l'intelligence dont je parle a voulu produire deux corps humains joints ensemble, qui pussent être droits, s'asseoir, approcher ou éloigner les troncs de leur corps l'un de l'autre jusqu'à un certain point ; elle a voulu conduire par un seul canal les excremens solides jusques dans un receptacle commun où ils se mêlassent avec les liquides, afin que chacun de ces Jumeaux pût ensuite le rendre séparément par la verge. On ne peut se dispenser de supposer cette volonté, puisqu'on en voit si clairement l'exécution. Je laisse aux Theologiens à en chercher les raisons ; mais cette volonté étant supposée, je dis que l'inspection de ce Monstre fait voir la richesse de la Mécanique du Createur, au moins autant que les productions les plus réglées, puisqu'à toutes les preuves que nous en avons, elle ajoute encore celle-cy d'autant plus

forte & plus convaincante, qu'étant hors des regles communes, elle montre mieux & la liberté & la fécondité de l'auteur de cette Mécanique si variée dans ces sortes d'ouvrages; car il doit passer pour constant que dans toutes les espèces des Monstres qui ont paru, soit qu'ils aient été examinés ou non, il y a toujours eu une structure interne aussi extraordinaire que leur figure extérieure a paru différente de celle des autres animaux de la même espèce.

---

## D I S S E R T A T I O N

## S U R L E S B A R O M E T R E S

## E T T H E R M O M E T R E S.

P A R M. D E L A H I R E le fils.

1706.  
13. Nov.

**O**N a beaucoup d'obligation aux Philosophes du Siècle passé d'avoir trouvé le moyen de déterminer les différens changemens qui arrivent à l'air considéré comme corps à ressort ou comme pesant: & l'on ne pouvoit faire dans la Physique une plus belle découverte ni une plus considérable, puisqu'elle sert à expliquer une infinité de Phenomenes qui avoient jetté les anciens Philosophes dans un grand embarras, dont ils n'avoient pû se tirer qu'en attribuant à la nature une propriété qu'elle n'avoit pas, & de laquelle cependant ils s'étoient servis pour rendre raison de tout ce qui regardoit cette partie de Physique, dont tous les Phenomenes devoient être attribués à la pesanteur & au ressort de l'air.

Le celebre Galilée, Mathématicien du Grand Duc; fut le premier qui s'appercut que l'eau dans le tuyau d'une pompe aspirante ne pouvoit s'y soutenir qu'à la hauteur

teur environ de 32 pieds, & que le reste du tuyau, s'il étoit plus haut, demeureroit vuide. La conséquence qu'il tira de cette remarque fut, que la nature n'avoit d'horreur pour le vuide qu'à cette hauteur. C'étoit, comme l'on voit conclure avec les Anciens, ce qui ne perfectionnoit point la Physique.

Toricelli qui fut son disciple & son successeur fit en 1643. une autre experience. Il prit un tuyau de verre de 4 pieds ouvert seulement par un bout, & l'ayant rempli de mercure, il le renversa dans un autre vaisseau plein aussi de mercure, & s'apperçût que celui qui étoit dans le tuyau descendoit & laissoit en haut un espace qui devoit être vuide.

En 1644 on écrivit d'Italie cette experience au R. P. Merfenne Minime de Paris, qui la divulgua par toute la France; & M. Petit Intendant des Fortifications l'ayant scûe & l'ayant apprise à M. Pascal, ils la firent ensemble à Rouën en 1646, & la trouverent conforme à ce qu'on avoit mandé d'Italie. Cela donna occasion à M. Pascal de faire plusieurs autres experiences dont il fit un petit Livre qu'il publia en 1647, & qu'il envoya par toute l'Europe. Il eut avis cette même année que Toricelli avoit soupçonné que c'étoit la pesanteur de l'air qui avoit été cause que le mercure s'étoit soutenu dans le tuyau quand il avoit fait l'experience dont nous avons parlé. Cela lui donna occasion de faire encore de nouvelles experiences qui le confirmerent dans la pensée que Toricelli avoit eüe, & qui lui firent avancer que tout ce qu'on avoit attribué à l'horreur du vuide n'étoit causé que par la pesanteur de l'air. Ce qu'il a parfaitement bien prouvé dans le Livre que nous avons de lui sur cette matiere, & dont tous les Sçavans sont demeurés d'accord. Voilà la suite & les dates des experiences qui ont été faites pour découvrir cette belle propriété de la pesanteur de l'air ignorée de tous les Philosophes pendant un si grand tems. Je vais donner presentement la description des Machines qui ont été faites pour découvrir sa vertu élastique, & je com-

menceray par la plus ancienne, & j'iray de suite suivant l'ordre des tems.

Sanctorius qui étoit de Capodistrie, Medecin celebre par les Ouvrages qu'il a laissé, s'avisa de faire une Machine appelée Thermometre, pour connoître les differens degres de chaleur de ceux qui avoient la fièvre, sans faire attention, suivant toutes les apparences, que la même Machine pourroit lui montrer les changemens qui arrivoient à l'air, qui peut augmenter de volume par les différentes chaleurs, & qu'elle seroit fort curieuse, & plus utile au public par la connoissance qu'elle lui donneroit des degres de la temperature de l'air, que par l'application qu'il en vouloit faire à la Medecine.

Ce Thermometre étoit composé de deux boules de verre attachées à un tuyau de verre recourbé par enbas, & tout proche de la boule inferieure; la boule superieure qui n'avoit point de communication avec l'air extérieur, & une partie du tuyau étoit pleine d'air tel que nous le respirons, & le reste avec une partie de la boule inferieure, qui étoit ouverte par sa partie superieure, étoit remplie d'eau seconde. Il est aisé de voir par cette construction que lorsque l'air de la boule superieure se dilatoit par la chaleur, il comprimoit l'eau seconde qui étoit dans le tuyau & l'obligeoit d'y descendre, & la laissoit remonter quand il se condensoit.

Cette Machine, quoique sujette à quelques irrégularités, ne laissa pas d'être trouvée fort curieuse par tous les Sçavans, & d'être mise en usage jusqu'au tems où l'on trouva le Barometre; car alors on s'aperçut d'un très-grand défaut qu'elle avoit, qui étoit d'agir aussi comme Barometre, ce qui pouvoit souvent détruire tout l'effet qu'elle pouvoit avoir comme Thermometre, à cause que l'air de la boule inferieure communiquant avec l'air extérieur agissoit sur la liqueur, & l'obligeoit à monter ou à descendre selon qu'il étoit plus ou moins pesant. Ce fut un malheur pour le Thermometre de Sanctorius de ce qu'on découvrit le Barometre: mais il ne dura pas long-

remis ; car quelques Scavans de Florence ayant travaillé sur cette matiere, en construisirent un autre qui n'avoit point le défaut du premier. Je n'ay pû sçavoir d'autre date du tems où il avoit été trouvé, quoique je l'aye cherché avec beaucoup de soin, que dans le Livre de Guerick intitulé *Experimenta Madeburgica*, & imprimé en 1672, où il dit qu'il y a environ 30 ans qu'il a été découvert, & dans les Dissertations Academiques de M. Petit imprimées en 1671 où il y en a une description, & où il est marqué que l'invention en est dûë à l'Academie de Florence, qui en a donné une figure & une description dans le Livre qu'on a d'elle intitulé *Saggi di Naturali Esperienze*.

Ce Thermometre qu'on doit appeller de Florence, & qui est celui qui est le plus en usage presentement, & très-commode pour toutes les experiences qu'on veut faire, pour être transporté, & pour sa construction qui est fort simple ; car il n'est composé que d'une boule de verre à laquelle est attaché un tuyau scelé hermetiquement par en haut, dont la grosseur & la longueur sont proportionnées de telle maniere au diametre de la boule qui est remplie d'esprit de vin avec une partie du tuyau, que dans les plus grandes chaleurs la dilatation de l'esprit de vin ne remplisse pas tout à fait le tuyau, & que dans les plus grands froids sa condensation n'aille pas jusqu'à rentrer dans la boule.

Quoique ce Thermometre eût de très-grandes commodités, il ne laissoit pas d'avoir une très-grande incommodité : c'étoit de ne pouvoir faire la comparaison de la temperature de l'air d'un pais avec celle d'un autre, à moins que ce ne fût le même Thermometre qu'on transportât, ou differens divisés sur les mêmes degres de chaleur : mais M. Amontons qui étoit de cette Academie, & un des meilleurs genies de ce Siecle pour la Physique, trouva le moïen de le rendre universel sans rien changer à sa construction, en fixant un degre de chaleur auquel on pouvoit rapporter tous les autres, qui est celui de l'eau bouillante, & qui doit être le même par toute la terre sui-

vant l'expérience de M. Amontons ; en sorte qu'il sembloit qu'on ne pouvoit rien souhaiter de plus parfait sur cette matiere. Cependant M. Nuguet vient d'en publier un autre cette année, qu'il prétend bien meilleur que tout ce qui paru jusqu'à présent, comme on le peut voir par le titre qu'il y a mis, que voicy.

*Nouvelle découverte d'un Thermometre cherché depuis longtemps par Messieurs de l'Academie Royale des Sciences, exempt des défauts des autres Thermometres, contenant tous les avantages qui ne se trouvent que séparément & par parties dans ceux dont on s'est servi jusqu'à présent.*

Je ne doute point que M. Nuguet n'ait crû par ce titre faire beaucoup valoir son Thermometre dans l'esprit du public ; mais il ne devoit pas pour cela y citer l'Academie, n'ayant vû en aucun endroit qu'elle ait jamais cherché un Thermometre tel qu'il le propose, à moins que ce ne soit à cause que M. Amontons, environ 12 ans avant que d'être de l'Academie, en avoit voulu faire un qui étoit à peu près semblable à celui qu'il a fait ; mais ayant reconnu qu'il seroit defectueux & bien plus difficile à construire que celui de Florence, il l'abandonna. Je ne crois pas que ce que je viens de rapporter soit valable pour autoriser M. Nuguet à citer l'Academie qui n'est point garante des fautes que peuvent faire ceux qui en sont, & à plus forte raison de celles qu'ils ont pû faire quand ils n'en étoient pas encore. Passons à l'examen de son Thermometre, & voyons s'il répond au titre qu'il porte.

Ce Thermometre est assez semblable au Barometre de M. Hugen. Il est composé d'une boule de verre scellée hermetiquement & pleine d'air condensé par le froid de l'eau à la glace, & de 4 tubes cylindriques soudés & joints les uns aux autres, & qui tous ensemble n'en font qu'un seul recourbé dont la courbure est enbas. On emplit ce tuyau comme le Barometre double, avec des précautions cependant dont nous parlerons dans la suite ; ce qui fait quel'espace depuis le haut de ce tuyau jusques vers le milieu du premier tube est vuide d'air grossier, & qu'ensuite

il y a du mercure jusque vers le milieu du troisième tube qui est au-dessus de la courbure dans l'autre branche, & au-dessus du mercure il y a de l'esprit de vin jusque vers le milieu du quatrième tube au haut duquel est attaché la boule qui est pleine d'air comme le reste de ce même tube. Il est aisé de voir par cette construction que dans la chaleur l'esprit de vin doit descendre, & remonter dans le froid ; parceque l'air de la boule & d'une partie du tuyau se dilatant par la chaleur oblige l'esprit de vin de descendre, & se condensant par le froid laisse la liberté à l'esprit de vin de remonter. Je ne crois pas que cette construction, non-plus que la maniere de le remplir, paroisse plus simple que celle du Thermometre de Florence. Mais voyons surquoi il établit le raport de ses tubes, d'où dépend toute la construction de son Thermometre.

La proportion qu'il a prise entre le tube où se meut l'esprit de vin & les tubes dans lesquels le mercure se termine de part & d'autre, & entre la pesanteur de l'esprit de vin & celle du mercure, est telle que quand la liqueur est arrivée au haut du troisième tube qui marque les plus grandes chaleurs de l'esté, l'air de la boule supporte 4 pouces de mercure plus qu'il n'en soutient quand cette même liqueur est parvenue à l'entrée de la boule qui marque les plus grands froids de l'hyver. La raison qu'il rapporte pour prendre cette proportion, est que l'air renfermé acquiert par les plus grandes chaleurs de l'esté la force de soutenir 4 pouces de mercure plus qu'il n'en soutient pendant les plus grands froids de l'hyver.

Il y a plusieurs remarques à faire sur ce que je viens de dire qui est tiré de son écrit.

1°. Qu'il ne parle point du diametre de la boule dans laquelle l'air est enfermé, à quoi cependant il devrait faire attention ; car nous avons fait des expériences qui nous ont montré que differens volumes d'air enfermés & exposés à un même degré de chaleur soutenoient le mercure à différentes hauteurs, ce qui l'obligera à faire ces boules parfaitement égales dans tous ses Thermometres, &

les tubes égaux ou dans la même proportion, ce qui est presque impossible dans l'exécution.

2°. Qu'il ne dit pas en quel endroit de la terre la différence des plus grandes chaleurs de l'esté aux plus grands froids d'hyver soutient 4 pouces de mercure, il est probable que c'est à Paris, où les termes en ont été connus depuis un certain tems; mais quand on voudra avoir de ces Thermometres dans d'autres païs, il en faudra faire; ceux qu'il a fait pour Paris n'y pouvant pas servir, à cause que les plus grandes chaleurs d'esté & les plus grands froids d'hyver, sur lesquels il en établit la construction, changent suivant les païs; ce qui obligera de les connoître, & ce qui est une grande difficulté.

3°. Qu'il devoit marquer si cet air tel que nous le respirons qui a la force en esté de soutenir 4 pouces de mercure, & qu'en hyver, est enfermé en la comprimant ou condensant; parceque quand on lit l'explication de son Thermometre, il ne paroît pas que cet air soit condensé; cependant celui de la boule de ses Thermometres l'est par le froid de l'eau à la glace. C'est ce qui jette dans une difficulté, à cause que celui sur lequel il établit la construction de ses Thermometres est d'une façon, & que celui qui est dans la boule est d'une autre, & que cependant il paroît conclure l'effet que doit faire celui de la boule par celui que l'autre a produit.

4°. Qu'il aura toujours besoin de glace pour construire ses Thermometres, ce qui est un embarras.

5°. Qu'il doit faire attention, quand il veut faire ses Thermometres, aux différentes hauteurs d'atmosphère qui causent des changemens au corps de l'air.

6°. Qu'il doit prendre garde aux differens degrés de secheresse & d'humidité de l'air qui peuvent produire quelque alteration dans son Thermometre.

Voilà bien des précautions qu'on aura de la peine à prendre, & des difficultés bien difficiles à surmonter dans l'exécution.

Examinons présentement les précautions que cet Au-



teur dit qu'il faut apporter pour remplir son Thermometre.

Avant que de sceler l'extrémité de la boule, il faut avoir soin que l'esprit de vin contenu dans le tube qui est joint à la boule, répond par sa partie supérieure au degré de la graduation du Thermometre ordinaire qui exprime exactement le froid de l'eau à la glace dans laquelle ils sont plongés, & parce qu'il proportionne tellement la quantité de l'eau & la quantité de glace dont il se sert, que le froid qui provient du mélange de ces deux choses, est suffisant pour faire descendre la liqueur du Thermometre ordinaire au 33<sup>e</sup> degré de sa graduation : il introduit de la liqueur dans ce tube jusqu'à ce que son extrémité supérieure réponde à un point qui marque le 33<sup>e</sup> degré de la graduation de son Thermometre.

Il est évident que par cette manière de remplir ses Thermometres, il aura toujours besoin de celui de Florence, & qu'il ne les rendra pas universels, puisqu'il n'y aura que ceux qui auront été faits sur un même Thermometre ordinaire qu'on pourra comparer, supposé que dans toutes les autres parties ils puissent être égaux, n'étant pas persuadé que le 33<sup>e</sup> degré de ceux dont on se sert ordinairement, exprime le même degré de froid, parce que ce 33<sup>e</sup> degré n'est point déterminé par une même cause par toute la terre comme celui qui est marqué par la chaleur de l'eau bouillante. Ce sont en général des difficultés qui m'ont paru dans la construction du Thermometre de M. Nuguet ; il ne me reste plus qu'à donner la comparaison que j'en ai faite avec celui de Florence dont nous nous servons il y a très long-temps.

Le 25 Juin de cette année 1706 à 2 heures &  $\frac{1}{2}$  après midy, le ciel étant serein, j'exposai au soleil dans un lieu où il ne faisoit point de vent, ce dernier Thermometre & celui dont nous nous servons que mon Pere fit faire par M. Hubin il y a plus de 30 ans, dont la boule a 1 pouce 11 lignes de diametre, & le tuyau a 3 pieds 9 pouces de long sur une ligne à peu près de diametre inte-

rieur. Celui de M. Nuguet étant posé bien à plomb, à quoi il faut prendre garde afin qu'il fasse son effet, descendit jusqu'à 93 degrés & demi, & quelques minutes après remon a jusqu'à 80 degrés & demi, & y resta étant toujours exposé au Soleil; ce qui fait voir qu'on ne peut pas attribuer cet effet ni à l'air qui auroit pû être rafraîchi pendant l'expérience, parce que ou l'air auroit continué d'être rafraîchi, & alors l'esprit de vin auroit dû continuer de monter, ce qu'il ne fit pas; ou l'air ne l'auroit été que pour quelques minutes, & alors les rayons du Soleil l'auroient réchauffé & l'esprit de vin auroit dû redescendre, ce qu'il ne fit pas non plus; ni à la diminution de l'action des rayons du Soleil causée par la différence de hauteur sur l'horizon, parce qu'ayant descendu au plus bas en peu de temps, quand il commença à remonter il auroit dû continuer jusqu'à la fin de l'expérience, ce qu'il ne fit pas; il ne faudra donc pas avoir recours à ces raisons-là pour expliquer ce fait, mais à celles que je donne dans la suite. Le nôtre étant à côté, monta jusqu'à 86, & ne s'éleva plus sensiblement; le temps qu'ils y furent exposés fut d'environ 25; ensuite je les ôtai tous deux, & les mis dans une chambre ouverte à l'est & où le Soleil ne donnoit point; & après y avoir été assez de temps pour ne plus changer ni l'un ni l'autre, je rrouvai que celui de M. Nuguet étoit remonté à 78 degrés & demi, & que le nôtre étoit descendu à 64 degrés & demi; & ainsi la différence de l'état où étoit celui de M. Nuguet exposé au Soleil à celui de la chambre, étoit le 11 degrés qui valent 3 pouces 3 lignes & demie, & la différence des deux expositions du nôtre étoit de 21 degrés & demi, qui valent 7 pouces 3 lignes & demie: donc le nôtre a été une fois plus sensible que le sien; mais on en pourra faire comme le nôtre qui seront encore beaucoup plus sensibles; car il n'y aura qu'à augmenter le diametre de la boule, ou mettre un tuyau plus delié qu'il faudra faire assez long afin qu'il ne casse pas pendant les grandes chaleurs.

Il est à propos d'avertir ici ceux qui ne sçavent pas les regles de Dioptrique, qu'ils ne doivent pas attribuer le grand effet des Thermometres de Florence quand ils sont exposés au Soleil, à la figure spherique de leurs phioles, qui ne doit pas plus augmenter l'action de ses rayons sur l'esprit de vin qui y est contenu, que s'il y étoit exposé à nud dans tout autre vaisseau, parce que si par la figure de la courbure de la phiole, les rayons qui y tombent vont en se rassemblant en passant au dedans de la liqueur, & qu'ils échauffent la partie qu'ils touchent par cette réunion plus qu'ils ne feroient s'ils n'étoient rassemblez, aussi ils abandonnent une autre partie de cette liqueur contre laquelle ils ne font aucune action; ce qui fait que l'un recompense l'autre.

Le Thermometre de M. Nuguet n'aura donc pas l'avantage qu'il prétend de parcourir un plus grand espace que celui de Florence. De plus le sien doit toujours avoir près de 3 pieds; au lieu qu'on peut faire l'autre aussi petit qu'on veut, & qui aura néanmoins autant de justesse à proportion que les plus grands; ce qui est fort commode en plusieurs occasions.

Il ne me reste plus qu'à expliquer pourquoi, quand j'eus exposé au Soleil ce nouveau Thermometre, il descendit au plus bas à 93 degrés & demi, & qu'ensuite il remonta à 89 degrés & demi; c'est parce que la chaleur agissant sur l'air & sur l'esprit de vin en même temps, & l'air étant plus susceptible de dilatation, il fit d'abord descendre l'esprit de vin assez promptement, qui est le seul avantage que je sçache que ce Thermometre ait par dessus les autres: mais ensuite l'esprit de vin s'étant échauffé, il comprima l'air par sa dilatation, & remonta de 4 degrez, ce qui prouve qu'on doit regarder ce nouveau Thermometre comme composé de deux autres, l'un à air comme celui de Sanctorius, & l'autre à esprit de vin comme celui de Florence, mais qui agissent l'un comme l'autre. Enfin l'on peut conclure après ce que je viens de rapporter, que le Thermometre de M. Nuguet n'a pas tous

les avantages qu'il lui attribué, puisqu'il est beaucoup moins sensible, beaucoup moins exact, beaucoup moins portatif, beaucoup plus difficile à construire, & beaucoup plus composé que l'ordinaire à esprit de vin.

## DES LOIX DU MOUVEMENT.

PAR M. CARRE'.

1706.  
7. Decemb.

**I**L n'y a gueres de questions dans la Physique, qui aient plus exercé les Philosophes & les Mathématiciens du siècle passé, que celles des Loix du mouvement. En effet ces questions sont des plus curieuses & des plus importantes de cette Science. Je ne parlerai point de tous les Auteurs qui en ont traité, ni des erreurs où plusieurs sont tombez ; je m'attacherai seulement à démontrer une Règle générale, de laquelle je tiretai par Corollaires, le grand nombre de Propositions, que ces Auteurs ont démontrées d'une manière très-longue & très-embarrassée.

### DEFINITIONS.

1. La *Masse* d'un corps est la quantité de matière propre qu'il contient dans l'espace qu'il occupe, & cet espace s'appelle *Volume*.

2. La *Vitesse* d'un corps est le rapport de l'espace au tems, ou l'espace parcouru divisé par le tems employé à le parcourir.

3 La *Force* d'un corps est le produit de sa masse par sa vitesse.

L'on nommera dans la suite les masses de deux corps qui se choquent,  $m$ ,  $n$ , & leurs vitesses  $v$ ,  $r$ ,

### COROLLAIRES.

Il est évident, 1<sup>o</sup>. Que si deux corps inégaux se meuvent avec des vitesses égales, leurs forces seront en même

raison que leurs masses ou quantitez de matiere;

2°. Si ces corps sont égaux, & se meuvent avec des vitesses inégales, leurs forces seront en même raison que leurs vitesses.

3°. Si ces corps sont inégaux en masses & en vitesses, leurs forces seront en raisons composée de leurs masses & de leurs vitesses.

4. Si deux corps inégaux ont des forces égales, leurs vitesses seront réciproquement proportionnelles à leurs masses.

L'on suppose dans la suite que les corps sont à ressort, & qu'ils se choquent directement, c'est-à-dire que le centre de pesanteur de chacun de ces corps & leur centre commun de pesanteur se trouvent dans la même ligne; ou bien, si ce sont des globes, que la ligne qui joint le centre de ces corps passe par leur point d'attouchement dans l'instant du choc; ce qui revient au même.

#### PROPOSITION GENERALE.

I. Si deux corps à ressort se choquent par des mouvemens contraires; je dis que la somme de ces corps est au double de l'un ou de l'autre, comme la somme de leurs vitesses est à une vitesse telle, qu'étant ôtée de la vitesse de l'un ou de l'autre de ces corps avant le choc, le reste sera la vitesse de ce même corps après le choc; ou ce qui revient au même, que la vitesse de chacun de ces corps après le choc sera égale à sa vitesse avant le choc moins le produit du double de l'autre par la somme de leurs vitesses divisé par la somme de leurs masses.

Soient deux corps inégaux,  $m$ ,  $n$ , qui se choquent par des mouvemens contraires avec les vitesses,  $v$ ,  $r$ ; il faut démontrer que si l'on fait,  $m + n. 2n :: v + r. \frac{2nxv+r}{m+n}$ ; &  $m + n. 2m :: v + r. \frac{2mxv+r}{m+n}$ , ces vitesses étant ôtées de  $v$  & de  $r$ , les restes  $v - \frac{2nxv+r}{m+n}$ ,  $r - \frac{2mxv+r}{m+n}$  seront les vitesses que ces corps  $m$  &  $n$  auront après le choc.

Pour démontrer cette Proposition, il faut considérer que par le choc ces corps se compriment mutuellement, la réaction étant égale à l'action. Ils s'applatissent même quelque peu dans l'endroit dont ils se choquent. L'expérience le confirme : car si l'on met sur un plan poli & fort dur une légère couche de suif fort mince, & qu'on laisse tomber dessus une balle d'ivoire, de verre ou d'acier d'une sphericité la plus parfaite que faire se pourra, on voit sur ce plan un cercle qui est d'autant plus grand, que la balle est tombée de plus haut, ou qu'elle a été poussée avec plus de force : ce qui fait connoître visiblement que cette balle, qui ne devoit toucher ce plan que dans un très-petit espace, s'est appliquée sur un grand nombre de ses parties en s'applatissant. D'où l'on doit conclure que les corps à ressort qui se choquent, s'applatissent réciproquement, c'est-à-dire que les petites parties dont ils sont composés, cedent & obéissent pour ainsi dire les unes après les autres à l'effort du choc, jusqu'à ce que la force des mouvemens contraires, qui comprime & applatit ces corps, ayant forcé la matière subtile qui fait leur ressort, d'en abandonner les pores pour un instant, fasse équilibre avec l'effort que cette matière fait pour y rentrer. Mais dans cet état, il est clair que ce qui reste de force ou de mouvement dans la partie la plus éloignée du point de rencontre, c'est-à-dire dans celle qui n'a point été comprimée par le défaut de résistance, ou parce que le choc n'a pas été assez grand, doit se distribuer également dans le reste de sa masse, & dans celle du plus foible de la même manière que dans les corps mous : Donc ce qui restera de force dans ces deux corps, que l'on regarde dans cet instant comme réunis en un, est égale à la différence de leurs momens ou de leurs forces qui est  $mv - nr$  ; divisant donc cette différence par la somme des masses  $m + n$ , on aura  $\frac{mv - nr}{m + n}$  pour leur vitesse commune dans cet instant du choc : ce qui est évident, puisque dans cet instant il se perd ou se détruit autant de force dans le grand que

*Voyez la section  
de la partie  
des Loix du  
Mouvement  
du R. P.  
Milebranche  
Rech. de la  
Vérité de l'E-  
dition de  
1700.*

dans le petit, & que ces corps allant de compagnie s'ils étoient véritablement mous, la force restante se distribueroit également dans les deux corps que l'on doit regarder comme n'en faisant plus qu'un. Or la force ou le moment d'un corps est le produit de sa masse par sa vitesse, donc il faut diviser cette force restante par la somme des masses, & l'on aura leur vitesse commune.

Il faut prendre garde que le mouvement du plus fort se fait du même côté devant & après ce premier instant du choc; ainsi la vitesse est réellement  $\frac{mv - nr}{m + n}$ : mais pour celle du plus foible, elle doit être  $\frac{-nv + mr}{m + n}$ , parceque son mouvement tend à se faire du côté opposé après le choc.

Maintenant parceque la compression & l'appâtissement de ces corps ne se fait qu'à proportion de la force du plus foible, c'est-à-dire de la résistance que le plus fort trouve dans le plus foible, il est clair que cette compression ne doit augmenter que jusqu'à ce que celui qui a le moins de force, ait acquis une vitesse égale à celle qui reste dans le plus fort, puisqu'alors le plus foible ne lui résiste plus ou n'empêche plus son mouvement: car le ressort des corps qui se choquent, ne se bande que jusqu'à ce qu'ils puissent aller de compagnie; alors leurs pores ne sont plus réciproquement comprimés par l'action du plus fort sur le plus foible: ainsi le ressort commence à se débânder par l'action de la matiere subtile qui les penetre, & qui rentre dans les pores d'où elle a été chassée: il est donc évident que ces corps, dont je suppose que le ressort n'a point été affoibli par le choc, doivent être repoussés à proportion que cette matiere subtile a reçu du mouvement par la compression, laquelle dépend toujours de la vitesse respective des corps qui se choquent. Or puisque ces deux corps s'appuient immédiatement l'un sur l'autre dans le tems que la matiere subtile leur rend le même mouvement qu'elle a reçu de leur compression, il est nécessaire qu'ils soient repoussés l'un & l'autre avec des forces égales, & par conséquent que ces secondes vitesses

soient réciproques à leurs masses. Faisant donc  $m + n$ .  
 $n :: v + r \cdot \frac{nv + nr}{m + n}$ , ce sera la vitesse du corps  $m$ ; puis  
 faisant  $m + n$ .  $m :: v + r \cdot \frac{mv + mr}{m + n}$ , ce sera la vitesse du  
 corps  $n$ ; mais il faut encore prendre garde que ces vitesses  
 sont negatives, à cause de la réaction de la matiere sub-  
 tile, qui retablit ces parties comprimées & applaties dans  
 leur état naturel, & par consequent repousse ces corps  
 du côté opposé à leur mouvement avant le choc. Ajou-  
 tant donc les premieres vitesses  $\frac{mv + nr}{m + n}$ , &  $\frac{-mv + nr}{m + n}$ ,  
 puisqu'elles ne sont point detruites, avec celles-ci  
 $\frac{-nv - nr}{m + n}$ , &  $\frac{-mv - mr}{m + n}$ ; l'on aura enfin pour la vitesse du  
 corps  $m$  après le choc  $\frac{mv - nv - 2nr}{m + n}$ , &  $\frac{nr - mr - 2mv}{m + n}$   
 pour celle du corps  $n$ : ou ce qui est la même chose  
 $v - \frac{2nxv + r}{m + n}$ , &  $r - \frac{2mxv + r}{m + n}$ . D'où l'on tire cette Re-  
 gle generale, que pour avoir la vitesse de ces corps  
 après le choc, il faut faire: *La somme de ces corps est au*  
*double de l'un ou de l'autre, ainsi la somme des vitesses ou leur*  
*vitesse respective, est à une vitesse telle, qu'étant ôtée de la vi-*  
*tesse de l'un ou de l'autre de ces corps avant le choc, le reste sera*  
*la vitesse de ce même corps après le choc.* Ce qu'il falloit dé-  
 montrer.

Il est évident, 1<sup>o</sup>. que si  $mv$  est moindre que  $nv + 2nr$ ,  
 & si  $nr$  est moindre que  $mr + 2mv$ , les corps  $m$  &  $n$  ré-  
 jailliront: que s'il arrive le contraire, il se mouvront du  
 même côté d'où ils sont venus; & si ces grandeurs sont  
 égales, ils demeureront en repos. L'on en va donner  
 quelques exemples en nombres Mais auparavant il est bon  
 d'avertir que les lettres  $m$  &  $n$  ne servent qu'à designer les  
 corps qui se choquent; que les chiffres qui se trouvent  
 devant marquent le rapport des masses, & ceux qui sont  
 après marquent celui des vitesses. Ainsi  $2m3$  signifie qu'un  
 corps à 2 de masse, & 3 de vitesse. Que s'il ne se trouve  
 point de chiffre devant la lettre, on y sous-entend tou-



jours l'unité ; & s'il y a un o après , cela veut dire que le corps est en repos.

## I. E X E M P L E.

Que  $4m6$  &  $3n4$  se choquent par des mouvemens contraires, on fera par la Regle  $4 + 3. 6 :: 6 + 4. \frac{6 \times 6 + 4}{4 + 3} = \frac{60}{7}$ , laquelle vitesse étant ôtée de 6, il restera  $-\frac{18}{7}$ , c'est-à-dire que  $m$  réjaillira avec  $\frac{18}{7}$  de vitesse : faisant de même  $4 + 3. 8 :: 6 + 4. \frac{8 \times 6 + 4}{4 + 3} = \frac{80}{7}$ . Or  $4 - \frac{80}{7} = -\frac{52}{7}$ , donc  $n$  réjaillira aussi avec  $\frac{52}{7}$  de vitesse. Aussi dans ce cas  $mv$  est moindre que  $nv + 2nr$ , &  $nr$  moindre que  $mr + 2mv$ .

## II. E X E M P L E.

Que  $3m12$  &  $2n2$  se choquent, on fera  $5.4 :: 14. \frac{56}{7}$ ; or  $12 - \frac{56}{7} = \frac{4}{7}$ ; donc  $m$  continuëra de se mouvoir du même côté avec  $\frac{4}{7}$  de vitesse; aussi  $mv$  est plus grande que  $nv + 2nr$ . Pour le corps  $n$  on trouvera qu'il doit réjaillir avec  $\frac{74}{5}$  de vitesse.

## III. E X E M P L E.

Que  $4m4$  &  $2n2$  se choquent, on trouvera que le corps  $m$  après le choc demeurera en repos ; car dans ce cas  $mv = nv + 2nr$ . Pour le corps  $n$  il réjaillira avec 6 de- grez de vitesse.

II. Il est évident, 2°. Que si un des corps comme  $n$  est en repos, il n'y a qu'à effacer dans la formule qui marque sa vitesse après le choc, tous les termes où  $r$  se rencontre ; ce qui donnera  $\frac{2mv}{m + n}$  pour sa vitesse après le choc ; donc pour avoir la vitesse de ce corps, voici la Regle. La somme des corps est au double du corps choquant ; ainsi sa vitesse est à la vitesse du choqué.

Pour la vitesse du choquant on la trouvera par la formule égale à  $\frac{mv - nv}{m + n}$ , c'est-à-dire que pour avoir cette vitesse, il faut faire: *La somme des corps est à leur différence; ainsi la vitesse du choquant avant le choc, est sa vitesse après le choc.* Ce que l'on trouveroit encore par la Regle générale, en ôtant de  $v$  cette grandeur  $\frac{2nv}{m + n}$ .

Il est évident que si  $mv$  est plus grand que  $nv$ , le choquant continuera de se mouvoir du même côté; si ce terme est plus petit, le corps réjaillira; & s'il est égal, il demeurera en repos.

## E X E M P L E.

Que 5  $m$  12 choque 3  $n$  0, l'on fera par la regle  $5 + 3$  10 :: 12.  $\frac{10 \times 12}{5 + 3} = 15$ ; donc  $n$  se mouvra avec 15 degrez de vitesse. Pour avoir celle de  $m$ , on fera  $5 + 3$  5 - 3 :: 12.  $\frac{12 \times 5 - 3}{5 + 3} = 3$ , c'est-à-dire que ce corps se mouvra encore après le choc avec 3 degrez de vitesse.

Il est encore évident que si la masse du corps  $n$  est plus grande que celle de  $m$ , celui-ci réjaillira toujours; au contraire il continuera de se mouvoir après le choc s'il est plus grand.

III. Si les corps qui se choquent, se meuvent du même côté, l'on fera toujours les mêmes raisonnemens: car s'ils étoient mous, ils iroient de compagnie avec la somme de leurs mouvemens; donc cette somme étant  $mv + nr$ , leur vitesse seroit  $\frac{mv + nr}{m + n}$ . Maintenant distribuant réciproquement aux masses la difference de leurs vitesses, qui est leur vitesse respective,  $v - r$ , on aura pour la vitesse de  $m$ ,  $\frac{nv - nr}{m + n}$  qui doit être negative à cause de la reaction de la matiere subtile: & pour celle du corps  $n$ ,  $\frac{mv - mr}{m + r}$  du même côté; & ajoutant ces vitesses, on trouvera enfin pour la vitesse du corps  $m$  après le choc,  $\frac{2nr + mv - nv}{m + n}$ .

$= v + \frac{2nxr - v}{m+n}$ ; & pour celle de  $n$ ,  $\frac{2mv + nr - mr}{m+n} = r + \frac{2mxv - r}{m+n}$ . D'où l'on peut tirer cette Regle générale.

La somme des corps qui se choquent par des mouvemens de même part, est au double de l'un ou de l'autre de ces corps, comme la difference de leurs vitesses ou leur vitesse respective, est à une vitesse telle, qu'étant ôtée ou ajoutée à la vitesse de l'un ou de l'autre de ces corps avant le choc, le reste sera la vitesse de ce même corps après le choc. Car  $m+n. 2n::v-r. \frac{2nv - 2nr}{m+n}$ ; & cette vitesse étant ôtée de  $v$ , on aura  $\frac{2nr + mv - nv}{m+n} = v + \frac{2nxr - v}{m+n}$ ; faisant de même  $m+n. 2m::v-r. \frac{2mv - 2mr}{m+n}$ , laquelle étant ajoutée à la vitesse  $r$ , donnera  $\frac{2mv + nr - mr}{m+n} = r + \frac{2mxv - r}{m+n}$ . Il est facile de voir si le corps qui a le plus de vitesse ou qui attrape l'autre, doit encore se mouvoir après le choc, s'il doit réjaillir, ou s'il doit demeurer en repos.

## I. E X E M P L E.

Que  $8m$  attrape  $4n$ , l'on fera par la regle  $8+4. 8::12-4. \frac{8 \times 12 - 4}{8+4} = \frac{6}{3}$ ; or  $12 - \frac{16}{3} = \frac{20}{3}$ ; donc  $m$  après le choc continuera de se mouvoir avec  $\frac{20}{3}$  de vitesse. De même  $8+4. 16::12-4. \frac{16 \times 12 - 4}{8+4} = \frac{32}{3}$ ; mais  $4 + \frac{32}{3} = \frac{44}{3}$ ; donc  $n$  se mouvra avec  $\frac{44}{3}$  de vitesse.

## II. E X E M P L E.

Que  $m$  attrape  $3n$ , on trouvera par la regle que  $m$  réjaillira avec 6 degrez de vitesse, &  $n$  continuera de se mouvoir avec 14.

Ces exemples sont plus que suffisans pour faire voir l'application de la Regle generale; mais pour en marquer la fécondité, voici un grand nombre de conséquences qu'on en peut tirer, qui sont autant de propositions démontrées par plusieurs Auteurs qui ont traité cette matier.

1. Les corps qui se choquent ont toujours leur vitesse respective égale avant & après le choc. Car par la Règle generale \* du choc des corps qui se rencontrent par  
 \* Art. 1. des mouvements contraires, on a trouvé après le choc

$\frac{mv - nu - 2nr}{m + n}$ ; &  $\frac{nr - mr - 2mv}{m + n}$  pour la Vitesse de deux corps qui se choquent; mais ces vitesses étant ajoutées ensemble donnent  $v + r$ , qui est la vitesse respective avant le choc; donc, &c. Il en est ainsi des autres cas.

2. Le centre de pesanteur de deux corps qui se font choquez, se meut toujours avec la même vitesse avant ou après le choc; & si ce centre demeure en repos dans le mouvement qui précède le choc, il demeurera aussi en repos après le choc. Cela est évident par l'article précédent. C'est ainsi qu'il faut entendre cette proposition, que Dieu conserve toujours dans la nature une égale quantité de mouvement, non une égale quantité de mouvement absolu, mais une égale quantité de mouvement de même part.

Il y a eu de grands Philosophes & il y en a encore qui soutiennent que Dieu conserve toujours une égale quantité absolue de mouvement dans la nature, parceque tout autre principe leur paroît ne pouvoir s'accorder avec l'immutabilité de Dieu, ni avec les loix générales suivant lesquelles il a construit & conservé ce vaste Univers: ce qui paroît d'abord très-vrai-semblable, & il n'y a gueres que l'expérience qui en puisse faire voir la fausseté. Mais parceque les expériences que l'on a faites sur les corps durs à ressort, ne sont pas d'accord avec ce principe, puisque dans une infinité de chocs il y a du mouvement qui se perd & d'autre qui se rétablit, il a fallu en chercher un autre qui ne s'opposât ni à l'immutabilité divine ni aux expériences. Le R. P. Malebranche qui a donné des loix du mouvement, & qui avoit soutenu ce sentiment, examinant cette matiere de plus près, a enfin trouvé le dénouement de ce mystere, en considérant que dans tous les chocs des corps, leur centre commun de pesanteur a toujours avant & après le choc une

égale vitesse. Voici comme ce grand Philosophe s'explique. *Dans cette Proposition, Dieu conserve toujours dans l'Univers une égale quantité de mouvement, il y a une équivoque qui fait qu'elle est vraie en un sens, & fausse en un autre, conforme ou contraire à l'expérience. Elle est vraie en ce sens, que le centre de pesanteur de deux ou plusieurs corps qui se choquent de quelque manière que ce puisse être, se meut toujours de la même vitesse avant & après le choc. De sorte qu'il est vrai que Dieu conserve toujours une égale quantité de mouvement de même part, ou un égal transport de matière. Par exemple lorsque m6 choque 5m0, l'expérience apprend qu'après le choc m6 réjaillit m4, & 5m0 avance 5m2. Or 5m2 ou m10 en avant moins m4, ou ce qui est la même chose, plus m4 en arrière, est égal à m6, qui est la quantité de mouvement de même part, ou la même force qui étoit avant le choc. Ainsi cette proposition, Que Dieu conserve toujours une égale quantité de mouvement, est vraie en ce sens.*

*Mais cette proposition est fausse & contraire à l'expérience prise en ce sens, que la somme du mouvement de chacun des corps, de quelque manière qu'ils se choquent, soit après le choc égale à celle qu'ils avoient avant le choc, ou que la quantité absolue de mouvement demeure toujours la même. Car dans l'exemple ou l'expérience précédente, avant le choc la quantité de mouvement n'étoit que m6, celle de 5m0 étant nulle: mais après le choc elle devient m14, puisque 5m2, ou m10 plus m4 est égal à m14. Ainsi par le choc la quantité de mouvement prise absolument, c'est-à-dire sans avoir égard aux sens contraires dont les corps sont mûs, augmente ou diminue sans cesse.*

Comme il en est de même dans une infinité d'autres exemples, l'on doit conclure que la Loi immuable que l'Auteur de la nature suit constamment dans la conservation de ce monde visible, est que dans tous les chocs des corps, il y ait toujours une égale quantité de mouvement de même part, ou un égal transport de matière. Mais les Metaphysiciens ne manqueront pas de demander pourquoi Dieu observe plutôt cette Loi, que celle de conserver toujours une égale quantité absolue de mouvement,

puisque cela s'accorde également bien avec son immutabilité. L'on peut répondre que suivant cette dernière Loi, il n'y auroit pas cet équilibre si nécessaire à la conservation des corps dont ce monde est composé : car comme on ne sçauroit mouvoir un corps que par le choc d'un autre, le choc étant la cause occasionnelle de la communication des mouvemens, il faut toujours dans tous les mouvemens considérer deux ou plusieurs corps, & les rapporter l'un à l'autre, puisqu'ils agissent l'un sur l'autre. Or comme c'est de leur centre commun de pesanteur que doit dépendre l'équilibre, c'est aussi à ce centre auquel il faut avoir égard pour connoître le résultat de leurs mouvemens. Ainsi il y aura toujours équilibre lorsque ce centre aura avant & après le choc une égale vitesse, ou ce qui revient au même, que Dieu conservera une égale quantité de mouvement de même part. Il faut donc dire que cette Loi porte beaucoup plus le caractère des attributs divins (ce sont les paroles du P. Malebranche) *nonobstant la variété infinie des mouvemens des corps particuliers. Car le mouvement de tous les corps en general est toujours le même, tout demeure, pour ainsi dire, dans un parfait & immuable équilibre. Il est clair que Dieu agit toujours de la même manière, avec uniformité, une parfaite simplicité, puisqu'il observe sans cesse cette Loi dans les chocs infinis des corps, que leur centre de pesanteur demeure en repos, ou se meurt toujours nonobstant le choc avec la même vitesse; & par conséquent qu'il y ait toujours dans toutes les parties de l'Univers prises ensemble le même mouvement ou la même force, nonobstant les mouvemens variables des corps particuliers nécessaires pour perfectionner l'Univers, & pour exprimer la sagesse & les autres attributs du Createur.*

3. Si deux corps se choquent de nouveau avec la même vitesse qu'ils ont acquise après le premier choc, ils reprendront par ce nouveau choc la même vitesse qu'ils avoient avant le premier choc. Cela est évident.

4. Dans les corps qui se choquent, il ne se conserve pas toujours la même quantité de mouvement après le

choc, mais elle peut augmenter ou diminuer. Soit un petit corps  $m$  choquant un grand  $m+x$  en repos avec la vitesse  $v$ : on trouvera qu'après le choc la vitesse de  $m+x$  sera  $\frac{2mv}{2m+x} = v - \frac{xv}{2m+x}$ , & celle de  $m$  sera  $-\frac{xv}{2m+x}$ ; donc la quantité de mouvement après le choc sera  $\frac{2mmv + 2mxv + mxv}{2m+x} = \frac{2m^2v + 3mxv}{2m+x} = mv + xv - \frac{xxv}{2m+x}$ ; mais avant le choc elle étoit  $mv$ ; donc elle est plus grande après le choc, parceque  $\frac{xxv}{2m+x}$  est plus petite que  $xv$ .

Que si maintenant l'on faisoit choquer ces mêmes corps avec les vitesses résultantes du premier choc, savoir  $m+x$  avec  $\frac{2mv}{2m+x}$ , &  $m$  avec  $\frac{xv}{2m+x}$ ; comme \* ecs

\* Art. 3.

corps reprendroient les mêmes vitesses qu'il avoient avant le premier choc, il est clair que la quantité du mouvement seroit diminuée.

5. Si deux corps égaux se choquent avec des vitesses égales ou inégales, ils feront échange de leurs vitesses après le choc, & réjailliront.

6. Si deux corps inégaux se choquent par des mouvements contraires, & que leurs vitesses soient en raison inverse de leurs masses; ils réjailliront après le choc avec la même vitesse qu'ils avoient avant le choc.

7. Si deux corps inégaux se choquent par des mouvements contraires, & qu'après le choc ils aillent tous deux du même côté, ou que l'un demeure en repos, la somme de leurs quantitez de mouvement après le choc, sera égale à la difference de celles qu'ils avoient avant le choc.

*Exemple 1.* Que  $4m12$ , &  $2n4$  se choquent, on trouvera par la règle que le premier continuëra de se mouvoir après le choc avec  $\frac{4}{3}$  de vitesse, & que le second réjaillira avec  $\frac{52}{3}$ . Or  $\frac{16}{3} + \frac{104}{3} = 40$  qui est la difference des quantitez de mouvement avant le choc; donc, &c.

*Exemple 2.* Si les corps qui se choquent sont  $4m8$  &  $2n4$ , le premier deviendra  $4m0$ , & le second  $2n12$ , c'est à dire que l'un demeurera en repos, & l'autre réjaillira avec 12 degrez de vitesse : or  $32 - 8 = 24$  ; donc, &c.

8. Que si les corps réjaillissent tous deux après le choc, la somme de leurs quantitez de mouvement après le choc sera plus grande que la difference de celles qu'ils avoient avant le choc, & cette nouvelle difference sera égale au double de la quantité de mouvement du corps auquel il en reste le moins. Que  $5m4$  &  $3n2$  se choquent, le premier réjaillira  $5m\frac{1}{2}$ , & le second  $3n\frac{11}{2}$  : or  $\frac{5}{2} + \frac{33}{2} = 19$ , qui est la quantité du mouvement après le choc, la difference avant le choc étoit 14 ; donc  $19 - 14 = 5$  est double de  $\frac{5}{2}$ .

9. Si un corps est triple d'un autre, & qu'ils se choquent avec des vitesses égales, le plus grand après le choc demeurera toujours en repos, & le plus petit réjaillira avec une vitesse double de celle qu'il avoit avant le choc. Soient ces deux corps  $9mv$  &  $3mv$ , on trouvera par la regle que le premier deviendra  $9m0$ , & le second  $3m2v$ .

10. Si deux corps se choquent par des mouvemens contraires, la vitesse qu'un des corps perdra est à celle qu'il perdrait s'il choquoit le même corps en repos, comme la somme des vitesses est à la vitesse du corps choquant. Soient ces deux corps  $m$  &  $n$  qui se choquent d'abord par des mouvemens contraires avec les vitesses  $v$  &  $r$ , l'on trouvera par la regle que la vitesse que le corps  $m$  perdra sera  $\frac{2nxv + r}{m + n}$  ; mais que si  $n$  étoit en repos, la vitesse que  $m$  perdrait seroit  $\frac{2nxv}{m + n}$ . Or  $\frac{2nxv + r}{m + n} : \frac{2nxv}{m + n} :: v + r : v$  ; donc, &c.

11. Si deux corps se choquent par des mouvemens contraires, la vitesse que le plus fort perd par le choc du plus foible est égale à celle que ce même corps s'il étoit en repos recevrait du plus foible, & qu'il fût choqué avec une



vitesse égale à la somme ou à la vitesse respective de ces corps. Soient ces deux corps  $m$  &  $n$  qui le choquent avec les vitesses  $v$  &  $r$  la vitesse que le corps  $m$  perdra sera  $\frac{2nxv+r}{n}$ ; si le corps  $m$  étoit en repos, & que le corps  $n$  le choquât avec la vitesse  $v+r$ , celle qu'il lui donneroit seroit la même; donc, &c.

12. Si deux corps inégaux se choquent avec des vitesses égales, le plus petit réjaillira toujours. Pour le plus grand, quelquefois il continuera son mouvement, quelquefois il réjaillira, & quelquefois il demeurera en repos; ce qui est évident par la règle générale.

13. Si deux corps se choquent, & les produits faits de la grandeur ou des masses de ces corps par les quarrés de leurs vitesses, étant ajoûtez ensemble, feront des sommes égales avant & après le choc. Il n'y a qu'à en faire le calcul pour en être convaincu.

14. Si un corps quelque petit qu'il soit & quelque vitesse qu'il ait, en choque un autre en repos quelque grand qu'il soit, il lui communiquera toujours du mouvement: car par la règle il communiquera toujours quelque vitesse au grand; à quoi il faut ajoûter que le grand étant en repos, n'a point de force pour résister au mouvement, puisque la force d'un corps est le produit de sa masse par sa vitesse.

15. Si un corps en rencontre un autre égal & en repos, il lui communiquera toute sa vitesse, & il restera en repos.

16. Si un corps en choque un plus petit en repos, il lui donnera toujours une plus grande vitesse que la sienne; mais elle sera toujours moindre que le double de la sienne. Soit le corps  $m+x$  choquant avec la vitesse  $v$  le plus petit  $m$  en repos, sa vitesse après le choc sera  $\frac{2mv+2xv}{2m+x}$

$=v+\frac{xv}{2m+x}$ . Or cette vitesse est plus grande que celle du choquant, mais moindre que  $2v$ ; donc, &c.

17. Si un corps en choque un autre plus petit en repos,

& que la vîtesse du choquant soit égale à la somme des masses de ces corps, le petit après le choc aura une vîtesse égale au double de la masse du grand, & celle que le grand perdra sera double de la masse du petit. Soit  $5m3$  choquant  $3m0$ , le premier après le choc deviendra  $5m2$ , & le choqué  $3m10$ ; donc, &c.

18. Que si c'est le petit corps qui rencontre le plus grand en repos, & que la vîtesse du petit soit égale à la somme des masses des deux corps, le grand après le choc aura une vîtesse double de la masse du petit, & par conséquent celle que le petit perdra sera aussi double de la masse du grand. Ce qui est évident.

19. Si un corps en rencontre un autre plus grand que lui en repos, il lui donnera une vîtesse moindre que la sienne, & il réjaillira toujours. Que  $m$  choque  $m+x$  avec la vîtesse  $v$ , celle qu'il lui communiquera sera  $\frac{2mv}{2m+x} = v - \frac{xv}{2m+x}$ , & celle qui lui restera sera toujours negative; donc, &c.

20. La vîtesse qu'un grand corps donneroit à un petit corps en repos, est à celle que ce petit corps donneroit au grand s'il étoit en repos, les vîtesses des choquans étant égales, en même raison que la masse du grand est à la masse du petit. Car soit  $mv$  choquant  $no$ , la vîtesse de  $no$  sera  $\frac{2mv}{m+n}$ . Que si  $nv$  choque  $mo$ , sa vîtesse sera  $\frac{2nv}{m+n}$ . Or ces vîtesses sont comme  $m$  à  $n$ ; donc, &c.

21. Si un même corps en choque un autre en repos avec deux vîtesses inégales, les vîtesses que le corps choqué acquerra seront en même raison que celle du corps choquant. Ce qui est évident.

22. Si un même corps choque l'un après l'autre deux corps inégaux en repos avec les vîtesses égales, les vîtesses que ces corps recevront seront réciproquement proportionnelles à la somme du choquant & de quelqu'un des choquez. Soient ces trois corps  $m, n, p$ , dont les deux derniers sont en repos, & que  $v$  exprime la vîtesse de  $m$ , la vîtesse du corps  $n$  après le choc sera  $\frac{2mv}{m+n}$ , celle du corps

corps  $p$  fera  $\frac{2mv}{m+p}$ . Or ces vitesses sont comme  $m + p$  à  $m + n$ ; donc, &c.

23. Si un corps en choque deux autres inégaux & en repos, & qu'il leur communique des vitesses égales, les vitesses du choquant doivent être entr'elles comme la somme du choquant & de quelqu'un des choquez. Soient encore ces trois corps  $m, n, p$ . On aura (en supposant les vitesses du choquant  $x$  &  $y$ ) pour la vitesse du corps  $n$ ,  $\frac{2mx}{m+n}$ , & pour celle de  $p$ ,  $\frac{2my}{m+p}$ . Or par la supposition ces deux vitesses doivent être égales, donc  $\frac{2mx}{m+n} = \frac{2my}{m+p}$ , donc  $x:y :: m+n. m+p$ ; donc, &c.

24. Si deux corps inégaux en frappent un autre en repos avec la même vitesse, les vitesses qu'ils lui communiqueront seront en raison composée de la raison des corps choquans, & de la raison reciproque de ces mêmes corps plus le corps choqué. Que  $m$  &  $n$  choquent  $p$  en repos avec la vitesse  $v$ , la vitesse  $p$  choqué par  $m$  fera  $\frac{2mv}{m+p}$ , & choqué par  $n$  fera  $\frac{2nv}{n+p}$ . Or  $\frac{2mv}{m+p} : \frac{2nv}{n+p} :: m \times n + p. n \times m + p$ ; donc, &c.

25. Si un corps en choque un autre en repos, & qu'après le choc ils avancent tous deux du même côté, ou que le choquant demeure en repos, les quantitez de mouvement seront égales avant ou après le choc. Par exemple, que 5  $m$  3 choc 3  $n$  0, le premier après le choc deviendra 5  $m$   $\frac{3}{4}$ , & le second 3  $n$   $\frac{15}{4}$ ; donc les quantitez de mouvement sont égales avant & après le choc. Que si 4  $m$  4 choque 4  $n$  0, le premier demeurera en repos, & le second se mouvra avec 4 degrez de vitesse; donc, &c. Mais si le choquant réjaillit, la quantité de mouvement de celui qui s'avance sera plus grande que celle du choquant avant le choc, & la difference sera égale à la quantité de mouvement avant le choc, du corps qui réjaillit. Car que 3  $m$  8 choque 9  $n$  0, la quantité de mouvement est 24; mais

9no devient 3n4, & 3m8 devient—3m4. Or  $36—12=24$ ; donc, &c.

26. Si plusieurs boules égales sont rangées de suite, & qu'une autre boule égale choque la première, la dernière seule en recevra la vitesse, & les autres demeureront en repos. Que s'il y en a deux qui se meuvent ensemble, & qui en choquent une suite qui se touchent, il n'y aura que les deux dernières qui acquerront du mouvement, les autres demeureront en repos. Que s'il y en a trois qui se meuvent ensemble, il y en aura trois de celles qui se touchent qui recevront du mouvement, & ainsi de suite. Ce qui est évident par la règle.

27. Si trois corps inégaux  $m, n, p$ , sont tels que  $m$  soit plus grand que  $n$ , &  $n$  plus grand que  $p$ , & que  $n$  &  $p$  soient en repos; je dis que le corps  $p$  étant mis en mouvement par  $m$  par l'entremise du corps  $n$ , recevra une plus grande vitesse que s'il étoit choqué immédiatement par  $m$ .

Ayant nommé le premier corps  $m$  & sa vitesse  $v$ , on prendra  $m—x$  pour le second, &  $m—x—y$  pour le troisième. Maintenant on fera par la règle  $2m—x. 2m::v.$

$\frac{2mv}{2m—x}$  vitesse de  $n$  choqué par  $m$ ; ensuite  $2m—x—y.$

$2m::v. \frac{2mv}{2m—x—y}$  vitesse de  $p$  choqué aussi par  $m$ ; enfin

$2m—2x—y. 2m—2x:: \frac{2mv}{2m—x} \cdot \frac{2mv \times 2m—2x}{2m—xx \ 2m—2x—y}$  qui

est la vitesse du corps  $p$  choqué par  $n$  avec la vitesse qu'il a reçue du corps  $m$ . Et divisant cette grandeur haut &

bas par  $2m—2x$ , on aura  $\frac{2mv}{xy}$ . Or il est

$$\frac{2m—x—y}{2m—2x}$$

visible que cette fraction est plus grande que  $\frac{2mv}{2m—x—y}$ , qui étoit la vitesse de  $p$  choqué immédiatement par  $m$ ; donc, &c. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Que si l'on suppose que le corps  $m$  qui est le plus grand soit en repos, & que  $p$  choquant  $n$ , ce corps  $n$  avec la vitesse qu'il a reçue de  $p$  aille fraper le corps  $m$ ; on démontrera de la même manière que  $m$  acquerra plus de vitesse

étant ainsi choqué, que s'il l'étoit immédiatement par  $p$ . Il est donc évident qu'un corps en repos reçoit moins de vitesse d'un autre corps plus grand ou plus petit, s'il en est choqué immédiatement, que s'il étoit choqué par l'entremise d'un troisième de moyenne grandeur.

28. Si le repos du milieu est moyen proportionnel entre les deux autres, je dis que le troisième corps acquerra une plus grande vitesse étant choqué par le moyen qu'on suppose avoir été frappé par le premier, que s'il étoit choqué de la même manière par tout autre corps. Car supposant encore les trois corps  $m$ ,  $n$ ,  $p$ , & cherchant quel rapport le corps du milieu  $n$  doit avoir aux deux autres, afin que la vitesse de  $p$  choqué par  $m$  par l'entremise de  $n$ , soit la plus grande qu'il est possible; on trouvera par la règle que la vitesse du corps  $n$  choqué par  $m$  avec la vitesse  $v$  sera  $\frac{2mv}{m+n}$ ; que celle de  $p$  choqué aussi par  $m$  sera  $\frac{2mv}{m+p}$ ; enfin que celle de  $p$  choqué par  $n$  avec la vitesse que  $m$  lui a communiquée sera  $\frac{4mnv}{nn+mn+mp+np}$ , qui doit être un plus grand. Prenant donc suivant la règle de la 3<sup>e</sup> Section de l'*Anal. des Infiniment petits*, la différence de cette fraction dans laquelle il n'y a que  $n$  de variable, & l'égalant à zéro, on en tirera cette égalité  $nn=mp$ ; donc  $m:n::n:p$ ; donc le corps  $n$  doit être moyen proportionnel entre  $m$  &  $p$ , afin que  $p$  acquière la plus grande vitesse possible. *Ce qu'il falloit démontrer.* Ces deux derniers articles avoient déjà été donnez par M. Saurin dans un Journal des Sçavans, en supposant la règle générale lorsqu'un corps est en repos, démontrée par M. Hugens.

29. Il est évident que plus on interposera de corps, & plus on augmentera la vitesse du dernier, & que cette vitesse sera toujours la plus grande qu'il est possible, si tous ces corps sont en progression géométrique. Par exemple, si l'on donne 100 corps disposez par ordre en progression double, & que le mouvement commence par le plus grand, on trouvera après en avoir fait le calcul, que la vitesse du plus petit est à celle qu'avoit le plus grand avant le choc,

comme 14760000000 est à 1. Que si c'est le plus petit qui commence à se mouvoir, la quantité de mouvement sera augmentée en raison de 1 à 467700000000. C'est-là un des paradoxes les plus surprenans, dont la découverte est dûe à M. Hugen.

30. Si deux corps égaux étant mûs du même côté avec des vitesses inégales, se choquent, ils continueront toujours de se mouvoir du même côté, mais ils feront échange de leurs vitesses: ce qui est évident par la regle.

31. Si un corps en rencontre un autre plus petit mû du même côté, la vitesse qu'il acquerra sera plus grande que celle du grand avant le choc; & celle que le grand conservera sera aussi plus grande que celle du petit avant le choc. Soient ces deux corps  $m+x$  &  $m$  qui se meuvent du même côté avec les vitesses  $v$  &  $r$ ; on fera par la regle  $2m+x. 2m+2x::v-r. \frac{2m+2xxv-r}{2m+x}$ , qui est la vitesse que le grand donnera au plus petit. Ajoutant donc cette vitesse avec  $r$ , on aura pour la vitesse du petit après le choc  $v+\frac{xv-xr}{2m+x}$  qui est plus grande que  $v$ . Et pour avoir celle du grand, on fera  $2m+x. 2m::v-r. \frac{2mv-2mr}{2m+x}$ , laquelle étant ôtée de  $v$ , donnera pour celle du grand après le choc  $r+\frac{xv-xr}{2m+x}$ , qui est plus grande que  $r$ ; donc, &c.

32. Que si c'est le plus petit qui en rencontre un plus grand mû du même côté, la vitesse que le grand aura après le choc sera plus petite que celle du petit; mais pour le petit quelquefois il continuera son mouvement avec une vitesse plus petite que celle du grand avant le choc; quelquefois il demeurera en repos, & quelquefois il réjaillira. Cela est évident par la regle, & il est inutile d'en donner des exemples.

33. Si deux corps se choquent en se mouvant de même part, la vitesse que le corps qui en a le moins reçoit de celui qui en a le plus, est égale à celle qu'il recevrait s'il étoit en repos, & qu'il fût choqué par le même corps avec une

vitesse égale à la différence des vitesses de ces deux corps : car si ces deux corps sont  $m$  &  $m - x$ , & leurs vitesses  $v$  &  $r$  ; on trouvera dans les deux cas que la vitesse que le plus petit reçoit du plus grand est  $\frac{2mv - 2mr}{2m - x}$ .

34. Si deux corps se choquent en se mouvant de même part, la vitesse que le plus grand communiquera au plus petit, est à celle qu'il lui communiqueroit s'il étoit en repos en même raison que la différence des vitesses est à la vitesse du plus grand avant le choc. Ce qui est évident.

35. Si un corps en choque un autre mù du même côté, la somme des quantitez de mouvement des deux corps après le choc sera la même qu'avant le choc, s'ils avancent tous deux, ou si celui qui a le plus de vitesse demeure en repos. Mais si celui qui attrape l'autre réjaillit, la quantité de mouvement de l'autre sera plus grande que celle des deux corps avant le choc, & la différence sera égale à la quantité de mouvement du corps réjaillissant.

### I. E X E M P L E.

1. Que  $4m8$  attrape  $2n4$ , la quantité de mouvement est 40 ; mais après le choc  $4m8$  devient  $4m\frac{16}{3}$  &  $2n4$ , devient  $2n\frac{28}{3}$  ; donc &c.

Que  $m12$  attrape  $3n4$  la quantité de mouvement est 24 ; mais après le choc  $m12$  devient  $m0$ , &  $3n4$  devient  $3n8$  ; donc &c.

Enfin que  $2m8$  attrape  $10n2$ , la quantité de mouvement sera 36 ; mais après le choc  $10n2$  devient  $10n4$ ,  $2m8$  devient  $-2m2$ , c'est-à-dire qu'il réjaillit avec deux degrez de vitesse. Or la quantité de mouvement du second est 40 qui differe de 36, du nombre 4 qui est la quantité de mouvement du premier après le choc ; donc, &c.

L'on résoudra avec la même facilité une infinité d'autres questions ou de problèmes, que l'on pourra proposer sur cette matiere, & l'on ne s'y est peut-être que trop arrêté.

## C O M P A R A I S O N

*De diverses Observations de l'Eclipse du Soleil du 12  
May 1706 faites en diverses Villes  
de l'Europe.*

PAR M. CASSINI le fils.

1706.  
17. Nov.

**A**Près avoir reçu de divers lieux les Observations de cette Eclipse, nous les avons comparées à l'Observation qui en a été faite à Paris, décrite dans la Figure par la methode que nous pratiquons ordinairement, pour déterminer la difference des meridiens entre Paris & les lieux où cette Eclipse a été observée.

Parmi ces Observations il y en a plusieurs qui ont été faites dans la bande de la terre où l'Eclipse a été totale, comme Montpellier, Arles, Marseille, Geneve & Zurik. Dans les autres endroits elle a été plus petite à proportion que ces lieux étoient plus éloignés de cette bande. Comme l'on ne put pas observer le commencement de l'Eclipse à Paris, & qu'on ne l'apperçût qu'à  $8^h\ 25' 38''$ , auquel tems on jugea qu'il pouvoit y avoir environ 20 secondes qu'elle étoit commencée; l'on a supposé dans la Figure son commencement à  $8^h\ 25' 20''$ .

Nous ne nous sommes pas contenté de déterminer la difference des meridiens par le commencement & par la fin de l'Eclipse, dans lesquels il y a souvent quelque ambiguité; mais nous avons aussi examiné celle qui résulte des autres Phases dans les endroits où l'on a observé la quantité des doigts éclipsés, afin d'avoir un plus grand nombre d'observations qui concourent à la détermination de la difference des meridiens.



*Comparaison de l'Eclipse observée à Montpellier par Messieurs  
de la Société Royale des Sciences.*

	A Montpellier.	A Paris par la Figure.	Difference des me- ridiens entre Paris & Montpellier.
Commencement à	8 <sup>h</sup> 21'	8 16' 10"	4' 50"
Un doit.	8 25 37	8 21 25	4 12
Deux doit.	8 30 52	8 26 40	4 12
Trois doit.	8 36 11	8 31 45	4 26
Quatre doit.	8 41 11	8 37 0	4 11
Cinq doit.	8 46 10	8 42 15	3 55
Six doit.	8 51 34	8 47 40	3 54
Sept. doit.	8 56 55	8 53 15	3 40
Huit doit.	9 2 33	8 58 35	3 58
Neuf doit.	9 8 19	9 4 20	3 59
Dix doit.	9 13 57	9 9 40	4 17
Onze doit.	9 19 52	9 15 20	5 32
Immersion totale.	9 25 55	9 22 0	3 55

Commencement de l'Emerfion.	9 30 5	9 24 10	5 55
Onze doit.	9 36 50	9 30 30	6 20
Dix doit.	9 42 36	9 36 25	6 11
Neuf doit.	9 48 13	9 42 10	6 3
Huit doit.	9 54 2	9 48 0	6 2
Sept doit.	9 59 47	9 53 50	5 57
Six doit.	10 5 33	9 59 40	5 53
Cinq doit.	10 11 35	10 5 40	5 55
Quatre doit.	10 17 28	10 11 40	5 48
Trois doit.	10 23 17	10 17 40	5 37
Deux doit.	10 29 26	10 23 35	5 51
Un doit.	10 35 25	10 29 20	6 5
Fin de l'Eclipse.	10 40 38	10 35 20	5 18

En prenant une moyenne entre ces différences, l'on aura la différence des méridiens entre Paris & Montpellier de 5' 5".

*A Arles par M. Davizard.*

	A Arles.	A Paris par la Figure.	Difference des meridiens entre Paris & Arles.
Commencement à	8 28' 24"	8 16' 0"	6' 44"
Quatre doigts.	8 45 44	8 37 30	8 14
Cinq doigts.	8 52 44	8 43 15	9 30
Onze doigts.	9 24 44	9 16 0	8 45
Obscurité totale.	9 30 44	9 21 50	8 54

Recouvrement de  
lumière.

	9 35 44	9 26 10	9 34
Dix doigts.	9 45 44	7 37 10	8 24
Neuf doigts.	9 51 44	9 43 0	8 44
Huit doigts.	9 57 44	9 49 0	8 44
Sept doigts.	10 3 44	9 54 50	8 55
Six doigts.	10 8 44	10 0 40	8 4
Cinq doigts.	10 15 45	10 6 45	9 0
Quatre doigts.	10 21 45	10 12 40	9 5
Trois doigts.	10 27 45	10 18 45	9 0
Deux doigts.	10 33 15	10 24 30	8 45
Un doigt & demi.	10 36 30	10 27 45	8 45
Fin de l'Eclipse.	10 45 45	10 36 55	8 50

M. Davizard nous écrit qu'il n'avoit pas observé exactement le commencement de l'Eclipse, & qu'il falloit s'en tenir aux Observations suivantes. En prenant une moyenne entre les différences des meridiens qui résultent de cette Observation, l'on aura la différence des meridiens entre Paris & Arles de 8' 50".

*A Avignon dans le College des Jésuites.*

	A Avignone	A Paris par la figure	Difference des meridiens entre Paris & Avignon.
Commencement à	8 27' 55"	8 17' 25"	10' 30"
Un doigt.	8 32 3	8 22 20	9 43
Deux doigts.	8 36 10	8 27 25	8 45
Trois doigts.	8 41 18	8 32 40	8 38
Quatre doigts.	8 47 12	8 38 0	9 12
Cinq doigts.	8 52 46	8 43 55	8 51
			Six doigts.

Six doigts.	8 <sup>h</sup> 58' 29"	8 <sup>h</sup> 49' 10"	9' 19"
Sept doigts.	9 4 20	8 54 40	9 40
Dix doigts.	9 21 56	9 11 15	10 41
Onze doigts.	9 26 24	9 16 50	9 34
Eclipse totale.	9 33 47	9 22 50	10 57

## Recouvrement de

lumiere.	9 36 17	9 26 10	10 27
Onze doigts.	9 43 10	9 32 20	10 50
Dix doigts.	9 48 55	9 38 50	10 50
Neuf doigts.	9 54 50	9 43 50	11 10
Huit doigts.	9 59 20	9 49 30	9 50
Sept doigts.	10 5 21	9 55 20	10 11
Six doigts.	10 11 11	10 1 50	10 6
Cinq doigts.	10 18 29	10 7 25	11 4
Quatre doigts.	10 24 28	10 13 25	11 3
Trois doigts.	10 30 5	10 19 30	10 35
Deux doigts.	10 35 28	10 25 15	10 13
Un doigt.	10 41 1	10 31 5	9 56
Fin de l'Eclipse.	10 46 48	10 36 55	9 53

En prenant une moyenne entre les différences qui résultent de cette Observation, l'on aura la différence des méridiens entre Paris & Avignon de 0' 31".

*A Marseille par le P. Laval & M. Chazelles.*

	A Marseille.	A Paris par la Figure.	Différence des méridiens entre Paris & Marseille.
Commencement à	8 <sup>h</sup> 28' 43"	8 <sup>h</sup> 17' 0"	11 43"
Un doigt.	8 33 50	8 22 15	11 35
Deux doigts.	8 38 39	8 27 10	11 29
Trois doigts.	8 44 10	8 32 40	11 30
Quatre doigts.	8 49 44	8 38 5	11 39
Cinq doigts.	8 54 4	8 43 5	10 59
Six doigts.	8 59 54	8 48 50	11 4
Sept doigts.	9 5 46	8 54 10	11 36
Huit doigts.	9 11 54	8 59 10	12 4
Neuf doigts.	9 16 54	9 5 0	11 54
Dix doigts.	9 23 4	9 11 0	12 4
Onze doigts.	9 28 21	9 16 30	11 51
Eclipse totale.	9 34 40	9 22 30	12 10

Recouvrement de  
lumiere.

	9 <sup>h</sup> 37' 40"	9 <sup>h</sup> 26' 30"	11' 10"
Onze doigts.	9 43 41	9 32 30	11 11
Dix doigts.	9 49 14	9 38 0	11 14
Neuf doigts.	9 55 30	9 43 50	11 40
Huit doigts.	10 0 4	9 49 30	10 34
Sept doigts.	10 5 38	9 55 0	10 38
Six doigts.	10 12 26	10 1 10	11 16
Cinq doigts.	10 18 6	10 7 5	11 1
Quatre doigts.	10 23 36	10 13 0	10 36
Trois doigts.	10 30 35	10 19 20	11 15
Deux doigts.	10 36 5	10 25 0	11 5
Un doit.	10 42 35	10 31 0	11 35
Fin de l'Eclipse.	10 47 30	10 36 50	10 40

En prenant une moyenne entre les differences qui résultent de l'Observation de ces Phases, l'on aura la difference des meridiens entre Paris & Marseille de 11' 22".

*A Geneve par messieurs Violier & Gautier.*

	A Geneve.	A Paris par la figure.	Difference des meridiens entre Paris & Geneve.
Immersion totale.	9 <sup>h</sup> 45' 32"	9 <sup>h</sup> 29'	16' 32"
Recouvrement de la lumière à	9 48 32	9 <sup>h</sup> 31 30	17 2

L'Observation de l'Immersion totale & du recouvrement de lumiere s'accorde à 13 secondes près de celle que M. Fatio a faite à Geneve dans un autre endroit.

*A Zurich par M. Schlenzer.*

	A Zurich.	A Paris par la figure.	Difference des meridiens entre Paris & Zurich.
Commencement à	8 <sup>h</sup> 54'	8 <sup>h</sup> 26' 20"	27' 40"
Le milieu.	8 58	9 33 50	24 10
Fin de l'Eclipse.	11 12	10 47 20	24 40

Il y a apparence qu'il y a quelque erreur dans l'Observation du commencement de l'Eclipse, & qu'il faut s'en tenir à celle de la fin qui s'accorde à quelques secondes près à celle du milieu de l'Eclipse.

Le Soleil fut couvert à Zurik pendant quatre minutes , que l'on voyoit les étoiles de la première grandeur & Venus. L'obscurité y fut si grande qu'on ne reconnoissoit pas les gens à quatre pas de distance. Le bord de la Lune paroissoit comme un anneau d'or, & la rosée tomba & mouilla les herbes.

*A Strasbourg par M. Einsenschmid.*

	A Strasbourg.	A Paris par la Figure.	Difference des méridiens entre Paris & Strasbourg.
Commencement à	8h 49' 38"	8h 27' 35"	21' 43"
Le milieu.	9 58	9 35 30	22 30 30
Fin de l'Eclipse.	11 9 5	10 48 0	21 5

La grandeur de l'Eclipse fut observée à Strasbourg de 11 doigts 38 minutes:

*A Genes par M. le Marquis Salvago.*

	A Genes.	A Paris par la Figure.	Difference des méridiens entre Paris & Genes
Fin de l'Eclipse.	11h 9' 23"	10h 43' 40"	25' 43"

Les nuages empêcherent d'observer exactement à Genes le commencement de l'Eclipse & la plupart des Phases.

*A Modene par le Pere Fontana.*

	A Modene.	A Paris par la Figure.	Difference des méridiens entre Paris & Modene.
Commencement à	8h 57' 0"	8h 22' 40"	34' 20"

*A Bologne par Messieurs Manfredi & Stancani.*

	A Bologne.	A Paris par la Figure.	Difference des méridiens entre Paris & Bologne.
Commencement à	8h 58' 50"	8h 22' 50"	36' 0"
Un doit.	9 4 5	8 28 18	35 53 1
Deux doigts.	9 10 4	8 33 43	35 19
Trois doigts.	9 15 14	8 39 10	36 4

Quatre doigts.	9 <sup>h</sup> 20' 50"	8 <sup>h</sup> 44' 40"	36' 10"
Cinq doigts.	9 26 48	8 50 25	36 23
Six doigts.	9 32 15	8 56 5	36 10
Sept doigts.	9 38 20	9 2 0	36 20
Huit doigts.	9 43 42	9 7 40	36 2
Neuf doigts.	9 49 40	9 13 30	36 10
Dix doigts.	9 55 58	9 19 50	36 8
Onze doigts.	10 3 10	9 26 45	36 29
Dix doigts.	10 19 26	9 44 45	35 41
Neuf doigts.	10 25 29	9 51 5	34 24
Huit doigts.	10 32 10	9 57 10	35 0
Sept doigts.	10 39 32	10 3 50	35 42
Six doigts.	10 44 57	10 9 40	35 17
Cinq doigts.	10 51 53	10 15 50	36 3
Quatre doigts.	10 58 20	10 22 25	35 55
Trois doigts.	11 3 56	10 28 40	35 16
Deux doigts.	11 10 36	10 34 50	35 46
Un doit.	11 16 18	10 40 45	35 33
Fin de l'Eclipse.	11 22 30	10 47 0	35 30

Cette Eclipsé fut observée à Bologne de 11 doigts un tiers. Au temps de la plus grande obscurité la lumière du jour étoit fort pâle, & on pouvoit souffrir sans incommodité à la vue la lumière du Soleil. En prenant une moyenne entre ces différences, l'on aura la différence des méridiens entre Paris & Bologne de 35' 50".

*A Rome par M. Bianchini aux termes de Diocletien.*

	A Rome.	A Paris par la Figure.	Différence des méridiens entre Paris & Rome.
Commencement à 8 <sup>h</sup> 59' 48"		8 <sup>h</sup> 19' 25"	40' 23"
Un doit.	9 6 33	8 25 25	41 8
Six doigts.	9 34 0	8 53 45	40 15
Sept doigts.	9 41 15	8 59 55	41 20
Huit doigts.	9 46 45	9 5 55	40 50
Neuf doigts.	9 53 15	9 12 20	40 55
Dix doigts.	10 1 15	9 20 5	41 10

Neuf doigts.	10 <sup>h</sup> 27' 0"	9 <sup>h</sup> 46' 20"	40' 40"
Huit doigts.	10 33 30	9 53 0	40 30
Trois doigts.	11 7 0	10 25 40	41 20
Deux doigts.	11 12 32	10 31 50	40 42
Fin de l'Eclipsé.	11 24 5	10 44 25	39 40

Le Soleil étoit éclipsé de dix doigts 36 minutes à 10<sup>h</sup> 9' 15". Il se cacha ensuite dans les nuages, mais on jugea que l'Eclipsé n'avoit pas augmenté sensiblement. En prenant une moyenne entre ces différences, l'on aura la différence des meridiens entre Paris & Rome de 40' 45".

*A Madrid dans le College Imperial par le P. Cassani Jesuite.*

A Madrid.	A Paris par la Figure	Difference des meridiens entre Paris & Madrid.
Commencement à 7 <sup>h</sup> 43' 50"	8 <sup>h</sup> 6' 45"	22' 55"
Fin de l'Eclipsé. 9 57 34	10 20 0	22 26

Le Soleil parut éclipsé à 8<sup>h</sup> 44' 30" de onze doigts & demi. L'Eclipsé augmenta encore pendant quelques minutes qu'on ne pût pas marquer. On fit l'Observation de cette Eclipsé avec un verre de 12 pieds qui representoit l'image du Soleil dans une chambre obscure, & l'on marquoit les minutes & les secondes à une Pendule réglée exactement au Soleil les trois jours précédens.

*Depuis le rapport que nous avons fait à l'Academie de diverses Observations de l'Eclipsé du Soleil du 12 May 1706, nous en avons reçu plusieurs autres faites en Allemagne qui nous ont été envoyées par M. Einsenschmid. En voici le résultat.*

*A Nuremberg par M. Wulzelbaur.*

A Nuremberg.	A Paris par la Figure.	Difference des meridiens entre Paris & Nuremberg.
Commencement à 9 <sup>h</sup> 6' 30"	8 <sup>h</sup> 32' 0"	34' 30"
Fin de l'Eclipsé. 11 28 0	10 54 10	34 10

L'Eclipsé a été totale à Nuremberg.

*A Neubourg sur le Danube par les PP. Jesuites.*

	A Neubourg.	A Paris par la Figure.	Difference des méridiens entre Paris & Neubourg.
Commencement à	9 <sup>h</sup> 6' 20"	8 <sup>h</sup> 30' 30"	35' 50"
Immerfion totale.	10 12 10	9 37 30	34 40
Recouvrement de lumiere.	10 15 33	9 40' 50	34 43
Fin de l'Eclipe.	11 26 20	10 52 40	33 40

*A Jena par M. Hambergerus.*

	A Jena.	A Paris par la Figure.	Difference des méridiens entre Paris & Jena.
Commencement à	9 <sup>h</sup> 11' 40"	8 <sup>h</sup> 35' 0"	36' 40"
Fin de l'Eclipe.	11 32 18	10 56 25	35 53
La grandeur de l'Eclipe fut observée à Jena de 11 doigts $\frac{5}{8}$ .			

*A Leipfick par Messieurs Rivinus & Junius.*

	A Leipfick.	A Paris par la Figure.	Difference des méridiens entre Paris & Leipfick.
Commencement à	9 <sup>h</sup> 14' 9"	8 <sup>h</sup> 35' 45"	38' 24"
Fin de l'Eclipe.	11 37 31	10 58 0	39 31

*A Zeitz par M. Teuberus.*

	A Zeitz.	A Paris par la Figure.	Difference des méridiens entre Paris & Zeitz.
Commencement à	9 <sup>h</sup> 15' 30"	8 <sup>h</sup> 35' 40"	38' 50"
Fin de l'Eclipe.	11 36 41	10 57 30	37 11
La grandeur de l'Eclipe fut observée à Zeitz de 11 doigts & demi.			

*A Berlin par M. Hofman.*

	A Berlin.	A Paris par la Figure.	Difference des méridiens entre Paris & Berlin.
Commencement à	9 <sup>h</sup> 24' 20"	8 <sup>h</sup> 39' 45"	44' 35"
Fin de l'Eclipe.	11 45 27	11 10 0	44 27

La grandeur de l'Eclipe fut observée à Berlin de 11 doigts  $\frac{1}{2}$  2 minutes & demi.



*A Breslaw par le P. Heinrich.*

A Breslaw.	A Paris par la Figure	Difference des meridians entre Paris & Breslaw.
Commencement à 9 <sup>h</sup> 39' 40"	8 <sup>h</sup> 39' 45"	59' 55"
Immersion totale. 10 49 0	9 49 25	59 35
Recouvrement de lumiere 10 50 0	9 51 10	58 50
Fin de l'Eclipse. 12 2 20	11 4 0	58 20

## DE L'ECLIPSE DE LUNE

*Du 21 Octobre 1706 à l'Observatoire.*

PAR MRS. DE LA HIRE.

**L**E Ciel a été couvert ici dans toute la durée de cette Eclipsé, & les gros pelotons de nuées qui passaient assez promptement, n'auroient pas empêché qu'on n'en eut observé plusieurs phases, s'il n'y eut eu encore au-dessus une espèce de gros brouillard, au travers duquel les corps lumineux paroissent comme coronneux, en sorte qu'on ne peut voir leur disque ni leurs parties bien terminées; ce qu'on remarque assez souvent en observant le Soleil, quoique son disque paroisse assez net à la vue simple.

1706,  
17. NOV.

Cependant nous avons observé avec le micrometre appliqué à une Lunete de 7 piés de foyer le diametre de la partie éclairée avec autant de justesse qu'il nous a été possible, quoique les termes de l'ombre ne parussent qu'à peine dans les tems où l'on voioit la Lune le plus distinctement, dont nous avons tiré la quantité de l'Eclipsé, comme il suit.

Diametre de la partie éclairée.				Quantité de l'Eclipse.	
H.	de degré.			Doits.	Minutes.
à 6	37.	15'	0"	5	9
	46.	15	50	6	18
	58.	15	0	6	36
7	17.	14	15	6	42
	23.	13	10	7	14

Le Ciel fut si couvert dans tout le reste de l'Eclipse que nous n'en pûmes plus rien observer, & à peine voïoit-on un léger vestige du corps de la Lune par intervalles.

On ne pouvoit rien remarquer des taches dans le tems où le Ciel paroïssoit plus découvert.

Un peu après l'Eclipse le Ciel devint assez clair, & nous observâmes le diametre de la Lune de  $33' 24''$  à la hauteur de 46 degrés  $\frac{1}{2}$ , d'où nous concluons que son diametre horizontal étoit de  $33' 0''$ .

## O B S E R V A T I O N S

*Faites sur le Squelet d'une jeune femme âgée de seize ans, morte à l'Hôtel-Dieu de Paris le 22*

*Fevrier 1706.*

PAR M. MERY.

A V I S.

**L**Es Parties de ce Squelet sont décrites dans leur situation naturelle; mais les figures representent à gauche celles du côté droit, & celles du côté gauche à droit.

*Premiere Observation.* Le Squelet de cette femme n'a que trois pieds de haut ou environ. Son peu de hauteur a pour cause la courbure de l'épine, & celle des os des cuisses & des jambes; Celle-cy est telle que la plante des pieds posant

posant à terre, les fœmurs se trouvent necessairement fléchis en devant; de sorte que ces deux os ne contribuent en rien, ou très-peu à sa hauteur. Delà vient aussi que ce Squelet étant debout sur ses jambes, paroît comme s'il étoit assis: ce qui donne lieu de croire que cette femme gardoit pendant sa vie une semblable posture en marchant.

Cette conjecture paroît d'autant plus vrai-semblable que les os des cuisses & des jambes étant étendus, la plante des pieds de ce Squelet, au lieu de poser à terre, comme elle devoit faire, si ces os n'étoient point courbez, se trouve au contraire tournée en arriere comme quand on est à genoux; ainsi il n'y a que l'extremité de la dernière phalange des orteils de ce Squelet qui puisse toucher la terre; situation dans laquelle il étoit absolument impossible que cette femme pût marcher. Sur cela voyez la seconde Figure.

*Seconde Observation.* Les os des cuisses de ce Squelet étant étendus, & ceux des jambes fléchis, il n'y a que la rotule avec la partie supérieure du tibia qui posent à terre, parceque le demi-cercle que décrivent dans leur partie moyenne le tibia & le peroné, fait que ce Squelet étant appuyé sur ces genoux, la partie inférieure de ses jambes se trouve dans cette situation tournée en enhaut; delà vient que la plante des pieds regarde le Ciel, au lieu d'être située en arriere, comme elle se trouve dans les personnes à genoux, dont la conformation des os des jambes n'a rien de vicié.

De ces deux Observations on peut tirer ces deux conséquences. Premièrement, la plante des pieds de ce Squelet se trouvant tournée en dessus quand ses jambes sont fléchies & ses cuisses étendues, il étoit très-difficile à cette femme pendant sa vie de se tenir à genoux.

Secondement, cette femme ayant été obligée de tenir ses cuisses aussi fléchies en marchant qu'étant assise, il est évident que sa hauteur demeurait la même dans ces deux situations. Mais s'appuyant sur ses genoux ses cuisses éten-

duës & ses jambes fléchies, elle pouvoit ajouter à sa hauteur ce que le fémur a de plus de longueur que le tibia, ce qui ne va pas à plus d'un pouce, en mesurant l'un & l'autre par une ligne droite; au lieu qu'elle l'auroit augmentée d'environ six pouces si elle avoit pu se tenir à genoux sur la partie convexe des os de ses jambes, ce qui n'étoit peut-être pas impossible; alors elle auroit paru plus grande en gardant cette posture qu'en marchant. C'est ce qu'on remarque en effet par son Squelet en le mettrant dans ces différentes situations.

*Troisième Observation.* L'épine de ce Squelet, dont la courbure est la cause de la difformité de toutes les autres parties de son tronc, imite parfaitement bien par ses différens contours la figure du corps d'un serpent qui rampe sur la terre pour s'avancer en avant. Tous ces contours extraordinaires se font sur les côtes de l'épine; ce qui n'empêche pas cependant les vertebres de former devant & en arriere les mêmes enfoncemens & les mêmes éminences qu'elles ont dans un Squelet dont l'épine n'a rien de difforme.

De la premiere vertebre du cou à la dernière, l'épine est peu sensiblement cavée du côté droit, & convexe du côté gauche; mais depuis la premiere vertebre du dos jusqu'à la dernière, l'épine est fort convexe du côté droit, ce qui fait que de ce côté-là le corps des vertebres est peu éloigné des côtes; mais parce que cette épine est fort concavée du côté gauche, il y a entre les côtes & les vertebres une distance beaucoup plus grande. D'ailleurs la partie antérieure des vertebres du dos est un peu tournée du côté droit.

Au contraire les vertebres des lombes forment par leur assemblage une gibbosité très-grande du côté gauche, & une concavité du côté droit qui lui est proportionnée, & le devant de ces vertebres panche un peu du côté gauche.

Enfin l'os sacrum joint au coxis paroît convexe du côté droit & concave du côté gauche, quoiqu'il garde outre

cela sa figure naturelle qui est d'être creux par devant & gibbe par derrière.

*Quatrième Observation.* Ces differens contours que fait l'épine sur ses côtes, sont cause de ce que la simphise du menton qui répond en ligne droite à celle des os pubis dans un Squelet bien formé, s'en trouve éloignée dans ce Squelet difforme de deux à trois pouces; delà vient que la face paroît un peu tournée sur le côté gauche, & le bassin de la cavité hypogastrique tourné sur le côté droit. Cependant l'extrémité du coxis est directement opposée à la première vertebre du cou; de sorte que malgré la grande obliquité de l'épine, le corps de cette femme ne panchoit point plus d'un côté que de l'autre; ce qui empêchoit qu'il ne parut, étant garni de ses chairs & revêtu de sa peau, aussi contrefait que l'est le tronc de son Squelet.

*Cinquième Observation.* Les vertebres du dos repoussant du côté droit par leur convexité l'extrémité postérieure des côtes supérieures, forment avec elles de ce côté-là une bosse considérable par derrière; delà vient que l'omoplate droit paroît fort relevé. La même convexité de ces vertebres fait aussi que les côtes du même côté décrivent en dedans par leur partie postérieure un arc fort courbé, ce qui rend la capacité de la poitrine beaucoup plus petite du côté droit que du côté gauche.

Mais parceque les mêmes vertebres du dos entraînent avec elles au dedans de leur courbure les côtes gauches qui leur sont articulées, delà vient que l'omoplate gauche paroît de ce côté-ci applati sur le dos, & que les côtes gauches décrivent un arc beaucoup plus ouvert que n'est celui des côtes droites, ce qui rend la capacité gauche de la poitrine beaucoup plus vaste que la droite. C'est encore cette même courbure des vertebres du dos qui est cause que le sternum décrit une ligne un peu oblique sur le devant de la poitrine, au lieu d'y décrire une ligne droite comme il fait ordinairement.

*Sixième Observation.* Comme les vertebres des lombes

forment au contraire une convexité fort grande du côté gauche, & une concavité très-considérable du côté droit; delà vient que l'espace qui se trouve entre les fausses côtes, les os des iles & ces vertebres est beaucoup plus grand du côté droit que du côté gauche; ce qui rendoit la capacité du ventre de cette femme plus petite du côté gauche que du côté droit.

*Septième Observation.* Mais parceque la courbure que forme l'os sacrum avec les coxis est faite dans un sens contraire à celle des vertebres des lombes, l'espace qui se rencontre entre ces os & l'ischium, est par cette raison plus petit du côté droit que du côté gauche.

Par toutes ces observations il est facile de voir que toute la difformité du tronc du Squelet de cette femme ne peut avoir d'autre cause que la courbure des vertebres; mais il est difficile de trouver celles des contours contraires que fait l'épine par le moyen de leur assemblage. Tâchons cependant de la découvrir.

*Huitième Observation.* De ce que les vertebres ont un peu plus d'épaisseur du côté que l'épine est convexe que de son côté concave, il semble d'abord qu'il n'est rien de si aisé que d'expliquer sa courbure par ce plus & moins d'épaisseur; cependant si l'on fait reflexion que cette épaisseur n'est point une cause efficiente, on concevra sans peine que l'épine n'a pû par son moyen se contourner sur ses côtes en sens contraires; ainsi l'on reconnoîtra qu'il est impossible de rendre raison de ses differens contours par ce plus & le moins d'épaisseur des vertebres, & qu'il faut nécessairement avoir recours à la seule contraction des muscles raccourcis de l'épine pour expliquer sa différente courbure; parceque le relâchement de ses muscles allongez, & le plus & le moins d'épaisseur des vertebres ne peuvent être que des effets de ses muscles raccourcis, comme je le ferai voir par la suite de ces Observations.

*Neuvième Observation.* Quand l'épine a sa figure reguliere, & que tous ses muscles agissent ensemble en même tems avec force égale de part & d'autre, ils la fléchissent

seulement en arriere, & ne lui font décrire qu'une seule ligne courbe; de sorte que dans cette disposition des muscles l'épine ne peut pancher d'un côté ni d'autre. Mais s'il arrive que tous les muscles du côté droit entrent en contraction, & que tous ceux du côté gauche tombent dans le relâchement. Alors l'épine se flechit toute entiere du côté droit : le contraire succede quand après cela tous les muscles du côté gauche se contractent, & que ceux du côté droit se relâchent.

Or comme l'ame preside aux mouvemens de tous les muscles de l'épine en faisant couler tantôt dans les uns & tantôt dans les autres les esprits animaux qui les gonflent, il est évident que les nerfs qui donnent passage à ces esprits dans les muscles de l'épine, doivent être tous parfaitement libres & également ouverts de part & d'autre quand ses muscles la fléchissent en arriere, à droit & à gauche alternativement.

*Dixième Observation.* Quand donc l'épine demeure constamment flechie de l'un ou de l'autre côté, il faut necessairement que le cours des esprits animaux dans ses muscles ne soit plus soumis à la direction de l'ame, & qu'une partie de ses nerfs souffre quelque obstruction pendant que l'autre reste libre. Il doit donc couler tout naturellement dans celle-ci plus d'esprits que dans l'autre; donc les muscles de l'épine qui en recoivent une plus grande quantité doivent en se gonflant s'acourcir & tenir toujours l'épine flechie de leur côté.

Par ce système si vrai-semblable il est aisé & de rendre raison de la figure irreguliere de l'épine, & de faire voir que l'extension de ses muscles relâchez, & l'épaisseur des vertebres plus petite d'un côté que de l'autre sont uniquement l'effet de la contraction de ses muscles racourcis. Ce que je vais démontrer.

Comme je n'ay jamais vu d'enfant venir au monde avec une épine contournée, je suppose que cette femme a passé quelque tems de sa vie ayant l'épine à l'ordinaire; mais qu'étant arrivé quelque obstruction dans ses nerfs, ses

muscles se sont plus contractez d'un côté que de l'autre. Or comme depuis cette obstruction l'épine de cette femme a toujours gardé la figure contournée qu'on remarque dans son Squelet, qu'il n'a point été en son pouvoir de la redresser, il est évident que l'ame n'a pû pousser assez d'esprits dans les muscles étendus de l'épine pour surmonter la résistance de ses muscles raccourcis; parceque les nerfs de ceux-ci ayant toujours resté ouverts, les muscles contractez ont reçu incessamment beaucoup plus d'esprits que ses muscles relâchez, les nerfs de ceux-là étant toujours demeuré fermez. Donc les muscles raccourcis de l'épine la tenant par leur contraction permanente inflexiblement flechie de leur côté, ils ont dû premierement tenir les muscles qui leur sont opposez dans une perpetuelle extension. Secondement ils ont toujours pressé les vertebres moins dures qu'à l'ordinaire les unes contre les autres, & empêché par consequent leur corps de s'étendre du côté de leur raccourcissement, & en les écartant de l'autre leur permettre de s'épaissir davantage du côté des muscles relâchez. Donc l'extension des muscles allongez de l'épine, & l'épaisseur du corps des vertebres plus grande d'un côté que de l'autre, ne peuvent être que l'effet de la contraction de ses muscles raccourcis. La contraction permanente & involontaire de ces muscles est donc l'unique cause efficiente de la courbure extraordinaire de l'épine.

Car il n'y a pas d'apparence que la pesanteur du corps ait pû y avoir part; parceque la pesanteur ne pouvant faire pencher le corps que du côté qu'elle se trouve plus grande, elle n'auroit pû faire décrire à l'épine que d'un côté seulement une seule courbure, & éloigner par consequent la tête de la ligne perpendiculaire qu'elle décrit avec l'os sacrum, les os des iles demeurant immobiles sur les deux jambes,

Or comme l'épine du Squelet de cette femme forme sur ses côtez dans l'étendue de sa longueur quatre lignes courbes toutes opposees les unes aux autres en sens con-



traies, & que le coxis répond cependant en ligne droite à la première vertèbre du cou malgré cette irrégularité, il ne paroît donc nullement vrai-semblable que la pesanteur du corps ait pu causer ces différens contours de l'épine. Il n'en est pas de même de la courbure des os des cuisses & des jambes que je vais examiner.

*Onzième Observation.* Les deux fémurs décrivent chacun presque un demi-cercle, dont la partie convexe est située sur le devant, & la concave sur le derrière de ces os. Mais parceque l'un & l'autre se jettent en dehors, l'espace qui est entr'eux se trouve beaucoup plus grand dans leur milieu qu'entre leurs extrémités.

Le tibia & le péroné de chaque jambe forment la même figure que les deux fémurs ( ce qui est assez mal représenté, à moins que la perspective ne le demande, comme le dessinateur le prétend ) mais avec cette différence que la partie convexe du demi-cercle qu'ils décrivent se porte en dedans, & la concave en dehors ; de sorte que les deux tibia se touchent presque par leur milieu, & qu'ils sont fort écartés l'un de l'autre par leurs extrémités, ce qui fait que les pieds qui n'ont rien de difforme se jettent en dehors. De plus le tibia & le péroné sont aplatis considérablement sur les côtés dans leur partie moyenne, & un peu tortus dans toute leur longueur.

Après avoir décrit la figure irrégulière de ces os, faisons voir à présent que la pesanteur du corps de cette femme jointe à leur peu de solidité, a beaucoup contribué à leur courbure.

*Douzième Observation.* Si l'on fait attention que les pieds de son Squelet posant à plomb sur un plancher, les os des cuisses se trouvent nécessairement fléchis en devant, ce qui fait que ce Squelet paroît assis quoiqu'il soit debout, on concevra aisément qu'il n'y a eu que la seule pesanteur du corps qui ait pu forcer les cuisses de cette femme à demeurer fléchies en marchant. Car l'on ne peut pas dire que pour les tenir en cet état leurs muscles fléchisseurs

soient demeurez dans une perpétuelle contraction comme ceux de l'épine, puisque cette femme ayant pû pendant sa vie se mettre à genoux, il est évident que ces muscles ont dû se relâcher pour donner lieu à leurs antagonistes d'étendre les cuisses, sans quoi il eût été absolument impossible à cette femme de prendre cette posture.

Il y a même bien de l'apparence, chaque fœmur décrivant un arc convexe en devant & concave par derrière, que la contraction des muscles extenseurs des cuisses a toujours été plus forte que celle de leurs flechisseurs, autrement les fœmurs n'auroient pû ainsi se courber.

Mais parceque les jambes se flechissent en arriere, & que leurs os décrivent des arcs semblables à ceux des cuisses tant par leur figure que par la situation de leurs parties, il paroît fort vrai-semblable que la contraction des muscles flechisseurs des jambes a dû être au contraire plus forte que celle de leurs extenseurs.

Cependant il faut bien observer que ni la pesanteur du corps ni la contraction des muscles des cuisses & des jambes n'auroient jamais pû causer la courbure du fœmur, du tibia & du peroné, si ces os eussent eu assez de dureté pour résister à l'impression de ces deux causes, leur peu de solidité a donc contribué en quelque façon à les flechir. Aussi voit-on que ni pesanteur du corps ni la contraction des muscles ne produisent point cet effet quand la résistance de ces os surpasse l'effort de ces deux causes.

Il faut encore remarquer que la pesanteur du corps & la mollesse des os ne peuvent être que des causes occasionnelles de leur courbure, puisqu'il n'y a que la contraction des muscles des cuisses & des jambes plus forte d'une part de l'autre qui ait pû déterminer le fœmur, le tibia & le peroné à se flechir plutôt en arriere qu'en devant.

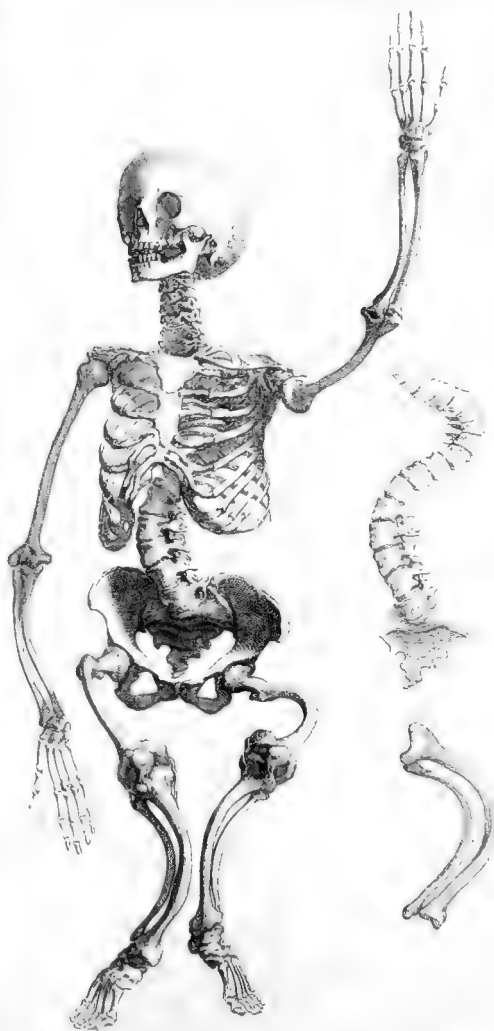
La courbure des os des bras à laquelle il est certain que la pesanteur du corps n'a pû contribuer, est une preuve évidente de cette vérité; d'où je conclus enfin que la contraction des muscles plus forte d'un côté que de l'autre, est l'unique cause efficiente de la courbure des os.

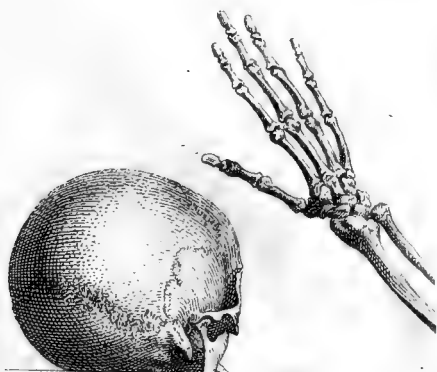
Planche 10.

Mem. de l'a

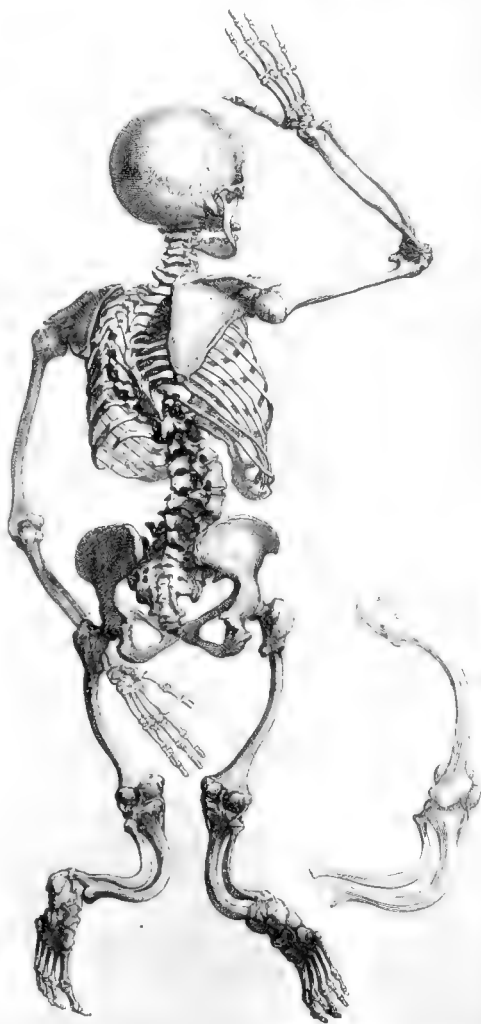


5.  
cm.





5.  
cm.



Je dis que la contraction des muscles doit être plus forte d'une part que de l'autre pour fléchir les os mêmes ; parceque quand les muscles antagonistes d'une partie agissent avec force égale, ils maintiennent les os dans leur figure naturelle, malgré leur mollesse & la pesanteur du corps.

A l'égard de l'applatiffement des os des cuisses & des jambes, comme il ne paroît pas qu'il puisse être rapporté à aucune des causes dont j'ai parlé, il y a lieu de croire qu'il ne peut être que l'effet d'une vicieuse conformation.

## COMPARAISON

*De l'Observation de l'Eclipse de Lune arrivée en Avril 1706, & faite dans l'Isle de S. Domingue en Amerique, avec celle qui a été faite à l'Observatoire royal à Paris.*

PAR M. DE LA HIRE.

**L**E Pere Gouye communiqua à l'Academie Samedi 24 Novem. 1706. dernier une Observation de l'Eclipse de Lune du mois d'Avril de cette année, laquelle avoit été faite au Port de Pei dans l'Isle de S. Domingue en Amerique.

Cette observation porte que la Lune étoit éclipsée de 1 doit  $\frac{1}{2}$  à 7<sup>h</sup> 15' du soir le 27 Avril, & que la fin de l'Eclipse parut à 9<sup>h</sup> 40'. Sa quantité dans le tems de sa plus forte obscuration étoit de 5 doigts  $\frac{1}{2}$ . L'Observateur marque qu'il ne connoissoit pas l'heure dans la dernière exactitude.

Cependant cette Observation ne laissera pas d'être d'une assez grande utilité, puisque nous n'en avons point qui ait été faite dans ces quartiers dont nous en puissions conclure la longitude.

Comme le commencement de cette Eclipsen'a pû être observé à Paris, nous ne pouvons rien dire de l'Observation de 1 doit  $\frac{1}{2}$  ; mais pour la fin nous l'avons très-bien observée le 28 Avril au matin à 3<sup>h</sup> 4' 30", & au Port de Pei on l'a vûe le 27 au soir à 9<sup>h</sup> 40' : donc la différence de lon-

1706.

P p p

gitude entre l'Observatoire Royal & le Port de Pei sera de  $5^h 24' 30''$ , ou bien  $81^{\circ} 7' \frac{1}{2}$ , dont ce lieu de l'Isle de S. Domingue est plus occidental que Paris.

La quantité de cette Eclipsé dans le tems de la plus grande obscuration a été observée ici de 5 doigts  $40'$ , & au Port de Pei de 5 doigts  $30'$ , ce qui n'est que fort peu éloigné pour une Observation qui n'a pas été faite avec tous les instrumens nécessaires pour une grande justesse, & elle peut nous persuader de la bonté des précédentes.

Enfin je remarquerai que la plupart des Cartes que nous estimons les plus correctes, posent ce lieu de S. Domingue moins éloigné de Paris qu'il ne paroît par cette Observation, d'environ 6 degrés.

## O B S E R V A T I O N

*De la conjonction de Jupiter avec le cœur du Lion  
arrivée au mois d'Octobre. 1706.*

PAR M. DE LA HIRE.

1706.  
18. Dec.

**J**E ne trouve dans les anciens Memoires d'Astronomie que nous avons entre les mains, que deux Observations de cette conjonction. La premiere fut faite à Athenes l'an 108 de Notre Seigneur le 28 Septembre au matin, comme le rapporte M. Boüillaud au Liv. 7. Chap. 7. de son Astronomie Philolaïque, ce qu'il avoit tiré d'un Manuscrit de la Bibliothèque du Roy.

Cette Observation porte que Jupiter étoit seulement éloigné du cœur du Lion vers le Septentrion de 3 doigts, & M. Boüillaud estimant un doigt de  $2' 30''$ , cet éloignement sera de  $7' 30''$ . Mais il ajoute que le cœur du Lion étoit alors à  $8^{\circ} 40' 54''$  N, & le Pere Riccioli qui rapporte cette même Observation, dit que suivant ses propres Observations des Etoiles fixes, le cœur du Lion devoit être à  $8^{\circ} 51' 57''$  N. La difference qu'il y a entre ces deux posi-



tions de cette Etoile , est seulement de  $2' 3''$  dont le Pere Riccioli la fait plus avancée. M. Bouillaud s'étoit servi du Catalogue des Etoiles de Tycho ; mais le Pere Riccioli avoit beaucoup d'observations sur les Etoiles avec le P. Grimaldi.

Mais par mes Tables je trouve le lieu du cœur du Lion au tems de l'Observation d'Athenes à  $8^{\circ} 53' 54'' \Omega$ , ce qui est  $4'$  plus avancé que M. Bouillaud. La longitude de  $\Psi$  étoit donc alors la même que celle de l'Etoile *Regulus* ou le cœur du Lion à  $8^{\circ} 53' 54'' \Omega$ .

La latitude du cœur du Lion , comme je l'ai déterminée, est de  $27' 6'' B$  ; & la posant invariable, si on l'ajoute aux  $7' 30''$  de la distance *B* de cette étoile à  $\Psi$ , on aura sa latitude de  $34' 36'' B$  dans le tems de l'Observation. Mais M. Bouillaud trouve à propos d'ajouter encore un doit à l'Observation de la distance de  $\Psi$  à *Regulus*, & par conséquent cette latitude seroit de  $37' 6''$  Bor.

La seconde Observation d'une semblable conjonction que M. Bouillaud rapporte aussi dans le 3. Chap. du Liv. 7. de son Astronomie, est de lui-même, en 1623 le 12 Octobre à  $17^h$  à Loudun. Il dit qu'il observa que  $\Psi$  étoit plus avancé en longitude de  $3'$  que le cœur du Lion, & qu'il en étoit éloigné de  $8'$  vers le Septentrion. Il conclut de là la longitude de  $\Psi$  au  $24^{\circ} 40' 6'' \Omega$  avec sa latitude Boreale de  $35'$ . Par les Tables des fixes du Pere Riccioli la longitude de  $\Psi$  sera au  $24^{\circ} 36' 35''$  du  $\Omega$ . M. Bouillaud qui n'avoit que 19 ans alors ne rapporte point de quelle maniere il fit cette observation, ni avec quels instrumens, quoique le Pere Riccioli lui fasse dire que c'étoit avec la Lunette.

Par ma position de *Regulus* je trouve que  $\Psi$  étoit alors au  $24^{\circ} 40' 1'' \Omega$  comme fait M. Bouillaud. Pour la latitude de  $\Psi$  elle auroit été de  $35' 6''$  suivant ma latitude de *Regulus*, & à très-peu près comme M. Bouillaud.

Voici l'observation d'une semblable conjonction de cette Planete que j'ai faite le 17 Octobre 1706 à  $4^h 12' 40''$  du matin. Je mesurai avec le micrometre la distance

entre le cœur du Lion &  $\Psi$  de  $19' 25''$ , étoit vers le Septentrion à l'égard de cette étoile, & de plus il étoit dans la ligne droite qui passe par l'étoile marquée *A* dans Bayer & par le cœur du Lion ; cependant  $\Psi$  me sembloit un peu plus vers l'Occident.

Je trouve par mes Tables que le lieu du cœur du Lion étoit alors au  $25^{\circ} 47' 15'' \Omega$ . Mais par la position que je viens de marquer,  $\Psi$  étoit moins avancé que *Regulus* ou le cœur du Lion selon l'ordre des Signes de  $7' 35''$  ; donc la longitude de  $\Psi$  étoit alors à  $25^{\circ} 39' 40''$  du  $\Omega$ .

Mais aussi la distance de  $\Psi$  à *Regulus* de  $19' 25''$  étant oblique à l'Ecliptique, elle se réduit à  $17' 55''$  par sa position entre les étoiles fixes ; & comme la latitude de *Regulus* est de  $27' 6''$  par mes Tables, on aura la latitude Bor. de  $\Psi$  de  $45' 1''$ .

J'ai calculé par mes Tables le lieu de  $\Psi$  tant en longitude qu'en latitude au tems de mon observation, & j'ay trouvé la longitude à  $25^{\circ} 40' 11''$  : donc la différence n'est que de  $31''$  de degré. Pour la latitude tirée du calcul elle est de  $46' 21''$  Bor. & l'observée  $45' 1'' B$  ; & par conséquent la différence seroit de  $1' 20''$ .

Les différences que je viens de trouver entre mon observation & mon calcul ne sont pas considérables ; mais comme dans la construction de mes Tables Astronomiques je me suis presque toujours servi des observations des passages par le méridien, que j'estime bien plus sûres, bien plus justes & plus déterminantes que toute autre, surtout à cause de tous les avantages que nous avons tant de la part des instrumens & des horloges, que des connaissances nécessaires pour déterminer leur véritable position en longitude & en latitude ; j'ai voulu voir si ces sortes d'observations que j'avois faites aux environs de cette conjonction répondoient à celles dont je m'étois servi, & premièrement pour la position du nœud de  $\Psi$  & pour son mouvement : car c'est dans ce point où je suis beaucoup éloigné de M. Bouillaud, comme je le dirai dans la suite.

Le premier passage de  $\Upsilon$  par le meridien que j'ai pu observer avant qu'il fût arrivé à son nœud ascendant a été en 1705 le 6<sup>e</sup> Mars au soir à  $5^h 56' 51''$ , & sa vraie hauteur meridienne étoit de  $63^{\circ} 50' 25''$ .

Je conclus de cette observation que la longitude de  $\Upsilon$  étoit alors au  $170^{\circ} 25' 10''$  de  $\pi$ , & sa latitude australe de  $12' 55''$ . Mais par le calcul de mes Tables je trouve pour ce même tems la longitude au  $170^{\circ} 23' 45''$  de  $\pi$ , & la latitude australe de  $12' 19''$ . La difference de longitude entre le calcul & l'observation est de  $1' 25''$ , & celle de la latitude de  $36''$ .

Mais le premier passage de  $\Upsilon$  par le meridien que je pus observer ensuite après qu'il eût passé par ce même nœud, fut en 1705 le 27 Aoust au matin à  $9^h 7' 3''$ : sa vraie hauteur meridienne étoit de  $63^{\circ} 9' 48''$ . Il faut toujours entendre dans ces observations que c'est du centre de cette Planete dont je parle.

Je conclus de cette observation que la longitude de  $\Upsilon$  étoit alors à  $200^{\circ} 44' 9''$  du  $\odot$ , & que sa latitude Boreale étoit de  $6' 3''$ . Mais par le calcul de mes Tables sa longitude étoit de  $200^{\circ} 41' 34''$ , & la latitude  $6' 47''$  Bor. La difference de longitude entre le calcul & l'observation est donc de  $2' 35''$ , & celle de la latitude de  $44''$ .

Quoique la difference de latitude entre le calcul & ces deux observations ne soit que d'une demi-minute ou environ, ce qui n'est pas considerable dans ces sortes de positions, je pourrois pourtant le faire convenir en avançant le nœud un peu plus que je n'ai fait; mais mes anciennes observations ni d'autres plus recentes ne s'y feroient pas accordées. Et c'est cela principalement qui m'a fait conjecturer qu'il y avoit dans le mouvement du nœud des Planetes une irrégularité à peu près semblable à celle que nous connoissons dans celui de la Lune, & comme elle m'a paru sensiblement dans Saturne, laquelle demanderoit une prostapherefe particuliere. Mais comme je n'ay pas trouvé que dans  $\Upsilon$  cette irregularité fût assez sensible pour y avoir égard, je me suis contenté de prendre une

position moyenne entre toutes celles qui m'étoient marquées par mes observations. Cette position ou Epoque a été pour l'année 1700 moins avancée que celle de M. Boiïillaud de plus de 2 degrés. Si j'avois posé le nœud de  $\Upsilon$  comme M. Boiïillaud le met, j'aurois trouvé dans les deux observations précédentes une différence de plusieurs minutes entre l'observation & le calcul.

Enfin pour revenir à la conjonction de  $\Upsilon$  avec *Regulus*, j'ai crû qu'il ne suffisoit pas d'avoir montré que mes Tables s'accordoient assez bien avec mon observation dans ce point ; mais qu'il falloit encore en donner des preuves par quelque passage de cette Planete par le meridiem, avec ses vraies hauteurs meridiennes observées dans le même tems. Voici donc celles que j'ai faites lorsqu'il m'a été possible de l'observer ; car je ne puis pas voir  $\Upsilon$  au meridiem, à moins qu'il ne soit éloigné du Soleil d'environ 30 degrés.

Le 20 Septembre de cette année 1706 avant la conjonction de  $\Upsilon$  avec *Regulus*, son centre passa au meridiem à  $9^h 45' 25''$  du matin, & sa vraie hauteur meridiemne étoit de  $56^\circ 23' 31''$ . Je tire de cette observation la longitude de  $\Upsilon$  au  $20^\circ 49' 47''$  du  $\Omega$ , & sa latitude Boreale de  $40' 51''$ . Le calcul de mes Tables me donne pour ce même tems la longitude de cette Planete au  $20^\circ 52' 0''$ , & la latitude Bor. de  $41' 58'$ . La différence de longitude entre l'observée & le calcul est de  $2' 13''$ , & celle de la latitude est de  $1' 7''$ .

Le 14 Octobre suivant, & trois jours avant la conjonction de  $\Upsilon$  à *Regulus*, j'observai le passage du centre de  $\Upsilon$  par le meridiem à  $8^h 35' 16''$  du matin, & sa vraie hauteur meridiemne étoit de  $55^\circ 1' 8''$ . Je conclus de cette observation que la longitude de  $\Upsilon$  étoit alors au  $25^\circ 13' 26''$  du  $\Omega$ , & que sa latitude étoit Boreale de  $45' 33''$ . Le calcul de mes Tables donne sa longitude pour ce tems-là au  $25^\circ 12' 11''$  du  $\Omega$ , & sa latitude Boreale de  $45' 51''$  : donc la différence de longitude entre l'observée & le calcul est de  $1' 15''$ , & celle de latitude de  $18''$ .

Le 18 du même mois & le jour suivant la conjonction de  $\Upsilon$  à *Regulus*, j'observay le passage du centre de  $\Upsilon$  par le meridien à  $8^h 22' 51''$  du matin, & sa vraie hauteur meridienne de  $54^\circ 48' 22''$ , d'où je tire par les regles ordinaires le vrai lieu de  $\Upsilon$  au  $25^\circ 51' 9''$  du  $\Omega$  avec une latitude Boreale de  $45' 47''$ . Mais par le calcul de mes Tables je trouve pour ce même tems le vrai lieu de  $\Upsilon$  au  $25^\circ 51' 12''$  du  $\Omega$  avec une latitude Boreale de  $45' 35''$ : donc la difference de longitude entre l'observation & les Tables  $3''$ , & celle de la latitude de  $12''$ .

Enfin le 27 suivant j'observay encore le passage du centre de  $\Upsilon$  par le meridien à  $7^h 53' 57''$  du matin, & sa vraie hauteur meridienne de  $54^\circ 23' 7''$ . Je conclus de cette observation que  $\Upsilon$  étoit alors au  $27^\circ 12' 21''$  du  $\Omega$ , & que sa latitude étoit Boreale de  $48' 13''$ , & le calcul par mes Tables donne la longitude pour ce même tems de  $27.11' 34''$  du  $\Omega$ , & la latitude Boreale de  $48' 22''$ . La difference de longitude entre l'observation & le calcul sera donc de  $47''$ , & celle de latitude de  $9''$ .

Les observations que je viens de rapporter en dernier lieu, lesquelles sont comparées avec le calcul, font voir la justesse de mes Tables, & l'on ne doit pas s'étonner si dans celles qui sont proches les unes des autres on y trouve des differences qui passent une minute de degré tantôt excedente & tantôt défailante, ce qu'on doit plutôt attribuer à quelque cause particuliere de l'observation ou des instrumens qu'aux Tables, sur tout pour les Planetes superieures qui vont lentement: car il s'y doit trouver une espeece de progression assez uniforme pour un peu de tems, & à peu près telle que la donne le calcul.

Je pourrois rapporter icy plusieurs causes qui empêchent que les observations ne répondent à l'exactitude & aux soins qu'on y apporte; mais il me suffira de dire à present que pour remedier à cet inconvenient, on doit faire un grand nombre de semblables observations entre lesquelles on prend un milieu.

Dans ce que j'ai dit cy-devant je n'ai point comparé

mon calcul avec l'observation de 508, ni avec celle de 1623, sur lesquelles M. Bouïllaud fonde une partie de son système de Jupiter; car il m'a semblé qu'elles ne sçauroient s'accorder exactement entr'elles, ni avec celles que nous faisons presentement. Ces sortes d'observations sont sujettes à des erreurs très-considerables, n'étant faites pour la plupart qu'à la vûe simple & sans aucune détermination positive. On ne laisse pas pourtant de s'en servir autant qu'on le peut: quand elles sont fort éloignées de ces tems-cy, parcequ'elles sont utiles pour déterminer à peu près les mouvemens des corps celestes; mais on ne doit pas s'y assujettir par trop, quand elles repugnent aux dernieres qu'on connoît pour très-exactes.

Par exemple, mes Tables me donnent dans le tems de l'observation d'Athenes le lieu de  $\varphi$  plus avancé que l'observation ne demanderoit de près de 8', & la latitude seulement plus petite de trois quarts de minute. Mais pour celles de M. Bouïllaud de 1623, elles me donnent la longitude un peu plus de 10' plus avancée que l'observation, & la latitude plus grande de plus de 10', & dans tous ces tems-cy elles s'accordent avec le Ciel.

C'est cette latitude plus grande de 10' qui me rend suspecte l'observation de M. Bouïllaud; car mes Tables donnent la latitude dans la même minute que l'observée en 508, & depuis ce tems-là jusqu'à l'observation de M. Bouïllaud en 1624 il y a plus de 1100 ans, pendant lesquels le nœud de  $\varphi$  n'a fait que 2 ou 3 degrés, & en 508 au tems de l'observation l'argument de latitude n'étoit que de 27° environ; donc en 1623 l'orbite  $\varphi$  n'avoit pas changé considerablement de sa premiere place, & dans le tems de cette observation  $\varphi$  & la terre se trouvoient encore à peu près dans le même aspect: mais comme le cœur du  $\Omega$  s'est avancé en 1100 ans de plus de 15 degrés, il faut necessairement que l'argument de latitude soit augmenté de plus de 13 degrés, ce qui doit donner en 1623 une inclinaison à  $\varphi$  beaucoup plus grande qu'elle n'étoit en 508; & par consequent la latitude de  $\varphi$  devoit être beaucoup plus

plus grande en 1623 qu'en 508 ; cependant l'observation de 508 donne la latitude de  $\varphi$  de  $34^{\circ}36''$  ou  $37^{\circ}6''$  comme veut M. Bouillaud , & son observation de 1623 ne la montre que de  $35^{\circ}6''$  , ce qui ne peut pas être ; aussi je l'ay trouvée par mes Tables de 10' plus grande que celle qu'on tire de cette observation.

Enfin M. Bouillaud finit son septième Livre où il traite des mouvemens de  $\varphi$  par une espece d'insulte qu'il fait à Kepler , en donnant le calcul de  $\varphi$  pour le tems de l'observation de l'an 508 par les Tables Rudolphines pour faire voir que ces Tables sont fort défectueuses pour cette Planete ; car il dit qu'elles marquent la distance de  $\varphi$  à Regulus de plus d'un degré à cause de la latitude , & la longitude par ce même calcul étoit plus grande que l'observée de près de  $48'$ . Mais je remarque que le peu de difference de latitude entre Regulus &  $\varphi$  , n'a pas pû augmenter la distance de  $48'$  à plus d'un degré. Il conclut enfin que Kepler n'a pas pû mieux faire ayant été privé de ce secours , c'est-à-dire des deux observations dont il parle.

Cependant comme je suis persuadé de l'exactitude de Kepler , & que s'il n'a pas eu les deux observations de M. Bouillaud , il en a eu d'autres & plus anciennes & dans le même tems à peu près que celle de 1623 , j'entens celles de Tycho que j'estime des plus justes , & dont M. Bouillaud a eu aussi quelque connoissance ; & quoique je sçusse bien que mes Tables étoient assez éloignées des Rudolphines en quelques endroits , j'ay voulu verifier le calcul que M. Bouillaud rapporte tout au long de la position de  $\varphi$  dans le tems de l'observation de 508 suivant les Rudolphines.

J'ay trouvé tout d'abord que le calcul de M. Bouillaud est faux , car il trouve le Soleil moins avancé d'un degré qu'il ne devrait être par ces Tables , ce qui est une erreur assez considerable , & ce qui vient assurément de ce que M. Bouillaud en calculant n'a pas fait attention que l'année 508 étoit Bissextile , & il l'a calculée comme une année comme , car il lui manque le mouvement du Soleil

pour un jour. Il a fait aussi la même faute pour le calcul de  $\varphi$  qu'il rapporte ensuite. Ces deux fautes ensemble lui auroient encore avancé le lieu de  $\varphi$  de 3' environ. Pour la latitude elle est très-peu éloignée de celle qu'on tire de l'observation.

Pour ce qui est de l'observation de M. Bouillaud de 1623, les Tables Rudolphines s'y accordent assez bien en ce qui regarde la longitude, mais pour la latitude elles s'en écartent à peu près autant que je l'ay trouvé par les miennes; d'où je conclus enfin que M. Bouillaud n'avoit pas bien estimé ou mesuré la distance entre Regulus &  $\varphi$ , & que la grande lumière de  $\varphi$  lui faisoit paroître cette distance beaucoup plus petite qu'elle n'étoit en effet; & c'est une raison qu'il rapporte lui-même dans l'examen qu'il fait de quelques observations.

## DIFFERENTES MANIERES INFINIMENT GENERALES

*De trouver les Rayons osculateurs de toutes sortes de Courbes, soit qu'on regarde ces Courbes sous la forme de Polygones, ou non.*

PAR M. VARIGNON.

1706.  
18. Decem.  
Voyez cy-  
dessus la pa-  
ge 178.

**L**A manière dont j'ay cherché le rapport des Forces centrales aux Pesanteurs des corps dans le Memoire que je donnay sur cela à l'Academie le 24 Avril dernier \*, n'ayant engagé (excepté dans la troisième Solution du Problème par où ce Memoire commence) à considerer les Courbes, non à l'ordinaire sous la forme de Polygones infiniti-latères réctilignes, mais comme faites d'elemens veritablement courbes eux-mêmes; je fus obligé d'en chercher les rayons osculateurs dans cette hypothèse, dans laquelle je ne sçais personne qui l'ait encore fait. C'est ce



qui m'a fait penser à les y rechercher en général ; & cette considération des Courbes comme faites d'éléments véritablement courbes eux-mêmes , m'a donné des expressions de ces rayons osculateurs , lesquelles se sont trouvées précisément les mêmes que celles que la considération de ces mêmes Courbes sous la forme de Polygones infinitésimales rectilignes m'avoit déjà données dans les Memoires de 1701. pag. 25. &c.

Voici comment ces expressions me sont venues dans la première de ces considérations ou hypothèses ; & puis nous verrons encore quelques autres manières de les trouver dans la seconde par des voies toutes différentes de celle que j'ay suivie dans ces Memoires de 1701.

### PROBLÈME I.

*Une Courbe quelconque , dont les ordonnées concourent en quelque point que ce soit , étant donnée ; trouver une expression générale de ses rayons osculateurs sans y rien supposer de constant , & en regardant cette Courbe , non à l'ordinaire sous la forme de Polygone infinitésimal rectiligne ; mais comme faite d'éléments courbes eux-mêmes.*

### SOLUTION.

I. Soit  $DBY$  la Courbe quelconque donnée ; dont les ordonnées  $BE$ ,  $CE$ , &c. concourent en  $E$  ; & dont  $AB$ ,  $BC$ , soient deux éléments, c'est-à-dire, deux arcs infiniment petits du premier genre, lesquels ne diffèrent entr'eux que d'une grandeur infiniment petite du second genre, & par conséquent nulle par rapport à eux. Soient aussi  $AB$ ,  $BC$ , les cordes de ces deux petits arcs, dont la première prolongée vers  $R$ , rencontre en  $S$  l'ordonnée  $EC$  prolongée de ce côté-là. Soient de plus l'angle  $SBP = SEB$  ; l'arc  $CI$  décrit du centre  $B$  par  $C$ , & qui rencontre la droite  $BP$  en  $I$  ; la droite  $CM$  perpendiculaire en  $N$  sur  $BP$ , laquelle  $BP$  soit aussi rencontrée en  $L$  par  $KL$  parallèle à  $ES$ . Soient ensuite  $BV$ ,  $CV$ , deux rayons osculateurs de la Courbe en question, laquelle Courbe

Fig 12

Qqq ij

$DBY$  soit touchée au point  $B$  par la droite  $ZQ$  exactement perpendiculaire au premier  $BV$  de ces rayons, & qui rencontre le second  $VC$  prolongé en  $F$ , l'ordonnée  $EC$  prolongée en  $Q$ , & la droite  $CM$  en  $X$ . Enfin après avoir fait la droite  $CO$  perpendiculaire en  $O$  sur la tangente  $ZQ$ , soient aussi les droites  $AG, BH, CT$ , perpendiculaires en  $G, H, T$ , sur  $BE, CE, LK$ , laquelle  $LK$  rencontre en  $K$  la seconde  $BH$  de ces perpendiculaires.

Cela fait, soit  $y$  le nom des ordonnées  $BE, CE$ ;  $dx$ , celui de leurs perpendiculaires  $AG, BH$ ;  $ds$ , celui des arcs élémentaires  $AB, BC$ ; &  $r$ , celui des rayons osculateurs  $BV, CV$ .

II. Tout cela supposé, les angles rectilignes  $ABE, BPE$ , étant externes par rapport aux triangles  $EB S, BPS$ , l'on aura l'angle rectiligne  $ABE = BES + BSE$  (*art. 1.*)  $= PBS + BSE = BPE$ . Donc les angles en  $G$  & en  $H$ , étant (*art. 1.*) droits, les triangles rectilignes  $ABG$  &  $BPH$  seront semblables entr'eux; & par conséquent (*art. 1.*) les triangles rectilignes  $ABG, BLK$ , le seront aussi: De sorte que si l'on suppose de plus  $BK = AG$ , ces deux derniers triangles seront non-seulement semblables, mais aussi égaux en tout. Donc la corde  $AB$  ou son arc infiniment petit  $AB(ds) = BL = BI(ds) + IL$ ; & par conséquent  $IL = -dds$  négative, les  $ds$  ( $AB$ ) allant ici en diminuant pendant que les  $dx$  ( $AG$ ) vont en augmentant: Ce qui donnera au contraire  $HK = ddx$  positive. D'où l'on aura aussi  $BH(dx) : BP(ds) :: HK(ddx) : LP = \frac{dsddx}{dx}$ . Donc  $IP(IL + IP) = -dds + \frac{dsddx}{dx}$ , ou  $NP = \frac{dsddx - dxdds}{dx}$ .

Mais la ressemblance (*art. 1.*) des triangles rectilignes  $PNC, PHB$ , donne  $PH$  ou  $CH(dy) : BH(dx) :: NP$  ( $\frac{dsddx - dxdds}{dx}$ ).  $NC = \frac{dsddx - dxdds}{dy}$ . De même la ressemblance (*art. 1.*) des triangles rectilignes  $BEH, MBN$ , donne aussi  $BE(y) : BH(dx) :: BM(ds) : MN = \frac{dxds}{y}$ . Donc la droite  $MC(MN + NC) =$

$$= \frac{dx dx}{y} + \frac{ds dx - dx ds}{dy} = \frac{dy dx ds + y ds dx - y dx ds}{y dy}.$$

III. Concevons présentement que l'*osculum* ou l'attouchement de la Courbe proposée *DBT* avec son cercle osculateur décrit du centre *V* par *B*, se fasse ( en tout ou en partie ) sur l'arc infiniment petit *ABC*. En ce cas cet arc *ABC* de la Courbe proposée *DBT*, sera aussi un arc de cercle décrit du centre *V* & du rayon *VB* ou *VC*. Donc suivant la doctrine d'Euclide Prop. 32. du Liv. 3. & Prop. 33. du Liv. 6. les angles réctilignes *ABZ*, *CBQ*, compris entre sa touchante *ZQ*, & les cordes des arcs partiels *AB*, *BC*, seront entr'eux comme ces arcs. Par conséquent ces arcs, qui ( *art. 1.* ) ne diffèrent entr'eux que d'une difference infiniment petite par rapport à eux, devant passer pour égaux, les angles réctilignes *ABC*, *CBQ*, doivent passer de même pour égaux entr'eux. Mais l'angle réctiligne *ABZ* est aussi égal à l'angle *SBQ* qui lui est opposé au sommet *B*. Donc les deux angles réctilignes *CBQ*, *SBQ*, sont pareillement égaux entr'eux. Par conséquent encore suivant la doctrine d'Euclide Prop. 3. du Liv. 6. *BQ* doit diviser la droite *CM* en *X* de maniere qu'elle donne *CX*. *XM* :: *BC*. *BM*. en prenant ici *BC* pour la corde de l'arc. *BC*. Mais l'angle indéfiniment petit *CBM*, compris entre cette corde & l'autre *AB* prolongée vers *R*, rend cette premiere corde *BC* égale à *BM*. Donc aussi *CX* = *XM*, ou *CX* =  $\frac{1}{2}$  *CM*. Mais on vient de trouver ( *art. 2.* )  $CM = \frac{dx dy ds + y ds dx - y dx ds}{y dy}$ . Donc

$$\text{on aura pareillement } CX = \frac{dx dy ds + y ds dx - y dx ds}{2 y dy}.$$

Or si l'on considère que les angles ( *art. 1.* ) droits *BNG*, *BOC*, *QBV*, rendant les triangles *BNX*, *COX*, & *FOC*, *FBV*, semblables entr'eux deux à deux, il en doit résulter *CX*. *CO* :: *BX*. *BN*. Et *CO*. *CF* :: *VB*. *VF*. On verra que les angles ( *art. 1.* ) infiniment petits *NBX*, & *BVF*, rendant aussi *BX* = *BN*, & *VB* = *VF*, il en doit résulter

$$CX = CF. \text{ Donc } CF = \frac{dx dy ds + y ds dx - y dx ds}{2 y dy}.$$

Mais en considerant, ainsi que l'on fait ici, l'arc (d'*osculum*)  $BC$  comme un veritable arc de cercle dont  $V$  est le centre, &  $BF$  la tangente en  $B$ , perpendiculaire au rayon  $BV$ ; la doctrine d'Euclide (*Prop. 36. Liv. 3.*) donne  $\overline{BF} = CF \times \overline{FV} + \overline{CV}$ : De sorte que la supposition de l'angle  $BVF$  (*art. 1.*) infiniment petit, donnant aussi  $\overline{FV} = \overline{CV} = BV$ , & l'arc  $BC = BF$ , ce cas doit donner de même  $\overline{BC} = \overline{BF}^2 = CF \times \overline{FV} + \overline{CV} = CF \times 2 \overline{CV} = 2CF \times BV$ , & conséquemment aussi  $BV = \frac{BC \times BC}{2CF}$ .

Donc en substituant ici la valeur précédente de  $CF$ , avec les noms de  $ds$  & de  $r$ , donnez à l'arc  $BC$  & au rayon  $BV$  dans l'*art. 1.* Cette consideration des élémens  $AB$ ,  $BC$ , de la Courbe proposée  $DBY$ , comme de veritables arcs de son cercle osculateur  $ABC$ , donne enfin  $r = \frac{y dy ds + y ds dx - y dx ds}{dx ds}$  pour l'explication générale du rayon de ce cercle, ou de la Développée de cette Courbe, sans y rien supposer de constant : & cette expression est précisément la même que la premiere des infiniment générales que j'ai tirée dans les Memoires de 1701. pag. 26. de la consideration de cette même Courbe  $DBY$  sous la forme de Polygone infinitésimale, dont les côtes infiniment petits  $AB$ ,  $BC$ , étoient regardés comme de petites lignes droites. *Ce qu'il falloit trouver.*

## AUTRE SOLUTION.

FIG II.

IV. Au lieu de  $BP$ ,  $LK$ ,  $CM$ ,  $CI$ ,  $CO$ ,  $CT$ , soient  $ET$ ,  $Et$ , perpendiculaires sur  $EB$ ,  $EC$ , & qui rencontrent en  $T$ ,  $O$ ,  $t$ , les cordes  $BA$ ,  $CB$ , prolongées de ce côté-là. Du point  $O$  soit  $OM$  perpendiculaire en  $M$  sur  $Bt$ . Soit de plus du centre  $E$  par  $T$  l'arc  $TK$  qui rencontre en  $K$  la souscangente  $Et$ , sur laquelle tombe aussi  $TL$  perpendiculaire en  $L$ .

V. Tout le reste demeurant le même que dans l'*art. 1.* la construction qui rend (*art. 4.*) les triangles rectilignes rectangles  $BGA$ ,  $BET$ , &  $BHE$ ,  $TLE$ , semblables en-

tr'eux, donnera  $BG(dy)$ .  $AG(dx) :: BE(y)$ .  $TE = \frac{y dx}{dy} :: BH(dx)$ .  $TL = \frac{dx^2}{dy}$ . La même construction rendant aussi (*art. 4.*) les triangles rectilignes rectangles  $SEO$ ,  $TLO$ , semblables entr'eux, donnera pareillement  $SE$  ou  $CE(y)$ .  $EO$  ou  $ET(\frac{y dx}{dy}) :: TL(\frac{dx^2}{dy})$ .  $LO$  ou  $KO = \frac{dx^2}{dy^2}$ . Or si l'on prend la difference de la soufsecante  $ET(\frac{y dx}{dy})$  sans y rien supposer de constant, il vient  $Et - ET$  ou  $Kt = \frac{dx dy^2 + y dy dx - y^2 dx dy}{dy^2}$ . Donc  $Ot = \frac{dx^2 + dx dy + y dy dx - y dx dy}{dy^2}$  (à cause de  $dx^2 + dy^2 = ds^2$ )  $= \frac{dx ds + y dy dx - y dx dy}{dy}$ . De sorte que la construction rendant (*art. 4.*) les triangles rectilignes rectangles  $CHB$ ,  $CEt$ ,  $OMt$ , semblables entr'eux, l'on aura aussi  $CB(ds)$ .  $CH(dy) :: Ot(\frac{dx ds + y dy dx - y dx dy}{dy^2})$ .  $OM = \frac{dx ds + y dy dx - y dx dy}{dy ds}$ . Ajoutez à cela que les triangles rectilignes semblables  $BGA$ ,  $BET$ , donnent pareillement  $BG(dy)$ .  $BA(ds) :: BE(y)$ .  $BT$  ou  $BO = \frac{y ds}{dy}$ . Donc l'angle  $OBM$  étant égal à la moitié de l'arc (d'*osculum*)  $ABC$ , ou (*art. 1.*) à l'arc entier  $BC$ , lequel est aussi égal à l'angle  $BVC$ ; les triangles rectilignes  $OMB$ ,  $FBV$ , (*hyp.*) rectangles en  $M$ ,  $B$ , donneront enfin  $OM(\frac{dx ds + y dy dx - y dx dy}{dy ds})$ .  $MB$  ou  $BO(\frac{y ds}{dy}) :: BF$  ou  $BC(ds)$ .  $BV(r) = \frac{y ds}{ds}$ . Et cette expression des rayons osculateurs, résultante de la considération de la courbure des élémens de la Courbe proposée sans y rien supposer de constant, est encore la même que la troisième des infinitésimales générales des Mémoires de 1701. pag. 27. tirées de la considération de ces mêmes élémens regardez comme autant de petites lignes droites ou de côtes infiniment petits du Polygone infinitésimal rectiligne sous la forme duquel cette Courbe étoit regardée. Ce qu'il falloit encore trouver.

## TROISIE'ME SOLUTION.

Fig III. VI. Soit encore  $DBY$  une Courbe quelconque dont les ordonnées  $BE$ ,  $CE$ , &c. concourent en  $E$ ; & dont les arcs  $AB$ ,  $BC$ , soient encore deux élémens ou infiniment petits du premier genre. Soient de plus  $BT$ ,  $Ct$ , deux tangentes de ces arcs en leur extrémité  $B$ ,  $C$ , dont la première prolongée en  $S$ . Après avoir fait les droites  $ET$ ,  $Et$ , perpendiculaires aux ordonnées  $BE$ ,  $CE$ , & qui rencontrent les tangentes  $BT$ ,  $Ct$ , en  $T$ ,  $O$ ,  $t$ ; soient les droites  $TL$ ,  $OM$ , perpendiculaires en  $L$ ,  $M$ , à  $Et$ ,  $Ct$ ; soient aussi des centres  $E$ ,  $N$ , les arcs circulaires  $TK$ ,  $OP$ . Soient enfin les droites  $AG$ ,  $BH$ , perpendiculaires sur  $BE$ ,  $CE$ , & qui prolongées rencontrent en  $F$ ,  $Q$ , les tangentes  $BT$ ,  $Ct$ .

Cela fait, soit encore  $y$  le nom des ordonnées  $BE$ ,  $CE$ ;  $dx$ , celui de leurs perpendiculaires  $AG$ ,  $BH$ ;  $ds$ , celui des arcs élémentaires  $AB$ ,  $BC$ ; &  $r$ , celui des rayons osculateurs  $BV$ ,  $CV$ .

VII. Tout cela supposé, & procédant à peu près comme dans la Solution 2. les triangles rectilignés (*constr.*) semblables  $BGF$ ,  $BET$ , &  $BHE$ ,  $TLE$ , donneront  $BG$  ( $dy$ ).  $FG$  ou  $AG$  ( $dx$ ) ::  $BE$  ( $y$ ).  $TE = \frac{y dx}{dy}$  ::  $BH$  ( $dx$ ).  $TL = \frac{dx}{dy}$ . Pareillement les triangles rectilignés (*constr.*) semblables  $SEO$ ,  $TLO$ , donneront aussi  $SE$ , ou  $CE$  ( $y$ ).  $EO$  ou  $ET$  ( $\frac{y dx}{dy}$ ) ::  $TL$  ( $\frac{dx}{dy}$ ).  $LO$  ou  $KO = \frac{dx^2}{dy}$ . Or en prenant la différence de la soultangente  $ET$  ( $\frac{y dx^2}{dy}$ ) sans y rien supposer de constant, on la trouve être  $ET - ET$  ou  $Kt = \frac{dx dy^2 + y dy ddx - y dx dy}{dy^2}$ . Donc  $Ot = \frac{dx^2 + dx dy^2 + y dy ddx - y dx dy}{dy^2}$ . (à cause de  $dx^2 + dy^2 = ds^2$ ) =  $\frac{dx dy^2 + y dy ddx - y dx dy}{dy^2}$ . Donc aussi les triangles rectilignés (*constr.*) semblables  $CHQ$ ,  $QMt$ , donneront  $CQ$  ou  $CB$  ( $ds$ ).  $CH$  ( $dy$ ) ::  $Ot$  ( $dx$ )

$$\left( \frac{d}{dy} : r' - \gamma \right). OM \text{ ou } OP = \frac{dx ds^2 + y dy dx - y dx dy}{dy ds}.$$

De plus les triangles rectilignes (*constr.*) semblables  $BGF$ ,  $BET$ , donnent pareillement  $BG (dy)$ .  $BF$  ou  $BA (ds) : :$

$BE (\gamma)$ .  $BT$  ou  $NO = \frac{\gamma ds}{dy}$ . De plus encore le quadrilatère rectiligne  $VBNC$  ayant les angles droits en  $B, C$ , l'angle  $BNC$  avec l'angle  $V$  en doit valoir deux droits de même qu'avec l'angle  $ONP$  : Ainsi ce dernier angle  $ONP$  doit être égal à l'angle  $V$ , & le secteur  $NOP$  être sembla-

ble au secteur  $VBC$ . Donc enfin  $OP \left( \frac{dx ds^2 + dy dx - y dx dx}{dy ds} \right)$ .

$ON \left( \frac{\gamma ds}{dy} \right) : : BC (ds)$ .  $BV (r) = \frac{\gamma ds^2}{dx ds^2 + y dy dx - y dx dy}$ . Ce qui est la même expression des rayons osculateurs que celle qui vient d'être trouvée dans la précédente Solution 2.

*Voilà de quelle maniere ces expressions infiniment générales se peuvent trouver, sans considerer les Courbes sous aucune forme de Polygones rectilignes. Voici presentement plusieurs autres manieres de les trouver encore en considerant les Courbes sous cette forme de Polygones infiniti-lateres rectilignes, dont quelques-unes m'ont été inspirées par l'Analyse des Infiniment petits.*

## PROBLÈME II.

*Une Courbe quelconque, dont les ordonnées concourent en quelque point que ce soit, étant encore donnée, trouver encore une expression générale de ses rayons osculateurs sans y rien supposer de constant; mais en regardant presentement cette Courbe comme un Polygone infiniti lateres rectiligne.*

### PREMIERE SOLUTION.

VIII. Soit  $DBY$  la Courbe proposée, dont les ordonnées  $BE, CE$ , &c. concourent toutes au point  $E$ . Soient de plus  $BV, CV$ , deux de ses rayons osculateurs infiniment proches l'un de l'autre, lesquels se rencontrent en  $V$ ; soient aussi par leurs extremités  $B, C$ , les tangentes  $BT, Ct$ , faites des petits côtés prolongés  $BA, CB$ , de la

Courbe considérée comme polygone réctiligne infinitesimale, lesquels se joignent en  $B$ . Soient  $ET$ ,  $Et$ , perpendiculaires en  $E$  aux ordonnées  $BE$ ,  $CE$ , de cette Courbe, & qui rencontrent en  $T$ ,  $t$ , les tangentes  $BT$ ,  $Ct$ , qui leur répondent, & dont  $CE$  rencontre encore  $TB$  prolongée en  $S$ . Du centre  $E$  par les points  $A$ :  $B$ ,  $T$ , soient les petits arcs des cercles  $AG$ ,  $BH$ ,  $TK$ , qui rencontrent  $BE$ ,  $CE$ ,  $Et$ , en  $G$ ,  $H$ ,  $K$ . Enfin du centre  $B$  par le point  $O$ , ou  $BT$  rencontre  $Et$ , soit l'arc  $OP$  qui rencontre  $Ct$  en  $P$ .

IX. Cela fait, les angles droits  $VCB$ , ou  $VCt$ , &  $VBT$ , rendant les angles en  $B$ ,  $V$ , des triangles isocelles  $OBP$ ,  $BVC$ , égaux entr'eux, ces triangles seront semblables, de même que le sont les triangles  $SEO$ ,  $TKO$ ;  $BGA$ ,  $BET$ ; & les petits secteurs  $EBH$ ,  $ETK$ . Donc  $OP$ .  $BO$  ou  $Ct$  ::  $BC$ .  $BV = \frac{BC \times Ct}{OP}$ . Et en appelant les ordonnées  $BE$  ou  $CE$ ,  $y$ ;  $BG$  ou  $CH$ ,  $dy$ ;  $AG$  ou  $BH$ ,  $dx$ ; &  $AB$  ou  $BC$ ,  $ds$ ; l'on aura pareillement  $BG$  ( $dy$ ).  $AG$  ( $dx$ ) ::  $BE$  ( $y$ ).  $ET = \frac{y dx}{dy}$  ::  $BH$  ( $dx$ ).  $TK = \frac{dx^2}{dy}$ . Et  $SE$  ou  $GE$  ( $y$ ).  $EO$  ou  $ET = (\frac{y dx}{dy})$  ::  $TK$  ( $\frac{dx^2}{y}$ ).  $KO = \frac{dx^3}{dy^2}$ . Or si l'on prend la difference de  $ET$  ( $\frac{y dx}{dy}$ ) sans y rien supposer de constant, il vient  $Et - ET$  ou  $Kt = \frac{dx dy^2 + y dy dx - y dx dy}{dy^2}$ ; & partant  $OK + Kt$  ou  $Ot = \frac{dx^3 + dx dy^2 + y dy dx - y dx dy}{dy^2}$  (à cause de  $dx^2 + dy^2 = ds^2$ )  $= \frac{dx ds^2 + y dy dx - y dx dy}{dy^2}$

X. De plus les triangles semblables  $CHB$ ,  $GEt$ ,  $OPt$ , donnent  $BC$  ( $ds$ ).  $CH$  ( $dy$ ) ::  $Ct$ .  $CE$  ( $y$ ) ::  $Ot$  ( $\frac{dx ds^2 + y dy dx - y dx dy}{dy^2}$ ).  $OP = \frac{dx ds^2 + y dy dx - y dx dy}{dy ds}$ . D'où résulte aussi  $Ct = \frac{y ds}{dy}$ . Donc en substituant ces valeurs de  $OP$ ,  $Ct$ , avec celle de  $BC$  ( $ds$ ), dans la formule  $BV = \frac{BC \times Ct}{OP}$  trouvée cy-dessus art. 9. l'on aura aussi  $BV = \frac{y ds^2}{dx dy + y dy dx - y dx dy}$  pour l'expression générale cherchée



des rayons osculateurs de toutes sortes de Courbe, laquelle est la même que celle des art. 5. 7. & dans laquelle il n'y a encore rien de constant. *Ce qu'il falloit encore trouver.*

## SECONDE SOLUTION.

XI. Au lieu des tangentes,  $BT, Ct$ , de leurs sôtangent-tes  $ET, Et$ , & des petits arcs  $TK, OP$ , soient du point  $V$  les perpendiculaires  $Vm, VM$ , sur les ordonnées  $BE, CE$ , dont celle-ci  $CE$  soit rencontrée en  $N$  par  $VM$  perpendiculaire sur l'autre  $BE$ , de qui la partie  $MB$  soit appelée  $v$ .

Tout le reste demeurant le même que cy-dessus art. 8. & 9. les triangles semblables  $BHC, BMV$ , donneront  $BH(dx). BC(ds) :: MB(v). BV = \frac{v ds}{dx}$ . Donc  $BV$  étant constante, sa différence  $\frac{dv ds + v ds ds}{dx^2} - v ds ds$  doit

être  $= 0$ . Donc  $v = \frac{dv ds}{ds ds - dx ds}$ . Mais les mêmes triangles semblables  $BHC, BMV$ , donnent aussi  $BH(dx).$

$CH(y) :: MB(v). MV$  ou  $mV = \frac{v dy}{dx}$ . Et à cause de triangles semblables  $BEH, NVm$ , l'on aura de même

$BE(y). mV \left( \frac{v dy}{dx} \right) :: BH(dx). Nm = \frac{v dy}{y}$ . Donc  $dy - \frac{v dy}{y} = CH - Nm = dv$ , à cause que (*hyp.*)  $v = MB =$

$EB = EM$ , c'est-à-dire,  $dv = \frac{y^2 dy - v dy}{y}$ . Donc aussi en substituant cette valeur de  $dv$  dans la précédente équation

$v = \frac{dv ds}{ds ds - dx ds}$ , l'on aura  $y ds ds - y v ds ds = y dy dx ds - y dy dx ds$ ; ce qui donne  $v(MB) = \frac{y ds dy}{y ds ds - y ds ds + dx dy ds}$ .

Mais les triangles semblables  $BHC, BMV$ , donnent encore  $BH(dx) BC(ds) :: MB \left( \frac{y ds dy}{y ds ds - y ds ds + dx dy ds} \right).$

$BV = \frac{y dy ds}{y ds ds - dx ds + dx dy ds}$ . Ce qui est encore une autre expression générales des rayons des Développées de toutes sortes de Courbes, dans laquelle il n'y a encore rien de

constant, & qui est aussi la même que celle de l'art. 3. ci-dessus. Ce qu'il falloit encore trouver; & ce que l'équation  $BV = \frac{v ds}{dx}$  trouvée ci-dessus, auroit aussi donné en y substituant la dernière valeur de  $v$ .

## TROISIÈME SOLUTION.

XII. Toutes demeurant les mêmes que dans l'art. 11. excepté qu'au lieu de  $BM = v$ , on suppose ici le rayon osculateur  $BV = r$  constant. Les triangles semblables  $BHC$ ,  $BMV$ , donneront  $BC (ds)$ .  $BH (dx) :: BV (r)$ .  $BM = \frac{rdx}{ds}$ . Et  $BC (ds)$ .  $CH (dy) :: BV (r)$ .  $MV = \frac{r dy}{ds}$ . De qui la différence est  $MN = \frac{-r ds dy + r dy ds}{ds^2}$  négative à cause que  $BE(y)$  &  $MV (\frac{r dy}{ds})$  croissent alternativement, & qu'on fait ici  $dy$  positif. Donc  $BH - MN (dx - \frac{r dy ds + r ds dy}{ds^2})$ .  $BH (dx) :: BM (\frac{rdx}{ds})$ .  $BE(y)$ . Ce qui donne  $y dx ds^2 - r y dy dds + r y ds dd = r ds dx^2$ ; & par conséquent  $r (BV) = \frac{y dx ds^2}{ds dx^2 + y dy dds - y ds dd}$ . Ce qui est encore une expression générale du rayon osculateur telle qu'on la demande.

## QUATRIÈME SOLUTION.

XIII. Au lieu des droites  $VM$ ,  $Vm$ , soient du point  $E$  les perpendiculaires  $EF$ ,  $Ef$ , sur les rayons osculateurs  $BV$ ,  $CV$ , dont le premier  $BV$  soit rencontré en  $L$  par  $Ef$  perpendiculaire sur le second  $CV$ .

Tout le reste demeurant le même que dans l'art. 11. les triangles semblables  $BHC$ ,  $BFE$ , donneront  $BC (ds)$ .  $BH (dx) :: BE (y)$ .  $BF$  ou  $BL = \frac{y dv}{ds}$ . Et  $BC (ds)$ .  $CH (dy) :: BE (y)$ .  $EL = \frac{y dy}{ds}$ . De qui la différence est  $Lf = \frac{as dy^2 + y ds dd - y dy dds}{ds^2}$ . Donc à cause des triangles semblables

*EVC*, *LVf*, l'on aura aussi *BC*—*Lf* ( $\frac{ds^3 - dsdy^2 - ydsdty + dds}{ds^2}$ ).

$$BC(ds) :: BL \left( \frac{ydx}{ds} \right). BV(r) = \frac{y^2 x ds^2}{ds^3 - dsdy^2 - ydsdty + ydyds}$$

(à cause de  $dx^2 = ds^2 - dy^2$ ) =  $\frac{y^2 x ds^2}{dsdx^2 - ydsdty + ydyds}$ . Ce qui est la même expression générale cherchée que celle de l'art. 12.

## CINQUIÈME SOLUTION.

XIV. Soit encore une Courbe quelconque *DBT*, dont *MB*, *BC*, soient deux des côtés infiniment petits en la Fig. v. considérant encore comme polygone infini latere rectilignes, & dont les ordonnées *BE*, *CE*, &c. concourent toutes au point *E*. De ce centre *E* par les points *A*, *B*, *L*. soient les arcs *AG*, *BH*, *LO*, en prenant aussi *BL* pour infiniment petite du premiere genre. Ensuite après avoir décrit du centre *B* l'arc *AM* qui rencontre *LO* en *R*, & le petit côté *CB* prolongé ou la tangente *BK* en *M*; soit l'angle *KBO* égal à l'angle *CBE*, & dont le côté *BO* rencontre cet arc *AM* en *N*, & *LO* en *O*. Soit de plus *AP* parallele à *BE*, & qui rencontre aussi *LO* en *P*.

Soient enfin appellées *AG* ou *BH*, *dx*; *AB* ou *BC*, *ds*; & *BE* ou *CE*, *y*; ce qui donnera aussi *BG* ou *CH* = *dy* positive en prenant l'origine de tout cela du côté de *D*.

Cela posé, les triangles (*constr.*) semblables *HEB* & *MBN* donneront *EB* (*y*). *BH* (*dx*) :: *BM* ou *BA* (*ds*).

$$MN = \frac{dx ds}{y}. \text{ Pareillement les triangles (constr.) semblables } OLB, ONR, \& APR, \text{ donneront aussi } OL \text{ ou } AG$$

$$(dx). BL \text{ ou } BG(dy) :: ON. NR = \frac{ON \times dy}{dx}. \text{ Et } OL \text{ ou}$$

$$AG(dx). BO \text{ ou } BA(ds) :: AP. AR = \frac{AP \times ds}{dx}. \text{ Donc}$$

$$AM(MN + NR + RA) \frac{dx ds}{y} + \frac{ON \times dy}{dx} + \frac{AP \times ds}{dx} = \frac{ds dx^2 + ON \times dy + AP \times y ds}{y dx}.$$

Or si l'on imagine que *AV*, *BV*, soient deux rayons de la Développée de la Courbe *DBT*, la ressemblance des triangles *BVA*, *MBA*, donnera de plus *AM*

$$\left( \frac{dsdx + ON \times ydy + AP \times yds}{ydxds^2} \right). AB(ds) :: AB(ds). BV =$$

$$= \frac{dsdx^2 + ydy \times ON + yds \times AP}{ydxds^2}.$$

XV. Quant aux valeurs de  $ON$  & de  $AP$ , elles se détermineront en supposant  $BL = CH$ ; car alors (les triangles  $HCB$  &  $LBO$  se trouvant non-seulement semblables, à cause que leurs angles en  $H$  & en  $L$  sont supposés droits & que ceux-ci  $EB O + OBR = EBR = ECB + CEB$  (*hyp.*)  $= FCB + OOB R$ , donnent  $EB O = ECB$ ; mais encore égaux en tout à cause qu'on suppose aussi  $BL = CH$ ) l'on aura  $ON = B = BA = CB - BA = dds$ , &  $AP = BG = BL = BG - CH = -ddy$  négative, à cause que  $dy$  diminuë pendant que tout le reste augmente. Donc en substituant ces valeurs de  $ON$  & de  $AP$  dans la précédente (*art.* 14.) de  $BV$ , l'on aura  $BV = \frac{ydxdsds^2}{dsdx^2 + ydydds - ydsddy}$ . Ce qui est encore une expression générale des rayons osculateurs, dans laquelle il n'y a encore rien de constant, & la même encore que celle des deux Solutions précédentes *art.* 12. & 13.

## REMARQUE.

XVI. Les Memoires de l'Academie de 1701. pag. 25. &c. fournissent encore une sixième Solution de ce Probl. 2. toute aussi générale que les précédentes, ne renfermant (non plus qu'elles) rien de constant. Outre les trois Formules des rayons osculateurs qu'elles & celles du Probl. 1. donnent ces Memoires de 1701. pag. 29. en contiennent encore trois autres tirées de celles-là: les voici encore ici pour n'être pas obligé de recourir à ces Memoires dans l'usage qu'on en fait dans ceux-ci pag. 201. & 218.

Pour cela soit dans les Fig. 4. & 5. l'arc de cercle  $DQ = z$  décrit du centre  $E$  & du rayon  $DE = a$ . Cela fait, on aura  $EQ(a) : EB(y) :: Qq(dz). BH(dx)$ . Ce qui donnant  $dx = \frac{x dz}{a}$ , &  $ddx = \frac{dy dz + y d dz}{a}$ , il n'y aura qu'à substituer ces valeurs de  $dx$  & de  $ddx$  en leurs places dans les trois Formules des rayons osculateurs trouvées dans les

FIG. IV. V.

Solutions précédentes des Probl. 1. & 2. pour avoir les trois autres supposées ci-dessus pag. 201. & 218. Les voici toutes fix pour n'être pas obligé de recourir aux Mémoires de 1701. qu'on y suppose, & dans l'ordre des Formules des forces centrales où l'on s'en est servi, soient encore ces rayons appellés  $r$ .

*Formules infiniment générales des Rayons osculateurs.*

$$1^{\circ}. \quad r = \frac{y dy ds^2}{dx x y ds + y ds dx - y dx ds}$$

$$2^{\circ}. \quad r = \frac{y dx ds^2}{ds dx^2 + y dy ds - y dx dy}$$

$$3^{\circ}. \quad r = \frac{y ds^3}{dx ds^2 + y dy dx - y dx dy}$$

$$4^{\circ}. \quad r = \frac{a dy ds^2}{2 dx dy ds + y ds dx - y dx ds}$$

$$5^{\circ}. \quad r = \frac{a y dx ds^2}{y ds dx^2 + a a dy ds - a ds dy}$$

$$6^{\circ}. \quad r = \frac{a ds^3}{a^2 u^2 + a^2 u y^2 + y a y u - y a^2 a u}$$

Voilà ce que donnent les précédentes Solutions analytiques des Probl. 1. & 2. en voici présentement une autre purement geometrique, laquelle supposant à l'ordinaire les élémens des Courbes & de leurs coordonnées successivement constans, se trouve restreinte à ces conditions comme tout ce que j'ay vû jusqu'ici d'autres Solutions de pareils Problèmes, lesquelles n'ont d'universalité qu'autant qu'elles fournissent de formules générales pour chacune de ces hypothèses, & non aucune qui convienne à toutes à la fois, comme font les formules précédentes, lesquelles on voit pourtant avoir été assez faciles à trouver; mais on ne pense pas à tout.

## PROBLÈME III.

FIG. VI. Soit encore une Courbe quelconque DBY, dont AE, BE, CE, soient trois ordonnées infiniment proches les unes des autres, lesquelles concourent avec toutes les autres au point E, duquel point (comme centre) soient décrits les arcs circulaires AG, BH; soient aussi BV, CV, deux des rayons de sa Développée. De plus après avoir prolongé en R le petit côté AB de cette Courbe considérée sous la forme de polygone infini-latère rectiligne, en sorte que BR en soit une touchante en B, soit fait l'angle RBP égal à l'angle BEA; & du point B (comme centre) l'arc CON qui rencontre la Courbe en C, sa tangente en N, & la droite BP en O, laquelle est aussi rencontrée en P par EC prolongée. Soient enfin faites: QQ & CM parallèles à BH, avec OK & ML parallèles aussi à PH. On demande présentement de trouver par la seule géométrie l'expression générale des rayons osculateurs BV, CV, &c. dans chacune des hypothèses des élémens BC, BH, CH, successivement constants.

## SOLUTION.

XVII. Puisque AER est (hyp) une ligne droite, l'on aura l'angle  $EBR = EAB + BEA = EAB + RBP$ ; & par conséquent l'angle  $EB = EAB$ . Donc en retranchant de part & d'autre les angles droits  $EAG$ ,  $EBH$ , il restera l'angle  $GAB = HBP$ . Ainsi les angles en G, H, K, L, étant (hyp.) droits, aussi-bien que les angles  $CQM$  ou  $COP$ , &  $KOQ$ ; les triangles  $AGB$ ,  $BHP$ ,  $BKO$ ,  $BLM$ ,  $COP$ ,  $CQO$ , &  $MOC$ , seront tous semblables entr'eux. Cela posé.

1°. Si l'on suppose BC constante, c'est-à-dire,  $BC = AB$ , les triangles semblables  $BKO$ ,  $CQO$ , donneront  $OK : (CH). BO (BC) :: OQ (HK). CO = \frac{BC \times HK}{CH}$ . Et  $BK : (EH). BO (BC) :: CQ. CO = \frac{EC \times CQ}{BH}$ .

2°. Si l'on suppose BH constante, c'est-à-dire  $BH = BG$ , la ressemblance des triangles  $BHP$ ,  $COP$ , donnera de même

même  $BP$  ( $BC$ ).  $BH :: CP. CO = \frac{BH \times CP}{BC}$  Et  $HP$  ( $HC$ ).  $BH :: OP. CO = \frac{BH \times OP}{HC}$

3°. Enfin si l'on suppose  $CH$  constante, c'est-à-dire,  $CH = BG$ , la ressemblance des triangles  $BLM$ ,  $MOC$ , donnera aussi de même  $BM$  ( $BC$ ).  $ML$  ( $CH$ ) ::  $MC$  ( $LH$ )  $CO = \frac{CH \times LH}{BC}$ . Et  $BL$  ( $BH$ ).  $ML$  ( $CH$ ) ::  $MO. CO = \frac{CH \times MO}{BH}$ .

XV. III. Donc les triangles (*constr.*) semblables  $CVB$  &  $CBN$ ,  $AEG$  &  $NBO$ , donnant  $BV. BC :: BC. CN = \frac{BC \times BC}{BV}$ . Et  $AE. AG$  ( $BH$ ) ::  $BN$  ( $BC$ ).  $NO = \frac{BC \times BH}{AE}$ . Et par conséquent aussi  $CO$  ( $CN - NO$ ) =  $\frac{BC \times BC}{BV} - \frac{BC \times BH}{AE} = \frac{AE \times BC \times BC - BC \times BH \times BV}{AE \times BV}$ . Si l'on égale successivement cette dernière valeur de  $CO$  à chacune des six qu'on lui vient de trouver dans l'art. 17. l'on aura

Dans l'hypothèse de  $BC$  constante,

$$1^o. \frac{BC \times HK}{CH} = \frac{AE \times BC \times BC - BC \times BH \times BV}{AE \times BV}, \text{ d'où résulte}$$

$$BV = \frac{AE \times BC \times CH}{AE \times HK + BH \times CH}$$

$$2^o. \frac{BC \times CQ}{BH} = \frac{AE \times BC \times BC - BC \times BH \times BV}{AE \times BV}, \text{ d'où résulte}$$

$$BV = \frac{AE \times BC \times BH}{AE \times CQ + BH \times BH}$$

Dans l'hypothèse de  $BH$  constante,

$$3^o. \frac{BH \times CP}{BC} = \frac{AE \times BC \times BC - BC \times BH \times BV}{AE \times BV}, \text{ d'où résulte}$$

$$BV = \frac{AE \times BC \times BC \times BC}{AE \times BH \times CP + BH \times BC \times BC}$$

$$4^o. \frac{BH \times OP}{HC} = \frac{AE \times BC \times BC - BC \times BH \times BV}{AE \times BV}, \text{ d'où résulte}$$

$$BV = \frac{AE \times BC \times BC \times HC}{AE \times BH \times OP + BH \times BC \times HC}$$

Dans l'hypothèse de CH constante,

$$5^{\circ}. \frac{CH \times LH}{BC} = \frac{AE \times BC \times BC - BC \times BH \times BV}{AE \times BV}, \text{ d'où résulte}$$

$$BV = \frac{AE \times BC \times BC \times BC}{AE \times CH \times LH + BH \times BC \times BC}.$$

$$6^{\circ}. \frac{CH \times MO}{BH} = \frac{AE \times BC \times BC - BC \times BH \times BC}{AE \times BV}, \text{ d'où résulte}$$

$$BV = \frac{AE \times BC \times BC \times BH}{AE \times CH \times MO + BC \times BH \times BH}.$$

Telles sont les expressions purement geometriques des rayons osculateurs de toutes sortes de Courbes dans les trois hypothèses précédentes; & c'est tout ce qu'il falloit ici trouver.

### C O R O L L A I R E.

XIX. Voilà en général pour les Courbes dont les ordonnées partent d'un même point E; & par conséquent en regardant ce point comme infiniment éloigné, c'est-à-dire, AE comme infinie, ainsi qu'elle le doit devenir dans les cas des ordonnées paralleles entr'elles, l'art. 18. donnera pour ce cas.

$$1^{\circ}. (\text{ nomb. 1. }) BV = \frac{BC \times CH}{HK}, \text{ \& ( nomb. 2. ) } BV = \frac{BH \times BH}{CQ}, \text{ en supposant BC constante.}$$

$$2^{\circ}. (\text{ nomb. 3. }) BV = \frac{BC \times BC \times BC}{BH \times CP}, \text{ \& ( nomb. 4. ) } BV = \frac{BC \times BC \times HC}{BH \times OP}, \text{ en supposant BH constante.}$$

$$3^{\circ}. (\text{ nomb. 5. }) BV = \frac{BC \times BC \times BC}{CH \times LH}, \text{ \& ( nomb. 6. ) } BV = \frac{BC \times BC \times BH}{CH \times MO}, \text{ en supposant CH constante.}$$

### S C H O L I E.

XX. Ces six dernieres formules pourroient encore se trouver seules par la même synthese que les six générales de l'art. 18. d'où elles se déduisent. Et si l'on vouloit avoir le tout en termes analytiques, il n'y auroit qu'à appeller BV, r; AE ou BE ou CE, y; BG ou CH, dy; AG ou



fig. 2 .

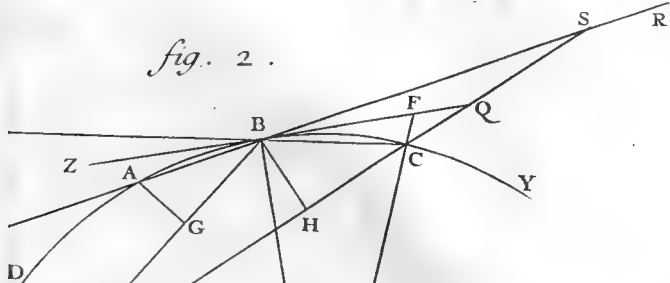


fig. 5 .

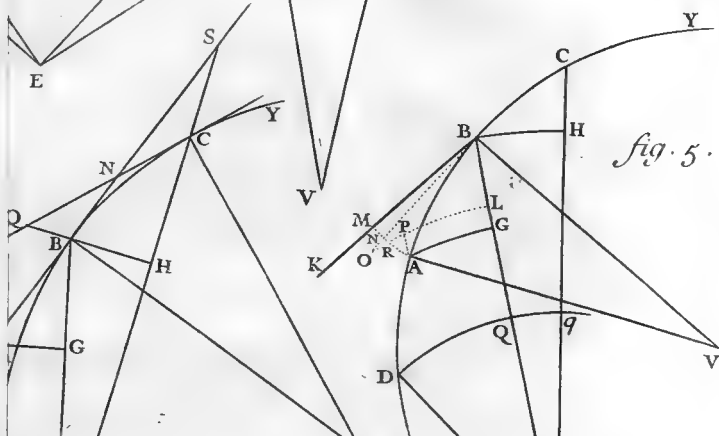


fig. 3 .

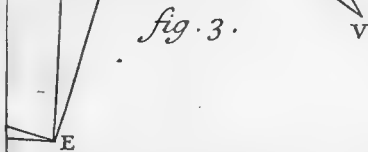
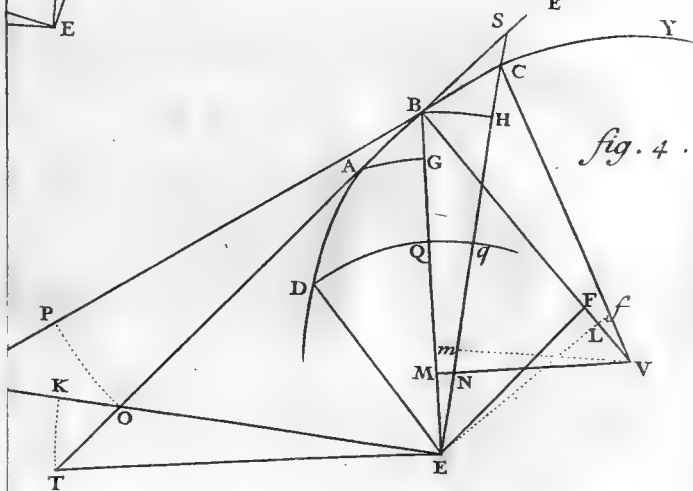
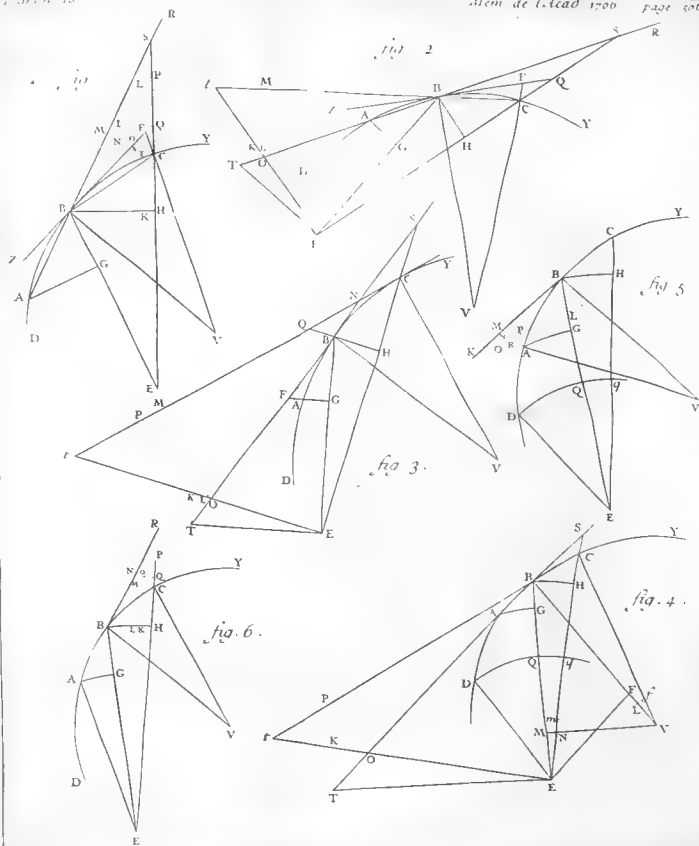


fig. 4 .





$BH, dx$ ; &  $AB$  ou  $BC, ds$ : Ce qui en prenant l'origine de tout cela du côté de  $D$ , donneroit  $QC = -ddy$ ,  $HK = ddx$ , dans le cas de  $BC (ds)$  constante;  $CP = -ddy$ ,  $OP = dds$ , dans le cas de  $BH(dx)$  constante; &  $LH = ddx$ ,  $MO = dds$ , dans le cas de  $CH(dy)$  constante. Et la substitution de tous ces noms dans les formules des art. 18. & 19. les rendroit toutes en termes analytiques, & les mêmes qu'elles resulteroient des infiniment generales trouvées dans les Solutions des Prob. 1. & 2. cy-dessus, en y supposant successivement  $ds, dx, dy$ , constantes, & de plus ensuite  $y$  infinie pour le cas des ordonnées paralleles entr'elles. Tout cela est presentement trop clair pour s'y arrêter davantage.

*Au reste je crois devoir avertir que la Démonstration de l'art. 6. pag. 293. des Mem. de 1704. est de M. (Jean) Bernoulli.*

## ANALYSE CHIMIQUE

### DE L'EPONGE

#### DE LA MOYENNE ESPECE.

PAR M. GEOFFROY.

**L'**Analyse que M<sup>rs</sup> de la Societé Royale de Montpellier ont faite des Plantes nommées *Litophyton*, dont ils ont tiré une quantité assez considerable de sel volatil urineux, m'a fait soupçonner que cette espece de Plante marine ne seroit peut-être pas la seule qui fourniroit du sel volatil urineux. Dans cette pensée j'ay entrepris de travailler sur l'Eponge, qui est la Plante marine que j'ai trouvée le plutôt sous ma main.

Cette Eponge brûlée à la chandelle ou sur les charbons sent la corne ou les cheveux brûlez.

Une livre d'Eponge prise dans un tems humide, après avoir été séchée dans une étuve & séparée autant qu'il

Sff ij

1726.  
22. Dec.

est possible du sable & de la terre qu'elle contenoit , s'est trouvée réduite à onze onces. Ces onze onces de matiere ont été distillées à feu gradué. On a séparé toutes les substances qui sont venues par la distillation , & on a rectifié le sel & l'esprit ; après quoi il s'est trouvé une once quatre gros & demi de phlegme roussâtre, ou d'esprit fort foible qui avoit un peu d'odeur & de saveur , une once & demi d'esprit volatil, urineux une once quatre gros & demi de sel volatil urineux, une demi-once d'huile fetide épaisse, demi-once de sel fixe , qui contenoit outre l'alcali lixiviel un peu de sel marin , & cinq onces de tête-morte, dans laquelle ayant passé le couteau aimanté , il s'est rencontré quelques parcelles de fer.

Le poids de ces matieres rassemblé fait en tout dix onces cinq gros ; par conséquent il y a eu trois gros de perte, tant par la dissipation des esprits , que parce que les vaisseaux retiennent toujours quelque peu des matieres.

Par cette Analyse comparée avec celle que M. Tournefort a faite de la Soye rapportée dans les Memoires de 1700, l'Eponge donne presque autant de sel volatil que la Soye, qui est de toutes les matieres tirées des animaux celle qui en donne le plus. Car quinze onces de Soye ont donné deux onces deux gros de sel volatil concret , & onze onces d'Eponge en ont produit une once quatre gros & demi , ce qui ne fait environ que quatre grains de difference pour once, ce qui est peu de chose.

Il est fait mention dans la Pharmacopée de Bathe de ce sel volatil d'Eponge, sans marquer cependant que cette Plante en fournisse une si grande quantité. L'Auteur de ce Livre recommande fort l'esprit & le sel volatil d'Eponge pour la gravelle, les tumeurs scrophuleuses & les goëtres, & son sel fixe comme un excellent antinephretique.

## OBSERVATION

## ANATOMIQUE.

PAR M. GEOFFROY.

UN homme après avoir été attaqué pendant deux ans d'accès de phrenesie très-violens, mourut d'un abcès au foye. 1706.  
22. Dec.

On trouva à l'ouverture de son corps outre l'abcès du foye qui étoit assez considerable pour contenir les deux points, trente-trois petites pierres dans la vesicule du fiel, dont les unes étoient grosses comme des noyaux de nefe, & les autres à peu près comme des grains d'orge, toutes de figure irreguliere, legeres, friables, inflammables, & qui ne parurent que de la bile épaissie & grumelée.

Après avoir levé le crâne avec peine à cause de la forte adherence de la dure mere, on apperçut cette membrane beaucoup plus épaissie & plus ferme qu'elle ne l'est ordinairement.

Cette partie qu'on nomme la faux à cause de sa figure, étoit ossifiée presque dans toute sa longueur; ou plutôt cette membrane paroissoit revêtuë presque partout de lames osseuses. On pouvoit en quelques endroits les separer aisément de la membrane sans la rompre, en d'autres elles y étoient tellement unies qu'on ne pouvoit les détacher sans la détruire, & en quelques-uns on ne distinguoit point du tout la membrane de la substance osseuse. Ces lames étoient fort inégales & raboteuses, ayant dans quelques endroits deux à trois lignes d'épaisseur.

L'extremité de cette faux osseuse étoit fortement attachée à l'épine ou crête de l'os ethmoïdes, de maniere qu'on ne pût la détacher sans la rompre.

La pie-mere étoit plus épaissie qu'à l'ordinaire, elle avoit presque la même fermeté qu'à coutume d'avoir la dure-

mere dans les autres sujets. On la levoit avec facilité de dessus la substance du cerveau, même dans les anfractuosités, & elle étoit toute parsemée de vaisseaux sanguins fort engorgés de sang.

La substance du cerveau étoit fort desséchée, & beaucoup plus ferme qu'elle ne l'est ordinairement. Ses circonvolutions, qui imitent assez bien celles des menus intestins, y étoient d'autant plus distinctes que les sillons entre ces circonvolutions étoient devenus larges & profonds par le desséchement du cerveau. Nonobstant ce desséchement on a trouvé dans les ventricules une serosité assez abondante.

La substance du cervelet avoit conservé sa consistance naturelle.

Cet homme qui avoit passé sa vie dans des applications continuelles qui demandoient beaucoup de contention d'esprit, avoit fait aussi un fort grand usage du vin & des liqueurs spiritueuses; & c'est à cet usage outré que l'on peut attribuer la principale cause de sa maladie, & du désordre qui s'est trouvé dans la tête & dans le foye.

Le mal que peut faire dans nous l'usage des liqueurs spiritueuses est très-considérable. Ce malade l'avoit éprouvé pendant sa maladie plusieurs fois dans une circonstance particuliere. Car ayant été obligé de lui donner quelques teintures d'Opium pour calmer des insomnies fâcheuses qui accompagnoient ses accès de phrenesie, toutes les fois qu'on lui donnoit les teintures avec l'esprit de vin, non seulement il n'étoit point calmé, mais il tomboit dans des accès encore plus violens, au lieu que les teintures avec l'eau le calmoient & lui donnoient quelques heures de sommeil.

On n'est pas assez persuadé de ce mauvais effet des liqueurs spiritueuses, & même de l'usage immodéré du vin. Prévenu en faveur de ces liqueurs qui flatent très-agréablement le goût, chacun croit prendre des forces & de la vie en les prenant, & on ne s'apperçoit pas qu'elles ne paroissent fortifier qu'en augmentant le ressort des fibres, &

qu'elles l'augmentent quelquefois à un point qu'elles les rendent trop roides & même tout-à-fait osseuses : qu'elles épaississent tous les suc du corps, qu'elles les coagulent quelquefois jusqu'à les convertir en pierre ; & que c'est par-là que ces liqueurs engendrent la goutte, la gravelle, la pierre, & qu'elles causent des vapeurs, des affections convulsives, des rhumatismes, des apoplexies, & des paralyties. Une seule experience peut convaincre de cette verité.

Si on verse sur la sérosité du sang de l'esprit de vin bien rectifié, cette sérosité qui est claire se grumelle aussitôt, & se caille en une masse blanche, qui se durcit peu à peu comme du blanc d'œuf cuit, si on la tient à une legere chaleur de digestion. L'esprit de vin caille la bile de la même maniere. On peut juger delà ce que l'on doit attendre de l'usage immodéré du vin, & encore plus des liqueurs spiritueuses que l'on en tire.

## O B S E R V A T I O N S

*De l'Eclipse de Lune du 21 Octobre 1706 faites à  
Marseille & à Bologne.*

PAR M. MARALDI.

**N**ous avons reçu deux Observations de l'Eclipse de Lune du 21 Octobre dernier, dont nous ne pûmes observer rien de précis à l'Observatoire, à cause que la Lune pendant l'Eclipse étoit dans des nuages, qui ne permettoient pas de voir les taches ni le terme de l'ombre que consulement ; de sorte que nous ne pûmes déterminer les phases avec assez d'évidence.

Une de ces Observations a été faite à Marseille par le P. Laval & par M. Chazelles dans l'Observatoire des PP. Jesuites. Voici ce qu'ils en ont écrit.

On n'esperoit pas d'observer cette Eclipse, le Ciel ayant

1726.  
22. Dec.

été fort couvert l'après-midy du 21 ; mais la pluie ayant cessé sur les six heures du soir , & le vent étant sauté du Sud-Est au Sud-Oüest aux nuages , quoiqu'à la terre il fût toujours Sud-Est , il se fit quelques ouvertures aux nuages qui donnerent lieu d'observer les phases suivantes. Les Lunettes dont on s'est servi sont de trois pieds, ce sont les deux du quart de cercle qui sont excellentes.

A six heures 29' 30" la Lune paroissant entre des nuages étoit déjà éclipsée d'environ deux doigts ; mais on ne pouvoit pas distinguer par quelles taches l'ombre passoit.

A 6<sup>h</sup> 46' 30" la mer Caspie étoignée de l'ombre de la distance de son grand diametre.

A 7<sup>h</sup> 47' 30" la Lune paroissant foiblement à travers des nuages étoit éclipsée de plus de deux tiers ; mais on ne distinguoit pas assez l'ombre de la penombre à cause des nuages.

A 8<sup>h</sup> 2' 0" Copernic touche l'ombre & commence à sortir.

- 4 26 Aristarchus sur le bord de l'ombre.
- 6 21 Copernicus tout dehors.
- 7 0 Petanius sur le bord de l'ombre.
- 9 37 Catharina sur le bord de l'ombre.
- 13 15 Eratosthene hors de l'ombre.
- 15 36 Insula sinus medii hors de l'ombre.
- 18 21 Langrenus sur le bord de l'ombre.
- 20 0 Heraclides hors de l'ombre.
- 21 7 Timocaris hors de l'ombre.
- 21 46 Harpalus hors de l'ombre.
- 24 21 Helicon sort de l'ombre.

Le Ciel étant sercin l'ombre paroissoit bien tranchée lorsqu'on observoit ces taches ; mais des foibles nuages ayant de nouveau couvert la Lune empêcherent de bien distinguer les taches pendant un tems considerable , & furent cause que l'ombre & la penombre étoient confondus.

A 8<sup>h</sup>



A 8<sup>h</sup> 37' 35" Langrenus entièrement sorti, cette tache  
a demeuré long-temps sur le bord de  
l'ombre.

29 2 Possidonius & Teruntius hors de l'ombre.

44 26 La mer Caspie commence à sortir.

47 19 Proclus hors de l'ombre.

50 16 La mer Caspie entièrement hors de l'ombre.

52 16 Fin de l'Eclipse à la Lunete.

Le Ciel étoit serein & l'ombre bien tranchée pendant qu'on observoit ces dernières taches. L'Eclipse a fini entre la mer Caspie & Messala, mais plus près de Messala ; l'horloge avoit été réglée par des hauteurs correspondantes du Soleil, & on connoissoit son état par une suite de hauteurs correspondantes prises depuis le commencement du mois de Septembre.

L'autre Observation a été faite à Bologne dans l'Observatoire de M. le Comte Marigli par M<sup>rs</sup> Manfredi & Scantari. Ils observerent cette Eclipse par deux Lunetes de huit pieds, dont une servoit à marquer l'arrivée de l'ombre aux taches de la Lune, l'autre à marquer la grandeur de l'Eclipse en mesurant par un Micrometre la partie de la Lune qui restoit claire & son diametre apparent.

Ils ne purent pas observer le commencement de l'Eclipse à cause des nuages.

A 7<sup>h</sup> 36' la Lune commence de paroître entre les nuages quand sa partie éclipsée étoit déjà assez grande.

Voici le détail de ce qu'ils observerent comme nous l'avons reçu.

7<sup>h</sup> 43' *Deficiebat paulo plus quàm dimidia.*

7 52 50 *Umbra per Grimaldum, cujus adhuc notabilis pars latet.*

7 56 10 *Pars illuminata in minutis & secundis circuli maximi. II' 30".*

# 514 MEMOIRES DE L' ACADEMIE ROYALE

7<sup>h</sup> 56' 30" *Ricciolus totus exit ab umbra.*

8 2 30 *Pars illuminata 11' 23" : tunc fuit maxima obscuratio.*

8 3 0 *Umbra tangit Fracastorium & transit per Petavium.*

8 5 10 *Pars illuminata. 12' 10".*

8 8 30 *Pars Luna lucida. 12 10.*

8 9 30 *Galileus exit. 1 11.*

8 11 30 *Pars Luna illuminata. 12 21.*

8 16 37 *12 55.*

8 20 30 *13 41.*

8 24 20 *14 16.*

8 25 48 *Aristarchi medium exit.*

8 28 0 *Pars Luna illuminata. 15 34.*

8 29 0 *Umbra per medium Copernici.*

8 31 0 *Totus Copernicus exit.*

8 32 30 *Pars Luna illuminata. 16 43.*

8 38 0 *17 44.*

8 42 15 *Heracrides exit.*

8 44 30 *Pars Luna illuminata. 19 46.*

8 46 0 *Harpalus exit.*

8 47 20 *Dionysius exit.*

8 48 0 *Pars Luna illuminata. 21 17.*

8 49 0 *Manilaus exit.*

8 51 20 *Pars lucida Promontorii acuti exit : pars Luna illuminata. 22 49.*

8 52 55 *Menelaus exit.*

8 53 40 *Plato incipit.*

8 54 30 *Pars Luna illuminata. 23 25.*

8 54 30 *Totus Plato exit.*

8 56 0 *Langrenus totus exit.*

8 57 15 *Plinius exit.*

8 59 2 *Teruntius exit.*

8 59 20 *Pars Luna illuminata. 25 15.*

9 1 55 *Euxodi medium emergit.*

9 2 0 *Pars Luna illuminata. 26 43".*

9 2 30 *Aristotelis medium emergit.*

9 <sup>h</sup>	4' 45"	<i>Possidonii medium emergit.</i>	
9	6 35	<i>Incipit mare Crisum.</i>	
9	6 30	<i>Pars Luna illuminata.</i>	28' 23".
9	6 40	<i>Proclus exit.</i>	
9	10 20	<i>Medium maris Crisum.</i>	
9	10 45	<i>Pars Luna illuminata.</i>	30 25.
9	13 25	<i>Hermes totus emergit.</i>	
9	14 30	<i>Totum mare Crisum.</i>	
	17 55	<i>Finis uno tubo.</i>	
	18 20	<i>Finis altero tubo.</i>	
8	30 0	<i>Diameter Luna fuit.</i>	33 42.
9	18 20	<i>Diameter fuit.</i>	33 50.

## R E F L E X I O N S.

La fin de l'Eclipse fut observée à Marseille à  $8^h 52' 16''$ . Si on ôte de cette Observation 12 minutes pour la différence des meridiens, on aura la fin de l'Eclipse à Paris à  $8^h 40' 16''$  à peu de secondes près de celle qui est marquée dans la Connoissance des Temps.

La fin de l'Eclipse à Bologne a été observée par une Lunete à  $9^h 17' 55''$ , & par l'autre à  $9^h 18' 20''$ . Ayant supposé la différence des meridiens de  $36'$  comme on l'a déterminée, on aura la fin de l'Eclipse à Paris à  $8^h 41' 25''$ , & à  $8^h 45' 50''$  par l'autre; ce qui est à une demie minute près de celle qui est marquée dans la Connoissance des Temps.

La plus grande Phase de l'Eclipse observée arriva à  $8^h 2' 30''$ , quand la partie claire de la Lune étoit de  $11' 23''$ ; & une demie-heure après le diametre apparent de la Lune fut observé de  $23' 42''$ , qui devoit être plus grand de quelques secondes qu'au temps de cette Phase. Negligeant cette petite différence qui ne peut pas être sensible dans la détermination des doits éclipez, la partie éclairée de la Lune étoit de 4 doits  $3'$  de doit, & par conséquent la partie éclipsée étoit alors de 8 doits moins 3 minutes de doit. Cette grandeur de l'Eclipse s'accorde assez

bien à celle qui fut estimée à Marseille vers la même heure. La plus grande Phase observée à Bologne a été 4 minutes après le milieu déterminé par la Connoissance des Tems. Par les Observations de Bologne la grandeur de l'Eclipse a été d'un demi doit plus grande que par la Connoissance des Temps, & par l'Observation de Marseille un peu plus d'un demi doit.

## EXPLICATION DES FIGURES

*du Monstre dont il est parlé à la page 418,  
& aux suivantes.*

**L** A premiere Figure represente ces Enfans couchez sur le dos.

*AA.* La partie du bas ventre commune aux deux Enfans.

*B.* Le nombril.

*CC.* Une espee de coûture legere, par laquelle ces Jumeaux paroissent joints ensemble.

La seconde Figure represente une partie de ces Jumeaux vûs par derriere.

*AA.* Les deux verges qui naissent de l'endroit où devroit être l'Anus de chaque Enfant.

*BBBB.* Deux replis de peau qui representent de chaque côté un Scrotum vuide & applati.

La troisieme Figure represente une partie de ces Enfans couchez l'un sur l'autre, pour faire voir la situation naturelle des Verges, qui au lieu d'être suspendues en devant à l'ordinaire, après avoir pris leur naissance des os pubis qui sont dans ces Enfans placez sur les côtes, viennent s'attacher au ligament qui separe les deux bassins, & qui les suspend en arriere.

*A.* La Verge de l'Enfant qui est dessous dans sa situation naturelle.

*BB.* Son Scrotum.

C. La Verge de l'Enfant de dessus, qu'on a relevée avec son Scrotum, pour mieux faire voir celle de l'Enfant qui est dessous.

La quatrième Figure représente les os des Bassins de ces Jumeaux (qui n'en composent qu'un) vûs de côté un peu en dessus.

*AAAA.* Les os des Iles.

*BBBB.* Les os Ischions.

*CCCC.* Les Pubis.

*DD.* Les os Sacrum.

*EE.* Les Coccyx.

*FF.* Les ligaments qui joignent les os Pubis d'un des Enfans avec ceux de l'autre.

La cinquième Figure représente les mêmes os vûs de front & un peu en dessus.

*AAAA.* Les os des Iles.

*BBBB.* Les os Ischions.

*CCCC.* Les os Pubis.

*DD.* Les os Sacrum.

*EE.* Les Coccyx.

*FF.* Les ligaments qui joignoient les os Pubis d'un des Enfans avec ceux de l'autre.

*GG.* Le ligament en forme de cintre renversé qui séparoit les deux bassins.

*H.* Ligne ponctuée qui marque l'endroit où étoit la couture du bas ventre qui faisoit aussi un cintre, mais dans un sens opposé.

La sixième Figure représente les muscles du bas ventre découverts.

*AAAA.* Les Muscles droits.

*BBBB.* L'endroit où ils commencent à se détourner,

*CCCC.* Leur insertion dans les os Pubis.

*D.* Le nombril au milieu de l'espace qui est entre ces Muscles.

*E.* Les fibres tendineuses, dont la peau étoit fortifiée à l'endroit de la couture.

La septième Figure représente les intestins comme ils

paroissoient en ouvrant le bas ventre.

*AAAAAA.* Les intestins grêles des deux Jumeaux.

*BB.* L'endroit où les intestins nommez Ileons viennent s'ouvrir dans un intestin commun.

*C.* Cet intestin commun qui tient lieu de colon.

*DD.* Deux replis de cet intestin.

*E.* Un des Cœcum du second intestin commun, dont la naissance n'a pû être marquée dans cette Figure.

*F.* L'appendice de ce Cœcum.

*GH.* Une partie de cet intestin qui va sous les intestins grêles de l'un & de l'autre de ces Jumeaux.

*I.* La Vessie.

*LLL.* Les trois Arteres ombilicales.

*M.* L'Ouraque.

*NN.* Les deux Veines ombilicales.

*O.* Le Cordon.

La huitième Figure represente les gros intestins & la Vessie.

*AA.* L'extrémité de l'Ileon de chaque Enfant.

*B.* Le gros intestin commun aux deux Enfants, dans lequel les deux Ileons s'ouvrent, & qui est garni de feuillets en dedans.

*C.* Le Cœcum de cet intestin.

*D.* Son appendice verminiforme.

*EF.* Deux replis de cet intestin.

*G.* L'endroit où cet intestin s'ouvre dans un autre intestin qui n'a point de feuillets.

*H.* Le premier Cœcum de cet intestin, dont le second ne paroît pas, & sera représenté cy-après.

*I.* L'appendice verminiforme de ce Cœcum.

*L.* Le premier replis de cet intestin passant sous les intestins grêles de l'un des Jumeaux.

*M.* Le second replis passant sous les intestins grêles de l'autre Jumeau.

*N.* La portion de cet intestin qui paroît une espece de Rectum.

*O.* Son embouchure dans la Vessie.

*P.* La Vessie.

*QQQQ.* Les Vaisseaux du cordon.

*RRR.* Est la membrane parsemée de Vaisseaux, qui est un prolongement du Mezentere de l'un des enfans, & qui est attachée à l'un des côtez de l'intestin commun.

*SSS.* Est une membrane semblable appartenant à l'autre Jumeau, & qui sert pareillement de Mezocolon.

*TTTT.* La Veine mezenterique superieure.

*VVVV.* La Veine mezenterique inferieure.

On n'a point fait représenter les Arteres pour ne pas trop charger la Figure.

La Figure neuvième représente une portion des gros intestins.

*A.* Est l'extrémité du premier gros intestin qui est commun.

*B.* Son insertion dans un autre gros intestin.

*C C.* Les deux Cœcums.

*DD.* Leurs Appendices.

*E.* Le corps de cet intestin.

La figure dixième représente la Vessie, les Reins, les Ureteres, les Testicules, & leurs Vaisseaux.

*A.* La Vessie double ou jumelle.

*B.* L'embouchure du gros intestin dans cette Vessie.

*CCCC.* Sont les reins de chaque Jumeau.

*DDDD.* Les Arteres & Veines émulgentes coupées.

*EEEE.* Les quatre Ureteres de ces deux Jumeaux.

*FFFF.* Leurs insertions dans les deux côtez de cette Vessie jumelle.

*GG.* Deux des Testicules, dont l'un apparteñoit à l'un des Jumeaux, & l'autre à l'autre, & qui étoient enfermés dans la region de l'aîne.

*HH.* Les deux autres Testicules de ces deux Enfans qui étoient à nud dans la cavité du ventre.

*IIII.* Les Vaisseaux déferents de ces quatre Testicules, dont chaque paire vient s'ouvrir dans un des côtez de la Vessie particuliere à chaque Enfant.

*LL LL.* Les Vessicules seminales.

La Figure onzième représente la Vessie ouverte par l'un des côtez.

*A.* Un des côtez de la Vessie dans son état naturel.

*BB.* Les Ureteres.

*CC.* Les Vaisseaux déferents.

*DD.* Les Vessicules seminales.

*E.* La naissance de l'Urethre.

*F.* La Vessie ouverte de l'autre côté.

*GG.* Les ouvertures des Ureteres dans l'un des côtez de la vessie.

*HH.* Les ouvertures des Canaux déferents.

*I.* L'embouchure de l'Urethre.

Dans toutes les Figures précédentes les parties sont représentées de telle maniere que le bas de la Vessie est en haut ; mais dans les Figures suivantes les parties sont dans un autre point de vûë , & représentées de maniere que la Vessie s'y trouve dans sa situation naturelle.

La douzième Figure représente les deux plans des Fibres charnuës d'un des côtez de la Vessie , dont une partie des longitudinales tire son origine du ligament qui separe les deux bassins , & qui sont marquées *AA.*

La treizième Figure est encore celle de la Vessie ; elle fait voir l'insertion de l'intestin commun dans la Vessie jumelle avec une espece de sac aveugle , & la naissance & le progrès des Urethres.

*A.* L'embouchure de l'intestin commun dans la Vessie.

*B.* Le sac aveugle.

*CC.* L'origine de chaque Urethre.

*DD.* L'endroit où elle se recourbe sous le ligament qui separe les deux bassins.

*EE.* Leurs extrémitéz.

Les autres parties ont été expliquées dans les Figures précédentes.

La quatorzième Figure représente les Muscles particuliers de l'Urethre de ces Enfans.

*A.* L'Urethre vûë par sa partie anterieure.

*BB.* Lignes ponctuées qui représentent les trous ovaires



lares des os innominés d'un des Jumeaux.

CC. La première paire de ces Muscles qui s'implantent dans la partie de l'Urethre qui regarde le Coccyx.

DD. La seconde partie de ces Muscles qui s'implante à la partie antérieure de l'Urethre.

La quinzième Figure représente la Vessie avec les vaisseaux du cordon.

AA. La double Vessie.

BC. Les deux Arteres ombilicales de l'un de ces Jumeaux, dont celle qui est marquée *B* est dans sa situation ordinaire, au lieu que celle qui est marquée *C* passe par dessous la vessie pour se rendre au cordon.

D L'Artere ombilicale de l'autre Jumeau qui n'en a qu'une, & qui toute seule est aussi grosse que les deux autres ensemble.

E. L'Ouraque.

FF. Les deux Veines ombilicales.

G. Le Nombril.

La seizième Figure représente ces enfans comme on peut présumer qu'ils étoient dans la matrice, & la Figure dix-septième les représente dans la situation qui leur auroit été la plus commode après leur naissance. On s'est contenté de représenter seulement par un trait ces deux Figures.

F I N





Fig. 1.

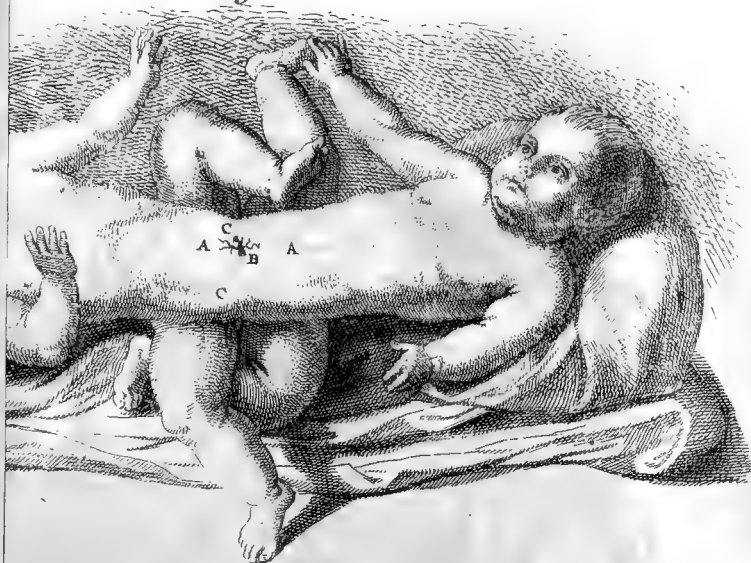
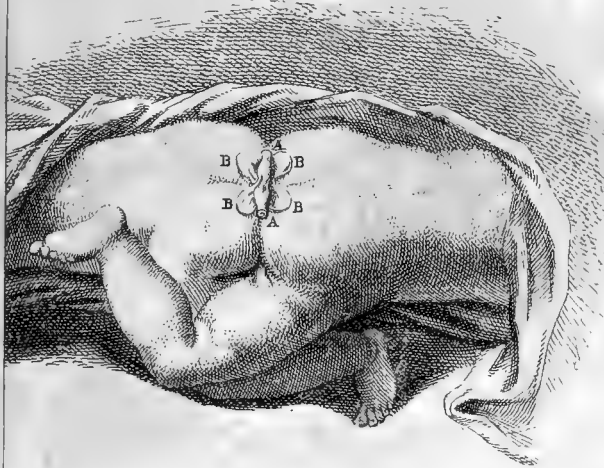


Fig. 2.



*Fig. 1.*



*Fig. 2.*

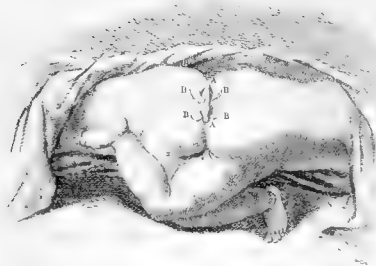


Fig. 3.

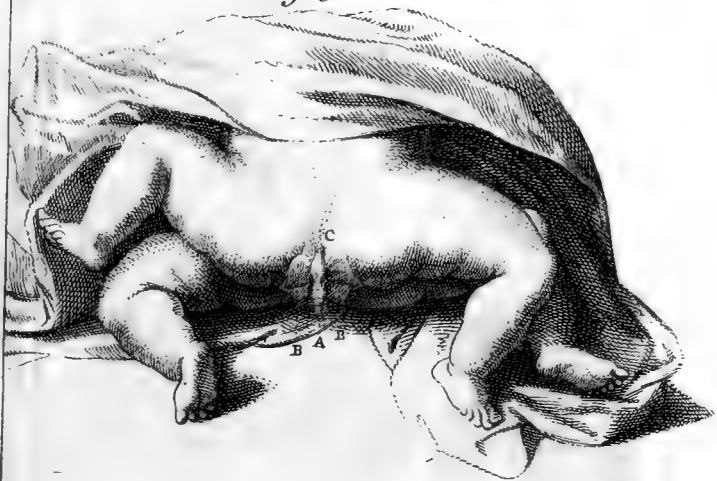


Fig. 4.

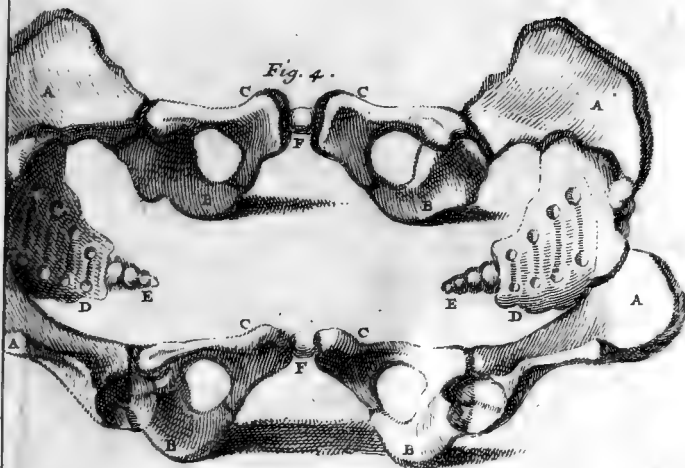
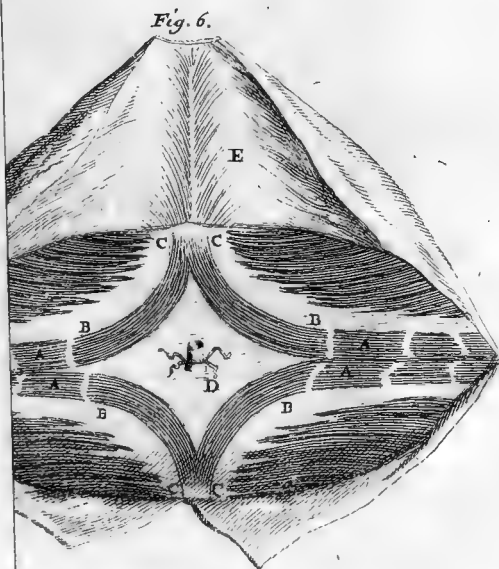
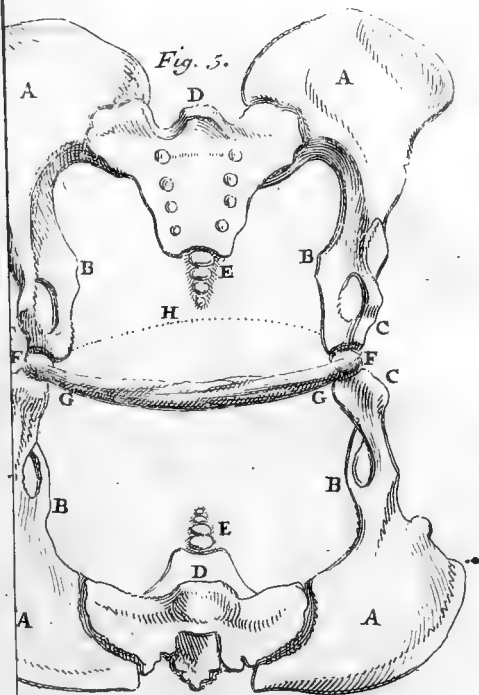


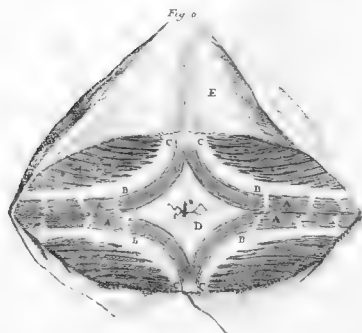
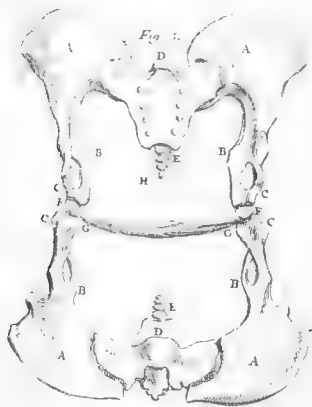
Fig. 3.



Fig. 4.

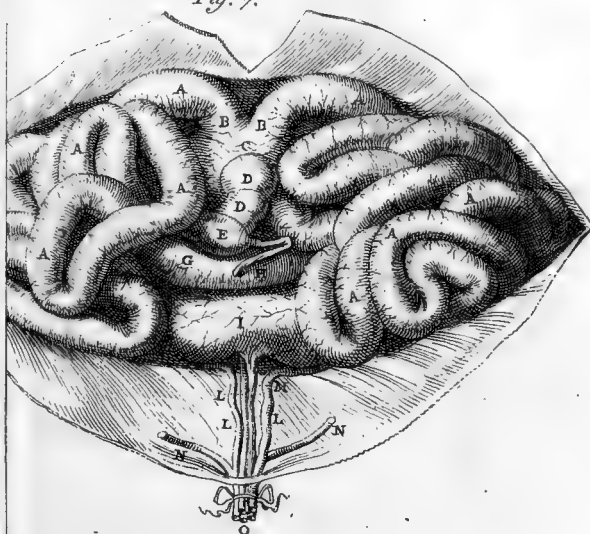








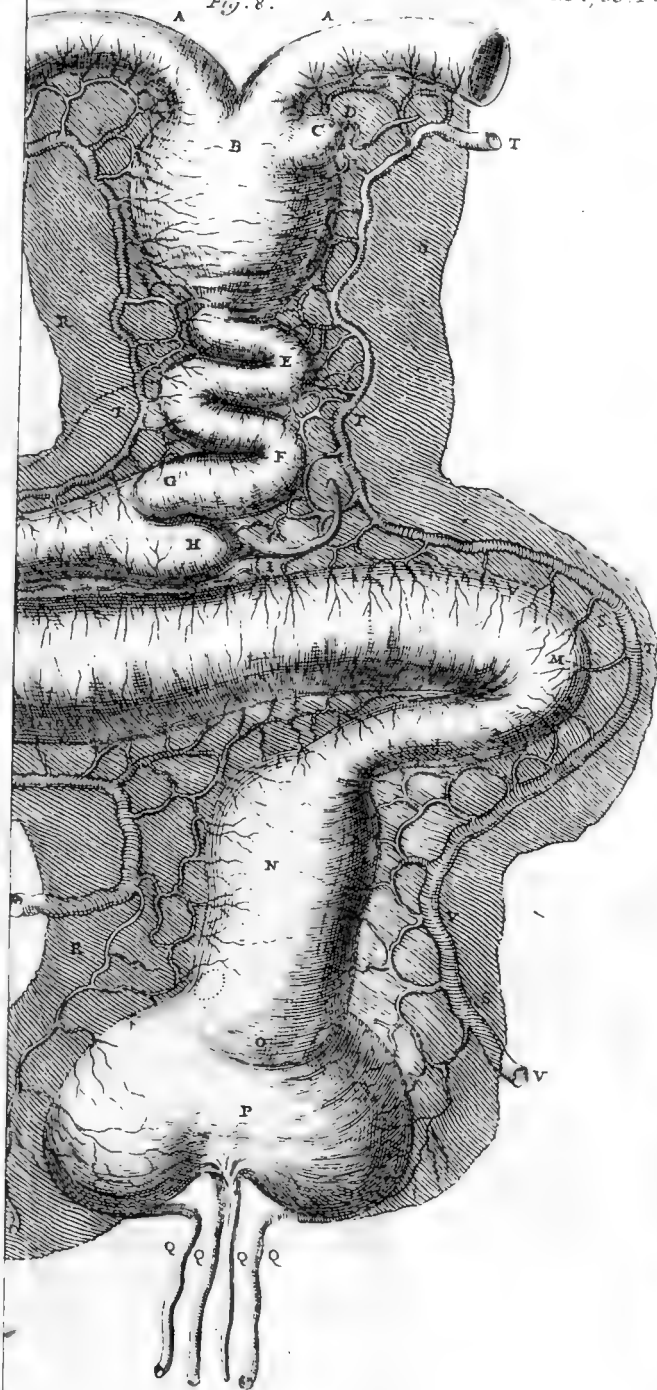
*Fig. 7.*

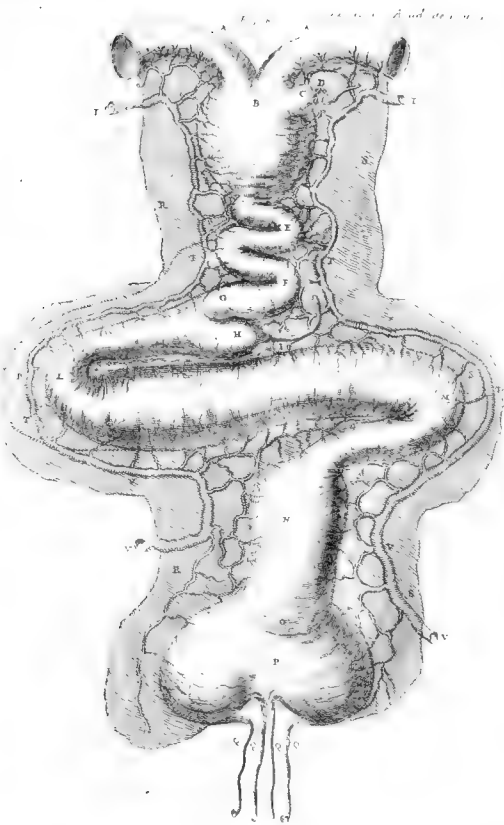




Le Serpente en File

*Fig. 8.*





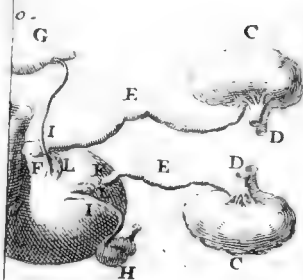


Fig. 9.

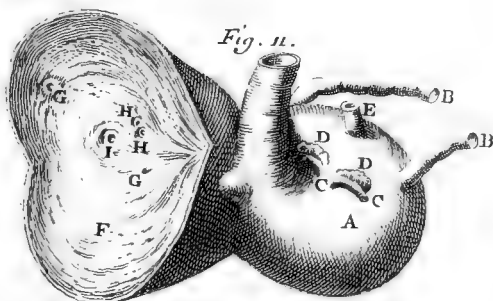
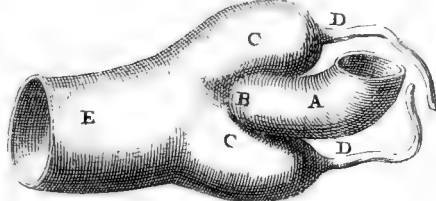


Fig. 11.

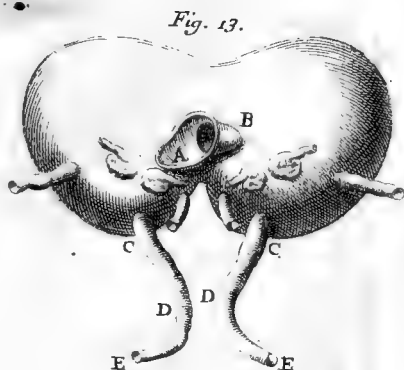


Fig. 13.

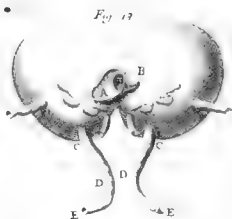
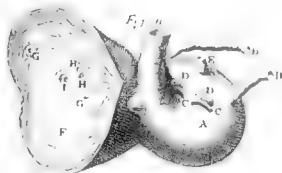
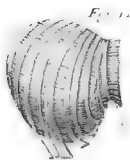
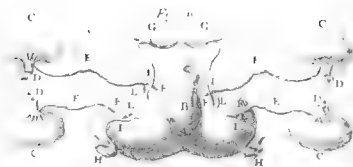


Fig. 15.

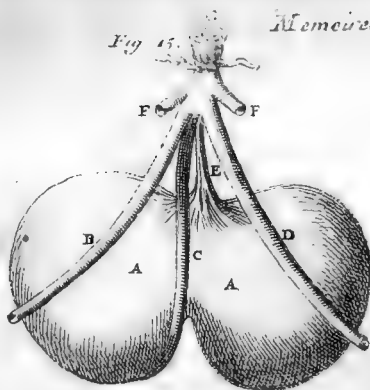


Fig. 16.

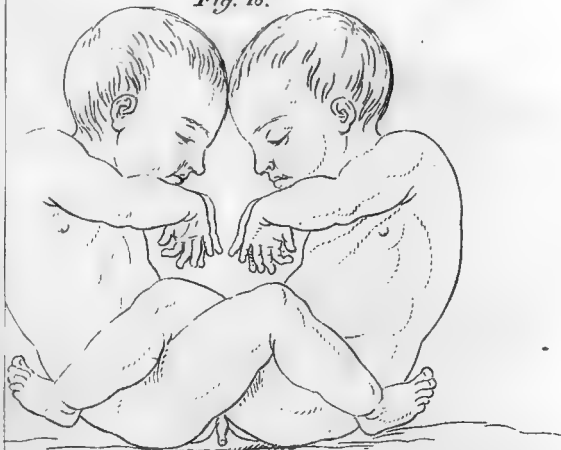
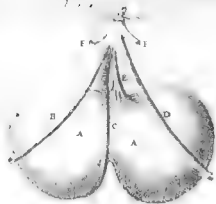


Fig. 17.




$$-F_{\eta} \text{ is}$$

